

Лекция №5.

1. Векторное и скалярное поле, производная по направлению, градиент скалярного поля.
2. Оператор Гамильтона, операции над полями.

Понятие скалярного и векторного полей

Определение 1. Говорят, что в некоторой области Ω задано поле, если каждой точке Ω соответствует определенное значение некоторой величины – скалярной или векторной.

Определение 2. Если в каждой точке Ω величина принимает числовые значения, то поле называется **скалярным**, если же в каждой точке Ω задан вектор, то поле называется **векторным**.

Если $\Omega \in \mathbb{R}^2$, то поле (скалярное, векторное) называется **плоским**.

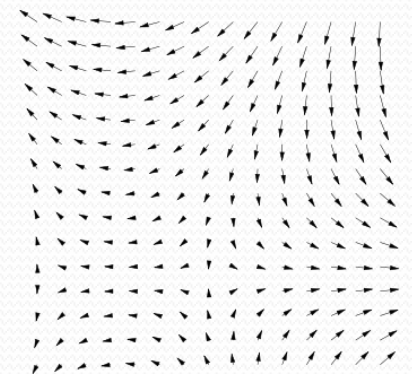
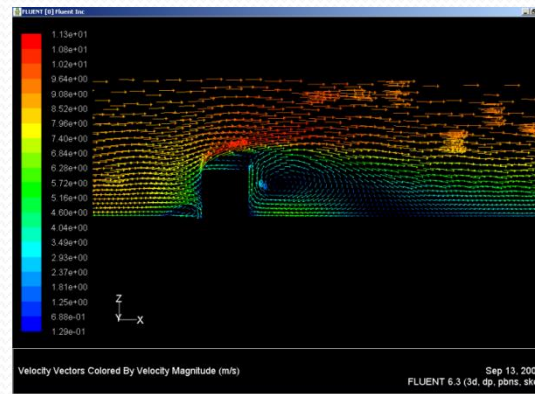
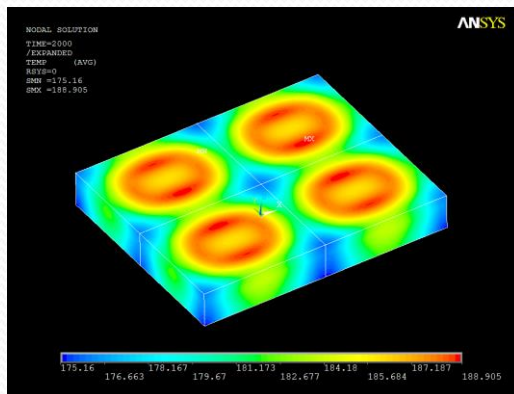
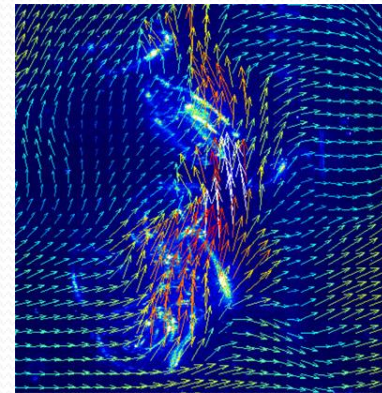
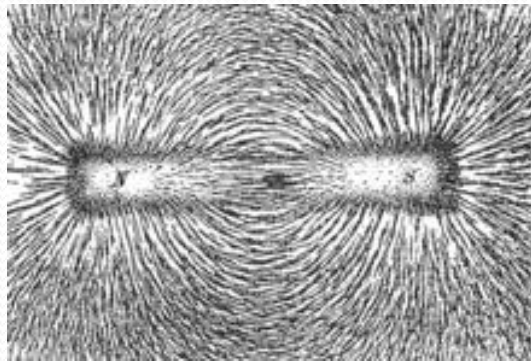
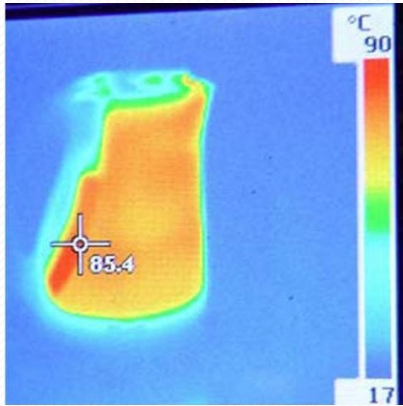
Примеры скалярных полей

- каждой точке M нагретого тела поставлена в соответствие $T(M)$ – ее температура, она образует **поле температур** внутри нагретого тела;
- какой-либо источник света создает **поле освещенности** и каждой точке M ставится в соответствие освещенность в этой точке $E(M)$;
- непрерывно распределенная масса в области образует скалярное **поле плотности массы**, где каждой точке M ставится в соответствие плотность массы в этой точке $\rho(M)$.

