Министерство образования и науки Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА имени И.М. ГУБКИНА

И.Н. Мельникова, Т.С. Соболева, Н.О. Фастовец

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

(Для факультета АиВТ)

Москва 2013

Оглавление

Предисловие 4

1. Определители 7

2. Матрицы. Операции над матрицами 16

3. Обратная матрица 24

4. Ранг матрицы 31

5. Линейное пространство арифметических векторов 36

6. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера 41

7. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса 45

8. Однородные и неоднородные системы 55

Варианты контрольных работ 63

Ответы 65

Список рекомендуемой литературы 66

Предисловие

В связи с введением новых федеральных государственных образовательных стандартов программы многих дисциплин значительно изменились. Возникла необходимость создания новых методических пособий.

Данное методическое пособие посвящено основным элементам линейной алгебры: матрицам, определителям, арифметическим векторам, системам линейных алгебраических уравнений. Пособие отражает многолетний опыт авторов в проведении практических занятий по математике на факультете АиВТ.

В начале каждого раздела приводится необходимый теоретический материал, затем очень подробно разбирается большое количество примеров, после которых предлагаются задания для аудиторной и самостоятельной работы в качестве домашних заданий (с ответами). В конце приведены примерные варианты контрольных работ.

Предлагаемое пособие может быть полезно не только студентам всех специальностей, начинающим знакомство с линейной алгеброй, но также аспирантам и магистрантам для восстановления своих знаний в этой области.

Исторически линейная алгебра возникла в процессе развития теории систем линейных алгебраических уравнений. К идее определителя пришел Лейбниц в конце XVII века в связи с поиском общего метода решения таких систем. В 1752 году швейцарский математик Крамер сформулировал и обосновал правило (правило Крамера), которое позволяет решать квадратные системы n линейних уравнений с n неизвестными. Согласно этому правилу, каждая неизвестная, входящая в систему уравнений, равна отношению двух определителей. В 1772 году французский математик Вардермонд опубликовал обширное исследование определителей (важный класс определителей сегодня носит его имя). Первое полное изложение теории определителей было дано в 1812 году французскими математиками Бине и Коши.

Что касается матриц, то впервые матрица под названием «волшебный квадрат» появилась еще в Древнем Китае. Позже подобными квадратами пользовались арабские математики. Но изучение матриц, как самостоятельного объекта математического исследования, началось только в середине XIX века в Европе. Именно в это время появляются работы Гамильтона и Кэли, посвященные матрицам. В 1841 году Кели ввел современное обозначение для матриц и определителей. Примерно в то же время появился метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений, который опирается на преобразования расширенной матрицы системы. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат немецким математикам Вейерштрассу и Фробениусу. В частности, Фробениус ввел понятие ранга матрицы. В конце XIX века немецкий математик Кронекер в своих лекциях использовал теорему, дающую необходимое и достаточное условия существования решения системы m линейных уравнений с n неизвестными. Позже итальянский математик Капелли сформулировал эту теорему, используя понятие ранга матрицы.

Матричный язык широко используется в различных областях современной математики и ее приложений. Матрицы применяются при исследовании линейных отображений векторных пространств, линейных и квадратичных форм, систем линейных алгебраических уравнений и систем дифференциальных уравнений. Используются матрицы и в механике и теоретической электротехнике, в теории вероятностей, в квантовой механике, экономике и многих других областях.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные понятия

Квадратную таблицу чисел, состоящую из n строк и n столбцов, будем называть ***квадратной матрицей порядка n***. Обозначение:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A=(a_{ij}) \ \ (i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n).$$

Здесь a_{ij} – ***элементы матрицы*** A ($a_{ij}\in\mathbb{R}$ или $a_{ij}\in\mathbb{C}$), первый индекс i указывает номер строки, второй индекс j – номер столбца.

Элементы $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***, а элементы $a_{1n},a_{2(n-1)},...,a_{n1}$ образуют ***побочную диагональ*** матрицы.

Одной из важных характеристик квадратной матрицы является ее определитель или детерминант.

Определителем матрицы $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n)$ называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и вычисляется по ее элементам. Обозначается определитель матрицы любым из символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta, \quad \det A, \quad |A|.$$

1°. Определителем матрицы $A=(a_{11})$, состоящей из одного элемента, является само число a_{11}.

