

Сходимость произвольных рядов.

Ниже будут рассматриваться ряды, в которых имеется бесконечное количество положительных членов и бесконечное количество отрицательных членов. Такие ряды называют знакопеременными.

Остановимся сначала на рядах знакопередающихся. Их удобно записывать

так: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Здесь полагаем

все $a_n > 0$. В таком ряде знаки $+$ и $-$ чередуются и идут через один, откуда и название ряда.

Достаточный признак сходимости знакопередающегося ряда:

Признак Лейбница. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ монотонно

убывают: $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ и если общий член a_n стремится к нулю

($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится. Сходящийся ряд называют рядом

лейбницевского типа.

Для доказательства сначала рассмотрим частичные суммы с четными номерами: $S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$. Объединяем слагаемые в этой

сумме: $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$. Таким образом, S_{2n} равна

сумме положительных слагаемых и следовательно, не убывает, является монотонно возрастающей последовательностью. Она ограничена сверху:

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$. Итак, $S_{2n} < a_1$ - последовательность ограничена сверху. Она имеет предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. Но если перейти к суммам

нечетным, то будем иметь: $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Поскольку предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, то

имеем окончательно: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S$. Другими

словами, четные и нечетные частичные суммы имеют один и тот же предел.

Отсюда заключаем, что ряд сходится. Попутно мы доказали, что $0 < S < a_1$.

На основании этого неравенства удобно оценивать сумму остатков r_{2n} и

r_{2n+1} . Имеем: $r_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} + \dots < a_{2n+1}$, $0 < r_{2n} < a_{2n+1}$

$r_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3} - \dots$. Ясно, что $r_{2n+1} < 0$, причем $|r_{2n+1}| < a_{2n+2}$. Объединяя

неравенства для r_{2n} и r_{2n+1} , можно написать $|r_m| < a_m$, где m - произвольное

натуральное число, четное или нечетное. Таким образом, при замене суммы знакопередающегося ряда Лейбница на его частичную сумму мы совершаем ошибку, не превосходящую (по модулю) первого отброшенного члена ряда.

Пример $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ - ряд сходится по признаку Лейбница, ибо

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Это ряд Лейбница. Позже будет показано, что

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$.

Требование монотонности стремления членов знакопередающегося ряда к нулю существенное для его сходимости. Если оно не выполнено, то

возможна расходимость ряда, несмотря на стремление к нулю его членов. В качестве примера такого поведения рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots .$$

Члены этого ряда не удовлетворяют условию монотонности стремления к нулю

$$: \frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}+1}, \quad \text{но} \quad \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}. \quad \text{Для него имеем:}$$

$$S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{1} + \dots + \frac{2}{n} = 2S_{n-1} \quad (\text{гармонич.})$$

Но гармонический ряд расходится, поэтому рассмотренный знакочередующийся ряд также расходится.

Заметим, что в теореме Лейбница условия монотонности можно ослабить. Достаточно потребовать монотонности членов ряда, начиная с некоторого места (номера n). Т.е. первые члены знакочередующегося ряда могут не удовлетворять условию монотонности.

Поэтому если рассмотреть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$, $x \neq 0$, то увидим, что при

любом фиксированном x , для достаточно больших n , $\sin \frac{x}{n}$ имеет один

определенный знак, и имеем ослабление условий, ряд сходится при любом x .

Сходимость рядов с произвольным распределением знаков.

Для рядов с произвольным распределением знаков можно установить только достаточный признак, когда вопрос о сходимости можно свести к изучению сходимости положительного ряда.

Итак, изучаются ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n - величины положительные и отрицательные.

Теорема. Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то и данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Действительно, обозначим положительные члены ряда $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, т.к. его частичные суммы монотонно возрастают и

ограничены сверху суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Также сходится ряд, составленный из

отрицательных a_n : $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ ($q_k = |a_k|$), т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Тогда

$S_n^a = S_m^p - S_k^q$, где $m+k=n$. При $n \rightarrow \infty$, имеем $m \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Поэтому

существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a = S^p - S^q$ - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то говорят, что имеет место абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то говорят о неабсолютной, или условной, сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Примеры: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ - абсолютно сходящийся ряд. Далее: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ - неабсолютно сходящийся ряд (условно сходящийся ряд).