Примеры векторных полей

- если в какой-то области, заполненной жидкостью, текущей с некоторой скоростью, вообще говоря, с различной в разных точках, каждой точке можно поставить в соответствие вектор скорости, то получится **векторное поле скоростей** движущейся жидкости;
- если в области распределена некоторая масса, то на материальную точку с единичной массой, помещенную в данную точку области, действует гравитационная сила, которая и образует **поле сил тяготения** или **гравитационное поле**;
- если на единичный электрический заряд, помещенный в точку, действуют с определенной силой электрические заряды, распределенные в некоторой области, то эти силы образуют векторное поле, которое называется **электростатическим полем**.

Определение 3. Скалярное или векторное поле называется *стационарным*, если величина, характеризующая поле, зависит только от положения точки в пространстве, но не зависит от времени. Если же рассматриваемая величина зависит также и от времени, то поле называется *нестационарным*.



Скалярное поле. Поверхности уровня, линии уровня.

Для наглядности представления скалярного поля используется его графическое изображение – поверхности уровня.

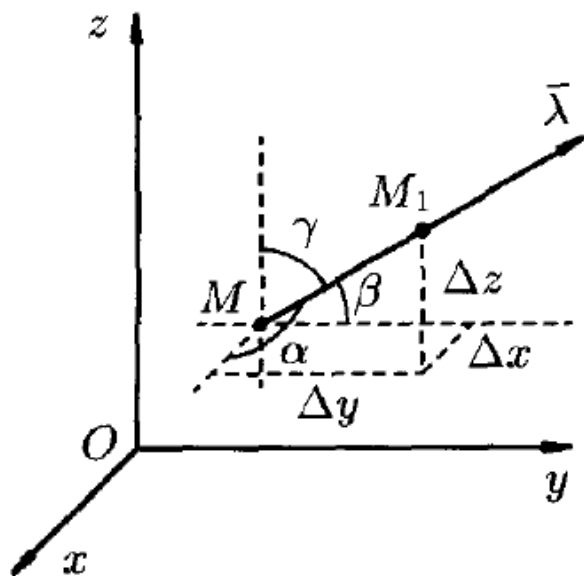
Определение. Геометрическое место точек M , в которых поле $U(M)$ имеет заданное значение C , называется **поверхностью уровня** скалярного поля $U(M) = U(x; y; z)$. Уравнение имеет вид $U(x; y; z) = C$.

Взаимное расположение поверхностей уровня дает наглядное представление о скалярном поле. Места сближения поверхностей указывают на быстрое изменение функции $U(M)$, медленному изменению функции $U(M)$ соответствуют места разряжения поверхностей. Поверхности уровня позволяют судить о скорости изменения скалярного поля по тому или иному направлению только **качественно**.

В случае плоского скалярного поля поверхности уровня вырождаются в **линии уровня**. Примеры: распределение температур (изотермы), распределение давлений (изобары), рельеф местности на топографических картах (горизонтали).

Производная по направлению.

Количественную характеристику скорости изменения скалярного поля $U(M)$ дает производная по направлению.



Возьмем точку M и какое-либо направление $\vec{l} \sim (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$

$$\Delta U = U(M_1) - U(M)$$

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x, y; z)$$

$$\Delta \lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Определение. Производной скалярного поля $U(M)$ в точке M по направлению $\vec{l}$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}$$

$\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ характеризует скорость изменения поля $U(M)$ в направлении $\vec{\lambda}$ и не связано с выбором какой-либо системы координат.

Выведем в декартовой системе координат формулу для вычисления производной по направлению

Имеем:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – б. м. в. при $\Delta \lambda \rightarrow 0$. Поскольку

$$\Delta x = \Delta \lambda \cos \alpha, \Delta y = \Delta \lambda \cos \beta, \Delta z = \Delta \lambda \cos \gamma$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma + \xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \cos \beta + \xi_3 \cos \gamma$$

Отсюда, переходя к пределу, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma$$

Градиент скалярного поля и его свойства.