2°. Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

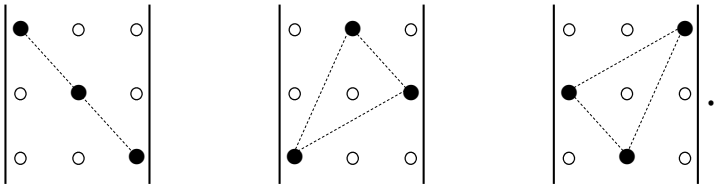
ПРИМЕР 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10.$ ■

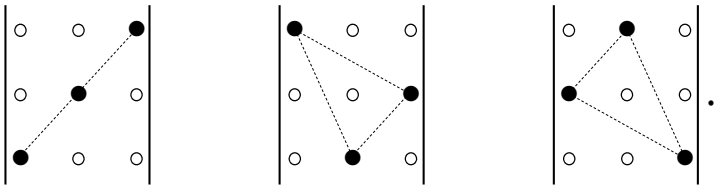
3°. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Для того чтобы запомнить эту формулу, используют правило Саррюса (или правило треугольников). Произведение $a_{11}a_{22}a_{33}$ элементов главной диагонали входит в формулу со знаком «+», также как и произведения $a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{32}a_{13}$ элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали:



А произведение $a_{13}a_{22}a_{31}$ элементов побочной диагонали, а также произведения $a_{11}a_{23}a_{32}$ и $a_{21}a_{12}a_{33}$ входят со знаком «–»:



ПРИМЕР 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Используя правило Саррюса, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 2 = -3. \blacksquare$$

4°. Чтобы сформулировать общее правило вычисления определителя произвольного порядка, введем понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.

Если из матрицы A порядка n вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец (строку и столбец, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}), то определитель полученной матрицы порядка $n-1$ называется ***минором*** элемента a_{ij} и обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} будем называть произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим, например, матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем миноры и алгебраические дополнения элементов a_{23} и a_{31}. Вычеркнем вторую строку и третий столбец, на пересечении которых находится элемент a_{23}, тогда $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1$. Вычеркнув третью строку и первый столбец, на пересечении которых находится элемент a_{31}, получим $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 5$.

Определитель n-го порядка может быть вычислен по любой из формул:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (\textbf{\textit{разложение по i-й строке}}),$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (\textbf{\textit{разложение по j-му столбцу}}),$$

причем результат вычислений не зависит от выбора строки или столбца.

ПРИМЕР 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель, например, по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$

$$= 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -12. \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Полученные определители 3-го порядка также можно вычислить разложением по любой строке (столбцу). Разложим первый определитель, например, по второму столбцу, второй определитель – по третьему столбцу, а третий определитель – по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 19,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Окончательно имеем $\Delta = -1\cdot(-16) + 1\cdot 19 - 1\cdot 7 = 28$.■

Свойства определителя

1. Определитель не изменится, если его строки сделать столбцами, сохраняя их нумерацию:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Из свойства 1 следует, что всякое утверждение о строках определителя справедливо и для его столбцов, и обратно. Поэтому остальные свойства будем формулировать только для строк.

2. Определитель, имеющий нулевую строку, равен нулю.

3. Если поменять местами две строки определителя, то знак определителя изменится на противоположный.

4. Определитель, две строки которого совпадают, равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки имеют общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя.

6. Определитель, имеющий пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если все элементы какой-либо строки представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у первого из которых в данной строке стоят первые слагаемые, у второго – вторые слагаемые:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. Вычислить определитель третьего порядка можно следующим образом: к определителю справа приписывается сначала первый столбец, а затем второй столбец:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & + & + \quad + \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Со знаком «+» входят в формулу произведения $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{13}a_{21}a_{32}$ (произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, находящихся на линиях, параллельных главной диагонали), со знаком «–» входят произведения $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{32}a_{23}a_{11}$ и $a_{33}a_{21}a_{12}$ (произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, находящихся на линиях, параллельных побочной диагонали).

Замечание 2. При вычислении определителя разложением по строке (столбцу) сначала можно, используя свойства определителя, получить в выбранной строке (столбце) максимально возможное число нулевых элементов.

Замечание 3. Используя свойства определителя, можно привести определитель к треугольному виду, когда все элементы под (или над) одной из диагоналей (главной или побочной) равны нулю. Например, если все элементы определителя под (или над) главной диагональю равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

ПРИМЕР 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель разложением по третьему столбцу, предварительно получив в этом столбце как можно больше нулей. Для этого из элементов первой строки вычтем элементы второй строки (обозначение $I-II$), затем из элементов второй строки вычтем элементы четвертой строки, умноженные на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{I-II}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{II-3\cdot IV}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ -28 & -2 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложив полученный определитель по третьему столбцу, в котором всего один ненулевой элемент, имеем

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -28 & -2 & 7 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2+42-168-36-14+28) = 146. \blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Вычислить определитель 4-го порядка, элементы которого находятся по формуле: $a_{ij} = \min\{i,j\}$.

Решение. Приведем определитель к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{IV-III \\ III-II \\ II-I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \blacksquare$$

Задачи

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2+3i & 3 \\ 4 & 2-3i \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения и неравенство:

а) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0$.

3. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответы: **1.** а) -24; б) 1; в) 0; г) -12.