Для установления абсолютной сходимости рядов можно применять все перечисленные выше достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то сходится (также абсолютно) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, полученный произвольной перестановкой членов исходного ряда.

Существенно отметить, что перестановке могут подвергаться бесконечное множество членов исходного ряда.

Докажем. Пусть сначала имеем знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. для всех n , $a_n > 0$. Так как по нашему условию он сходится, то можно писать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_0$, S_0 – определенная величина. Рассмотрим k -ую частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$: $S'_k = a'_1 + \dots + a'_k$. Очевидно, $S'_k = a'_1 + \dots + a'_k = a_{n_1} + \dots + a_{n_k}$. Обозначим $N = \max(n_1, \dots, n_k)$. Тогда имеем очевидное неравенство: $S'_k < a_1 + \dots + a_N = S_N$, ибо среди членов частичной суммы S_N есть и члены $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$. Но $S_N \leq S_0$ при любом N . Итак, при любом k имеем $S'_k \leq S_0$. Следовательно, частичные суммы S'_k ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ не только монотонно возрастают, но и ограничены сверху. Следовательно, последовательность S'_k имеет предел при $k \rightarrow \infty$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ сходится. При этом для его суммы S' имеет место неравенство: $S' \leq S_0$. Далее, меняя (в рассуждениях) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ местами, можно доказать и неравенство: $S' \geq S_0$. Откуда получаем единственно возможное и непротиворечивое равенство: $S' = S_0$ - суммы у рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ одинаковые.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то абсолютно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$.

Для неабсолютно сходящихся рядов отметим два следующих свойства, которые следует иметь в виду при работе с такими рядами.

1. Можно показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится неабсолютно, то ряд, составленный из одних только положительных его членов $P: \sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и ряд, составленный из одних только отрицательных его членов $Q: \sum_{k=1}^{\infty} q_k$ расходятся (не сходятся). Подчеркнем, что p_k есть положительное a_{n_k} , а q_k есть $|a_{n_k}|$, причем здесь само a_{n_k} - отрицательное. Поясним кратко причину такого свойства условно сходящегося ряда.

Ибо если сходится ряд P и сходится ряд $A: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то имеем: $S_n = P_k - Q_m$ ($k + m = n$), где S_n, P_k и Q_m - частичные суммы рядов A, P и Q соответственно. Нам известно, что существуют пределы последовательностей S_n и P_k , следовательно существует и предел последовательности Q_m . Но тогда существует и предел суммы $P_k + Q_m = A_n^*$, $k + m = n$,

т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, чего нет на самом деле. Следовательно, ряды из только положительных членов и из только отрицательных членов условно сходящегося ряда расходятся, несмотря на то, что $p_k \rightarrow 0$ и $q_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

2. На этом основании можно доказать второе вышеупомянутое свойство условно сходящихся рядов (теорему Римана): в условно сходящемся ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно так переставить члены, что его сумма будет равна любому наперед заданному числу B .

Например

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Наметим путь доказательства теоремы: Задаем число B . Из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ берем сначала только положительные члены $p_1, p_2, \dots, p_{k_1}$ в таком количестве, чтобы выполнилось неравенство: $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > B$. Затем берем отрицательные члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n: q_1, q_2, \dots, q_{k_2}$ (все $q < 0$) в таком количестве, чтобы было неравенство в другую сторону: $(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1}) + (q_1 + q_2 + \dots + q_{k_2}) < B$. Процесс прибавления новых положительных и новых отрицательных членов повторяем неограниченно. Уклонение получающихся сумм (фактически частичных сумм ряда с переставленными членами) от числа B не

превосходит p_k или $|q_k|$, k – достаточно большое. Следовательно, с ростом k уклонение новых частичных сумм от числа B стремится к нулю, так что сумма нового ряда, составленного из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, будет равна B , что и требуется доказать в теореме Римана.