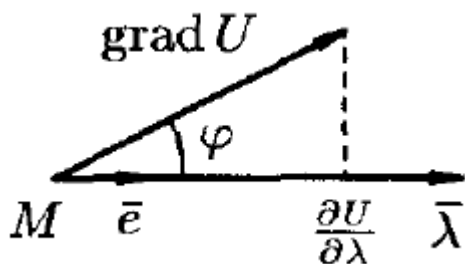
Важной характеристикой скалярного поля является градиент, позволяющий аналитически описать это поле. В декартовой системе координат градиент скалярного поля определяется по формуле

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad \text{или} \quad \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial U}{\partial \lambda} = \bar{e} \cdot \text{grad } U, \quad \text{где } \bar{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

Говорят, что скалярное поле U порождает векторное поле градиента U .
Отметим некоторые свойства градиента.

1. Производная по направлению принимает свое наибольшее значение в направлении градиента



$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U| \cdot \cos \varphi$$

$$|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2}$$

2. Вектор-градиент направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции .

$$U = C \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Отсюда следует, что если $U = C$ – поверхность уровня в скалярном поле, то единичная нормаль к этой поверхности уровня в точке M

$$\vec{n}(M) = \pm \frac{\text{grad} U}{|\text{grad} U|}$$

знак “+” или “–” выбирается в зависимости от ориентации поверхности.

3. Если в области Ω $\text{grad} U = 0$, то $U = C$, т. е. скалярное поле U постоянно в Ω .

$$\text{grad}(U + V) = \text{grad } U + \text{grad } V,$$

$$\text{grad}(c \cdot U) = c \cdot \text{grad } U, \quad c = \text{const},$$

$$\text{grad}(U \cdot V) = U \text{ grad } V + V \text{ grad } U,$$

$$\text{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \text{ grad } U - U \text{ grad } V}{V^2},$$

$$\text{grad } f(U) = \frac{\partial f}{\partial U} \text{ grad } U, \quad \text{так как}$$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(U) &= \frac{\partial}{\partial x}(f(U))\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(U))\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(U))\bar{k} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \text{grad } U. \end{aligned}$$

Оператор Гамильтона. Операции над полями.

Сэр Уильям Гамильтон (1805-1865) ввёл в употребление (в 1853) символический вектор «набла»

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}.$$

«ναβλα» (набла) на древнегреческом означает «арфа»

Этот символ (оператор Гамильтона, оператор набла) сам по себе не имеет реального смысла, но результат его применения как векторно-дифференциального оператора к скалярным или векторным функциям даёт вполне реальную физическую величину в краткой математической записи.

Применим оператор Гамильтона к записи градиента:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = \text{grad } U$$

производной по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e} \cdot \nabla) \cdot U, \text{ где } \bar{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

$$(\bar{e} \cdot \nabla) \cdot U = \left(\cos \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) U =$$

$$= \cos \alpha \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \cos \beta \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \cos \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\nabla \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Данное выражение называется **дивергенцией** (расходимостью)

векторного поля $\bar{a}(M) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Отметим некоторые *свойства* дивергенции.

1. Если $\bar{a}$ — постоянный вектор, то $\operatorname{div} \bar{a} = 0$.
2. $\operatorname{div}(c \cdot \bar{a}) = c \cdot \operatorname{div} \bar{a}$, где $c = \text{const}$.
3. $\operatorname{div}(\bar{a} + \bar{b}) = \operatorname{div} \bar{a} + \operatorname{div} \bar{b}$, т. е. дивергенция суммы двух векторных функций равна сумме дивергенции слагаемых.
4. Если U — скалярная функция, $\bar{a}$ — вектор, то

$$\operatorname{div}(U \cdot \bar{a}) = U \cdot \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \operatorname{grad} U.$$

$$\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Данное выражение называется **ротором** (вихрем)

векторного поля $\bar{a}(M) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$

$$\text{rot } \bar{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

Отметим некоторые *свойства* ротора.

1. Если $\bar{a}$ — постоянный вектор, то $\text{rot } \bar{a} = 0$.
2. $\text{rot}(c \cdot \bar{a}) = c \cdot \text{rot } \bar{a}$, где $c = \text{const}$.
3. $\text{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{rot } \bar{a} + \text{rot } \bar{b}$, т. е. ротор суммы двух векторов равен сумме роторов слагаемых.
4. Если U — скалярная функция, а $\bar{a}(M)$ — векторная, то

$$\text{rot}(U \cdot \bar{a}) = U \text{rot } \bar{a} + \text{grad } U \times \bar{a}.$$