2. а) 13; б) 5; в) $x \in [-6;-4]$.

3. а) 63; б) -5544.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения:

1. Как изменится определитель, если

а) к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку;

б) первый столбец поставить последним, а остальные столбцы сдвинуть влево, сохраняя их порядок?

2. Доказать, что сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

3. Не вычисляя определители, доказать равенство

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Задачи:

1.1. Вычислить определители:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix};\ \text{б)}\ \begin{vmatrix} 1+i & 3 \\ 4 & 1-i \end{vmatrix};\ \text{в)}\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix};\ \text{г)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+i \\ 1+i & 0 & 1+i \\ 1+i & 1+i & 0 \end{vmatrix}.$$

1.2. Решить уравнения и неравенство:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;\ \text{б)}\ \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \text{в)}\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} \le 0.$$

1.3. Вычислить определители:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix};\ \text{б)}\ \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix};\ \text{в)}\ \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

2. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Основные понятия

Прямоугольную таблицу чисел, состоящую из m строк и n столбцов, будем называть ***матрицей размера*** $\boldsymbol{m\times n}$. Обозначение:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A=(a_{ij}) \ \ (i=1,2,...m;\ j=1,2,...,n).$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы, i – номер строки, j – номер столбца. При $m=n$ получаем квадратную матрицу.

Матрица размера $1\times n$ называется ***матрицей-строкой***. Матрица размера $m\times 1$ называется ***матрицей-столбцом***.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***.

Назовем матрицу $A^T=(a_{ij}^T)$ размера $n\times m$ ***транспонированной*** к матрице $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$, если $a_{ij}^T=a_{ji}$ $(i=1,...,n;\ j=1,...,m)$, то есть строки матрицы A^T совпадают с соответствующими столбцами матрицы A.

ПРИМЕР 1. Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Записав столбцы данной матрицы в виде строк, получим матрицу $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, транспонированную к матрице A. ■

Матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются ***равными***, если они одного размера, а элементы, стоящие на одинаковых местах, равны, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$.

Квадратную матрицу $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...n;\ j=1,2,...,n)$ будем называть ***диагональной***, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, для которой $a_{ii}=\lambda$ $(i=1,2,...n)$, называется ***скалярной***.

Диагональная матрица, для которой $a_{ii}=1$ $(i=1,2,...n)$, называется ***единичной*** и обозначается буквой *E*, то есть

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***вырожденной***, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица называется ***невырожденной***.

Операции над матрицами

1. ***Суммой матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ называется матрица *C* размера $m\times n$, элементы c_{ij} которой находятся по формулам

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n).$$

Обозначение: $C=A+B$.

2. ***Произведением матрицы*** $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ ***на число*** λ называется матрица C размера $m\times n$, элементы которой c_{ij} имеют вид

$$c_{ij}=\lambda a_{ij} \quad (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n).$$

Обозначение: $C=\lambda A$.

ПРИМЕР 2. Найти $2A-B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. $2A-B=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-(-1) & 4-4 & 6-1\\ 4-0 & 0-1 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}.\blacksquare$$

3. ***Произведением*** матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n\times k$ называется матрица C размера $m\times k$ (обозначение $C=AB$), элементы c_{ij} которой находятся по формулам

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj} \quad (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,k)$$

(правило перемножения матриц: «строка на столбец»).

Замечание. Матрицу A можно умножить на матрицу B только при условии, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

ПРИМЕР 3. Найти AB, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$.

Решение. Число столбцов матрицы A равно двум и равно числу строк матрицы B, следовательно, эти матрицы можно перемножить. Матрица $C=AB$ имеет размер 3×2.

Найдем элементы матрицы C:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5;$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = -8;$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 9;$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = -14;$$
$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 = 13;$$
$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-5) = -20.$$

Итак, окончательно имеем $C = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 9 & -14 \\ 13 & -20 \end{pmatrix}$.■

Замечание. В последнем примере было найдено произведение AB. Что касается произведения BA, то оно не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A.

Замечание. Для квадратных матриц одного порядка можно рассматривать как произведение AB, так и произведение BA. В общем случае $AB \neq BA$.

ПРИМЕР 4. Найти произведения AB и BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $AB \neq BA$.■

Матрицы A и B называются ***коммутирующими*** или перестановочными, если $AB = BA$. Скалярная и единичная матрицы коммутируют с любой квадратной матрицей того же порядка.

4. Натуральная степень квадратной матрицы находится по формуле

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Если $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен n-й степени относительно x, то

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

ПРИМЕР 5. Найти $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

то

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3E = 2\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Элементарными преобразованиями строк матрицы являются следующие операции:

1) перестановка двух строк матрицы;

2) умножение строки на ненулевое число;

3) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то матрицы A и B называются ***эквивалентными***. Обозначение: $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований любая матрица может быть приведена к ***ступенчатому виду*** (первый ненулевой элемент в каждой следующей ненулевой строке находится правее первого ненулевого элемента в предыдущей ненулевой строке).

ПРИМЕР 6. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-3\cdot I \\ III+5\cdot I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \overset{2\cdot III+3\cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 17 & 18 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Замечание. Любая квадратная невырожденная матрица A эквивалентна единичной матрице E того же порядка.

Например, рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица A является невырожденной, так как $\det A = 3$. Применяя элементарные преобразования строк, получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-3I \\ III+5I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \overset{\substack{III/3 \\ II \leftrightarrow III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{III+2I}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{III\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+2III \\ I+III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задачи

1. Найти $4A-5B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Найти AB и BA, если возможно: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти $f(A)$, если $f(x)=3x^2-5x+2$ и $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Привести к ступенчатому виду: а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы: **1.** $\begin{pmatrix} -7 & -9 & -10 \\ 22 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 40 \end{pmatrix}$. **2.** $AB=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 12 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения:

1. Как изменится произведение матриц AB, если
   а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A;
   б) переставить i-й и j-й столбец матрицы B?
2. Существует ли квадратная матрица второго порядка, квадрат которой равен единичной матрице $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

3. Доказать следующие свойства:

а) $A+B=B+A$;

б) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

в) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

г) $A(B+C)=AB+AC$,

где A, B – матрицы, а α,β – числа.

Задачи:

2.1. Найти $3A-2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.2. Найти AB и BA, если это возможно:

а) $A=\begin{pmatrix} 1, & 0, & -4, & 2, & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5, & 2, & -1, & 3, & 6 \end{pmatrix}^T$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3. Найти AA^T, A^TA, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Найти $f(A)$, если $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$ и $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.5. Привести матрицы к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратной матрицей к квадратной невырожденной матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Если матрица A^{-1} существует, то она единственная.

Методы вычисления обратной матрицы

1. Метод присоединенной матрицы. Присоединенная матрица A^* определяется как транспонированная к матрице, состоящей из алгебраических дополнений A_{ij} элементов матрицы A, то есть

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к любой невырожденной матрице A находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

ПРИМЕР 1. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $\det A = -1 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = -1; \quad A_{12} = 0; \quad A_{21} = -2; \quad A_{22} = 1,$$

тогда

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -9 + 36 = 27.$$

Так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{27} A^* = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \blacksquare$$

2. Метод элементарных преобразований строк. К квадратной матрице A порядка n справа приписывают единичную матрицу E того же порядка. Полученную матрицу $(A|E)$ размера $n \times 2n$ с помощью элементарных преобразований строк (строки длины $2n$) приводят к виду $(E|A^{-1})$.

ПРИМЕР 3. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. К матрице $(A|E)$ размера 2×4 применим элементарные преобразования строк так, чтобы слева получилась единичная матрица, тогда справа будет обратная матрица:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II \cdot (-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{I-2II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \blacksquare$

ПРИМЕР 4. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 10 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение. К матрице $(A|E)$ размера 3×6 применим элементарные преобразования строк так, чтобы слева получилась единичная матрица:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 10 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{\substack{II-2I\\ III-3I}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{III-2II}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\overset{\substack{II/2\\ III/3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3\end{array}\right)\overset{\substack{II+III\\ I-3III}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/6 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3\end{array}\right)\overset{I-2II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 4/3 & 7/3 & -5/3\\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -1/6 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3\end{array}\right).$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4/3 & 7/3 & -5/3\\ -2/3 & -1/6 & 1/3\\ 1/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}4/3 & 7/3 & -5/3\\ -2/3 & -1/6 & 1/3\\ 1/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 10 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.\blacksquare$$

С помощью обратной матрицы можно решать ***матричные уравнения***:

$$AX=C, \qquad XA=C, \qquad AXB=C.$$

Если матрицы A и B – квадратные невырожденные, то решения матричных уравнений могут быть найдены следующим образом:

$$AX=C \;\Rightarrow\; A^{-1}AX=A^{-1}C \;\Rightarrow\; EX=A^{-1}C \;\Rightarrow\; X=A^{-1}C;$$

$$XA=C \;\Rightarrow\; XAA^{-1}=CA^{-1} \;\Rightarrow\; XE=CA^{-1} \;\Rightarrow\; X=CA^{-1};$$

$$AXB=C \;\Rightarrow\; A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1} \;\Rightarrow\; X=A^{-1}CB^{-1}.$$

ПРИМЕР 5. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$X\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде $XA=C$. Поскольку $\det A=11$, то существует A^{-1}, и решение находится по формуле

$$X=CA^{-1}.$$

Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/11 & 3/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/11 & 3/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6/11 & 1/11 \\ -5/11 & 10/11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$XA=\begin{pmatrix} -6/11 & 1/11 \\ -5/11 & 10/11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=B.\blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде $AXB=C$. Матрицы A и B невырожденные, так как $\det A=2$, $\det B=1$. Тогда решение уравнения может быть найдено по формуле

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

Найдем матрицы A^{-1} и B^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}B^{*}=1\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$AXB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 23 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=C.\blacksquare$$

Задачи

1. Найти обратную матрицу двумя способами:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричные уравнения:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};\ \text{б)}\ X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответы: **1.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 8 & -11 & -2 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

3.1. Найти обратную матрицу двумя способами:

$$\text{а)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ \text{б)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix};\ \text{в)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. С помощью обратной матрицы решить матричные уравнения:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};\ \text{б)}\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)}\ X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};\ \text{г)}\ X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть дана произвольная матрица размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим любые k ($k \le \min\{m,n\}$) строк и любые k столбцов матрицы A. Элементы, находящиеся на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется ***минором k-го порядка*** матрицы A и обозначается M_k.

Рассмотрим, например, матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Любой элемент матрицы является минором 1-го порядка. Всего миноров 1-го порядка двенадцать.

Найдем какой-нибудь минор 2-го порядка. Выделим, например, первую и третью строки и второй и третий столбцы матрицы. На пересечении выделенных строк и столбцов получим минор 2-го порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$. Кстати, число всех миноров 2-го порядка данной матрицы равно числу способов выбора двух строк из трех возможных, умноженному на число способов выбора двух столбцов из четырех возможных, а именно, $C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 18$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

Укажем какой-нибудь минор 3-го порядка. Всего миноров 3-го порядка $C_3^3 \cdot C_4^3 = \frac{3!}{3!0!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = 4$. Выделив, например, второй, третий, четвертый столбцы матрицы, получим: $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Очевидно, старший порядок миноров для данной матрицы равен трем.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее ненулевых миноров. Обозначение: $r(A)$ или rang$A$. Любой ненулевой минор порядка $r(A)$ называется ***базисным минором***.

В примере, рассмотренном выше, минор $M_3 = -36$ не равен нулю, его порядок равен трем. Это максимальный порядок ненулевых миноров, следовательно, $r(A) = 3$, а сам минор M_3 является базисным.

Методы нахождения ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице A найден ненулевой минор M_k порядка k. Выделим k строк и k столбцов, на пересечении которых стоят элементы этого минора, добавим к ним еще одну любую из оставшихся строк матрицы и один любой из оставшихся столбцов. Таким образом, число выделенных строк равно $k+1$, и число выделенных столбцов равно $k+1$. На пересечении этих строк и столбцов получилась квадратная матрица порядка $k+1$, определитель которой M_{k+1} и является окаймляющим минором для минора M_k.

Если все миноры M_{k+1}, окаймляющие минор M_k, равны нулю, то $r(A) = k$. Если нашелся ненулевой минор M_{k+1}, окаймляющий M_k, то $r(A) \geq k+1$, и вся процедура повторяется.

ПРИМЕР 1. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

Решение. $r(A)\geq 1$, так как у матрицы есть ненулевые элементы. Найдем какой-нибудь ненулевой минор 2-го порядка. Например,

$$M_2=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Следовательно, $r(A)\geq 2$. Согласно методу окаймляющих миноров, достаточно рассмотреть только те миноры 3-го порядка, которые окаймляют M_2. Таких миноров всего два (к строкам с номерами 1, 2 и к столбцам с номерами 2, 3, содержащим элементы минора M_2, можно добавить строку с номером 3 и один из оставшихся столбцов: с номером 1 или 4):

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 6 & 1 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}+6\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-12+12=0,$$

$$M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 6 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0.$$

Итак, все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю. Следовательно, $r(A)=2$, а минор $M_2=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$ является базисным.

Можно указать другие базисные миноры. Например, $M_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 6 & 1\end{vmatrix}=-6\neq 0$ или $M_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$.■

Замечание. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

2. Метод элементарных преобразований. Матрица A с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду. Затем определяется ранг ступенчатой матрицы, который совпадает с рангом исходной матрицы.

ПРИМЕР 2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем данную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-3\cdot I \\ III-3\cdot I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & -10 \end{pmatrix} \overset{III+2\cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -22 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -22 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ является ненулевым минором максимального порядка для ступенчатой матрицы. Поскольку порядок этого минора равен трем, то ранг ступенчатой матрицы тоже равен трем и совпадает с числом ее ненулевых строк. А так как элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то ранг исходной матрицы также равен трем.■

Задачи

1. Найти ранги матриц с помощью метода окаймляющих миноров или с помощью элементарных преобразований:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответы: **1.** а) 3; б) 2.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения:

1. Как может измениться ранг матрицы при добавлении к ней
   а) одной произвольной строки;
   б) одной строки, такой же, как первая строка матрицы?
2. Ранг матрицы A равен r. Что можно сказать о ранге матрицы $2A$?

Задачи:

4.1. Найти ранг матрицы с помощью метода окаймляющих миноров:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4.2. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Арифметическим вектором называется упорядоченный набор из n действительных чисел. Обозначение $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются ***компонентами*** вектора $\overline{x}$.

Введем операции над арифметическими векторами: сложение арифметических векторов и умножение арифметического вектора на действительное число. Если $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – n-компонентные арифметические векторы, то

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \text{ где } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть L – произвольное множество n-компонентных арифметических векторов с введенными выше операциями сложения и умножения на число.

Множество L называется ***линейным пространством арифметических векторов***, если для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются следующие восемь аксиом:

1. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;
2. $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$;
3. во множестве L существует нулевой элемент $\overline{0}$ такой, что для любого $\overline{x}$ из L выполняется равенство $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$;
4. для любого $\overline{x}$ из L во множестве L существует противоположный элемент $(-\overline{x})$ такой, что $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$;
5. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$;
6. $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$;
7. $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$;
8. $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$.

Из аксиом линейного пространства следует, что если векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$ принадлежат линейному пространству L, то их ***линейная комбинация*** $\lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + ... + \lambda_k\overline{x}_k \, (\lambda_i \in \mathbb{R})$ тоже принадлежит L.

Примером линейного пространства является множество всех n-компонентных арифметических векторов, которое обозначается $\mathbb{R}^n$.

Назовем систему арифметических векторов $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_s\}$ ***линейно зависимой***, если найдутся действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + ... + \lambda_s\overline{x}_s = \overline{0}$, где $\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$ – нулевой вектор. В противном случае система называется ***линейно независимой***.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная система (множество) векторов.

Упорядоченная система векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ называется ***базисом*** в Q, если:

а) $\overline{e}_i \in Q \;\; (i = 1, 2, ..., r)$;

б) система $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ линейно независима;

в) для любого вектора $\overline{x}$ из Q найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, такие, что

$$\overline{x} = \lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + ... + \lambda_r\overline{e}_r .$$

Последняя формула называется ***разложением*** вектора $\overline{x}$ по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, которые определяются однозначно, называются ***координатами*** вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$.

Всякая система векторов Q имеет хотя бы один базис. Если базисов несколько, то все они состоят из одинакового числа векторов, которое называется ***рангом*** системы векторов Q.

Если Q является линейным пространством, то число векторов в базисе называется ***размерностью*** линейного пространства.

В частности, размерность $\mathbb{R}^n$ равна n, а в качестве базиса можно взять следующую систему векторов:

$$\bar{e}_1 = (1,0,...,0),\ \ \bar{e}_2 = (0,1,...,0),\ \ ...,\ \ \bar{e}_n = (0,0,...,1).$$

Теорема о базисном миноре. Ранг матрицы равен рангу системы ее столбцов (строк), при этом столбцы и строки, содержащие элементы базисного минора, образуют базис в системе столбцов (строк) этой матрицы.

Замечание. Элементарные преобразования строк матрицы не изменяют линейных соотношений между ее столбцами.

Итак, ранг системы векторов равен рангу матрицы, столбцами которой являются данные векторы. А базис состоит из векторов, которые соответствуют столбцам, содержащим элементы какого-нибудь базисного минора.

ПРИМЕР 1. Исследовать линейную зависимость системы арифметических векторов

$$\bar{x}_1 = (1,4,3),\ \ \bar{x}_2 = (3,-3,-1),\ \ \bar{x}_3 = (2,3,2)\,.$$

Решение. Составим матрицу, столбцами которой являются заданные векторы, и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-4I \\ III-3I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & -10 & -4 \end{pmatrix} \overset{3III-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы равен трем. Следовательно, ранг системы векторов тоже равен трем, таким образом, заданные векторы (их всего три) линейно независимы и образуют базис.■

ПРИМЕР 2. Найти ранг и какой-нибудь базис системы арифметических векторов

$$\overline{x}_1=(2,1,1),\ \ \overline{x}_2=(-1,1,-5),\ \ \overline{x}_3=(5,3,1),\ \ \overline{x}_4=(6,5,-3).$$

Решение. Составим матрицу, столбцами которой являются данные векторы, и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{I\leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2I \\ III-I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-2II \\ II/(-3)}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен двум, следовательно, ранг системы векторов тоже равен двум.

Рассмотрим последнюю матрицу. Минор $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ является базисным. По теореме о базисном миноре первый и второй столбцы, содержащие элементы базисного минора, образуют базис в системе столбцов матрицы, а третий и четвертый столбцы линейным образом выражаются через базисные. Очевидно, третий столбец равен сумме первого столбца, умноженного на 8/3, и второго столбца, умноженного на 1/3 $\left(III=\frac{8}{3}I+\frac{1}{3}II\right)$, а четвертый столбец является суммой первого, умноженного на 11/3, и второго, умноженного на 4/3 $\left(IV=\frac{11}{3}I+\frac{4}{3}II\right)$. Поскольку при элементарных преобразованиях строк линейные соотношения между столбцами не изменяются, то для столбцов исходной матрицы выполняются те же самые соотношения, то есть арифметические векторы $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$,

соответствующие первому и второму столбцам, образуют базис в заданной системе векторов, а $\overline{x}_3 = \frac{8}{3}\overline{x}_1 + \frac{1}{3}\overline{x}_2$, $\overline{x}_4 = \frac{11}{3}\overline{x}_1 + \frac{4}{3}\overline{x}_2$.

Если рассмотреть другой базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 8/3 \\ 1 & 1/3 \end{vmatrix} \neq 0$, то получим еще один базис, состоящий из векторов $\overline{x}_2$ и $\overline{x}_3$.■

Задачи

1. Исследовать линейную зависимость системы арифметических векторов

$$\overline{x}_1 = (1,-1,2,1),\ \ \overline{x}_2 = (0,1,-1,2),\ \ \overline{x}_3 = (1,1,0,-1),\ \ \overline{x}_4 = (2,1,1,3)\,?$$

2. Найти ранг и все базисы системы арифметических векторов

$$\overline{x}_1 = (-1,1,2,-2),\ \ \overline{x}_2 = (-3,0,-1,0),\ \ \overline{x}_3 = (0,-1,1,2),\ \ \overline{x}_4 = (-1,0,1,0)\,.$$

Задания для самостоятельной работы

5.1. Исследовать линейную зависимость следующих систем векторов:

а) $\overline{x}_1 = (1,3,0,-1),\ \ \overline{x}_2 = (2,0,1,1),\ \ \overline{x}_3 = (1,1,1,0),\ \ \overline{x}_4 = (4,4,2,0)$;

б) $\overline{x}_1 = (2,3,-4),\ \ \overline{x}_2 = (1,-3,2),\ \ \overline{x}_3 = (3,1,5)$.

5.2. Найти ранг и все базисы систем арифметических векторов:

а) $\overline{x}_1 = (1,0,1,-2),\ \ \overline{x}_2 = (3,1,2,0),\ \ \overline{x}_3 = (2,1,1,2),\ \ \overline{x}_4 = (1,1,0,4)$;

б) $\overline{x}_1 = (1,i,-1,-i,1),\ \ \overline{x}_2 = (1,-i,-1,i,1),\ \ \overline{x}_3 = (1,-1,1,-1,1),$

$\overline{x}_4 = (3,-1,-1,-1,3)$.

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (такие системы называют квадратными)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ – коэффициенты при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые нужно найти, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – свободные члены.

Систему можно записать в матричном виде

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A, состоящая из коэффициентов при неизвестных, называется ***матрицей системы***, X – ***столбцом неизвестных***, а B – ***столбцом свободных членов***.

Совокупность чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ является ***решением системы***, если при подстановке их в каждое уравнение системы получатся тождества.

Поскольку матрица A – квадратная, то ей соответствует определитель.

Если матрица системы A невырожденная, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по ***формулам Крамера***

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой ее k-го столбца столбцом свободных членов.

Это же решение можно найти другим способом. Так как матрица A невырожденная, то она имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножив обе части матричного уравнения $AX = B$ слева на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1}B.$$

ПРИМЕР 1. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3, \\ 3x_1 + \ \ x_2 = 1. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

<u>Первый способ.</u> Так как $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Заменим в Δ первый столбец столбцом свободных членов, тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Заменив в Δ второй столбец столбцом свободных членов, имеем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{-5} = -2.$$

Второй способ. Так как $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Полученное решение совпадает с решением, найденным по формулам Крамера. Подставив $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ во все уравнения системы, убеждаемся в правильности нашего решения.■

ПРИМЕР 2. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

Решение. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеем единственное решение.

Первый способ. Найдем решение по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Поскольку

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 14 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -9,$$

то

$$x_1 = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{15}{-3} = -5, \quad x_3 = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Второй способ. Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденные значения в каждое уравнение системы, убеждаемся, что $X = (2, \quad -5, \quad 3)^T$ является решением.■

Замечание. Правило Крамера имеет большое теоретическое значение. Ввиду громоздких вычислений на практике его обычно применяют только при решении квадратных систем с двумя или тремя неизвестными.

Задачи

1. Решить системы двумя способами:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$

Ответы: **1.** а) $X = (-3, \quad 1)^T$; б) $X = (1, \quad 2, \quad -3)^T$.

Задания для самостоятельной работы

6.1. Решить системы двумя способами:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 13, \\ 3x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 22, \\ 2x_2 + 7x_3 = -8. \end{cases}$

7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

Основные понятия

Рассмотрим произвольную систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В матричной форме система записывается так:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A – матрица системы, X – столбец неизвестных, а B – столбец свободных членов.

Если в системе $AX = B$ столбец свободных членов состоит из нулей (обозначение $B = 0$), то система называется ***однородной***, в противном случае, ***неоднородной***.

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если не имеет решений.

Система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение.

Если система имеет более одного решения, то она называется ***неопределенной***. В этом случае каждое решение называется ***частным***, а совокупность всех решений называется ***общим решением*** системы.

Элементарными преобразованиями системы являются следующие преобразования:

1) перестановка уравнений системы;

2) умножение уравнения на ненулевое число λ;

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на некоторое число λ.

Две системы называются ***эквивалентными***, если у них один и тот же набор неизвестных, и множества их решений совпадают. В частности, системы, полученные друг из друга с помощью элементарных преобразований, эквивалентны.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема (Кронекера-Капелли). 1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы, то есть

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}.$$

2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

ПРИМЕР 1. Установить, является ли совместной система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранги матриц A и $\bar{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-3I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \end{array}\right) \overset{III-II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Так как $\operatorname{rang} A = 2$, а $\operatorname{rang} \bar{A} = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система решений не имеет.■

Исследовать систему линейных алгебраических уравнений означает определить, совместна она или нет, а в случае совместности системы – найти множество ее решений.

Метод Гаусса

Для исследования системы линейных алгебраических уравнений применяют ***метод Гаусс***, состоящий в том, что с помощью элементарных преобразований заданная система приводится к системе более простого вида.

Любой системе можно поставить в соответствие расширенную матрицу. Расширенная матрица с помощью элементарных преобразований строк приводится к ступенчатому виду (заметим, что элементарные преобразования строк матрицы напрямую связаны с элементарными преобразованиями системы), причем можно сделать так, чтобы в каждой ненулевой строке ступенчатой матрицы первый ненулевой элемент был равен единице.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \cdots & \alpha_{1k_2} & \cdots & \alpha_{1k_r} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{2k_r} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где $\beta_{r+1} \neq 0$, то $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \bar{A}$. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

2. Если расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1,n} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = n$, и система имеет единственное решение. Чтобы получить это решение, выпишем систему, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}x_n = \beta_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения однозначно определяется x_n. Подставив найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, находим однозначно x_{n-1} и т.д. И, наконец, из первого уравнения определяем однозначно x_1.

3. Если расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \cdots & \alpha_{1k_2} & \cdots & \alpha_{1k_r} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{2k_r} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = r < n$, и система имеет бесконечно много решений.

Минор, составленный из элементов матрицы, расположенных в первых r строках и столбцах с номерами $1, k_2, ..., k_r$, является базисным. Неизвестные $x_1, x_{k_2}, ..., x_{k_r}$, соответствующие столбцам базисного минора, назовем ***базисными***, а остальные $n-r$ неизвестных назовем ***свободными***. Свободные неизвестные могут принимать произвольные значения $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} \underline{x_1} + ... + \alpha_{1k_2} x_{k_2} + ... + \alpha_{1k_r} x_{k_r} + ... + \alpha_{1n} x_n = \beta_1, \\ \underline{x_{k_2}} + ... + \alpha_{2k_r} x_{k_r} + ... + \alpha_{2n} x_n = \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underline{x_{k_r}} + ... + \alpha_{rn} x_n = \beta_r. \end{cases}$$

После подстановки вместо свободных неизвестных произвольных значений $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$ из последнего уравнения

системы определяем x_{k_r}. Подставляя x_{k_r} в предпоследнее уравнение, получим $x_{k_{r-1}}$ и так далее. Итак, общее решение системы выражается через $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$. Заметим, что каждому фиксированному набору значений свободных неизвестных соответствует единственное частное решение системы.

ПРИМЕР 2. С помощью метода Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-3I}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \overset{III-2II}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/3 & 5/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместна, так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2$, и имеет бесконечно много решений, так как $\operatorname{rang} A < 4$.

Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ (элементы этого минора стоят на пересечении первой и второй строк матрицы и первого и третьего столбцов). Неизвестные x_1, x_3, соответствующие столбцам базисного минора, являются базисными, тогда остальные неизвестные x_2, x_4 – свободные.

Пусть $x_2 = C_1, x_4 = C_2$. Тогда исходная система эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}C_1 - \frac{4}{3}C_2, \\ x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2. \end{cases}$$

Здесь свободные неизвестные перенесены в правые части уравнений системы.

Из последнего уравнения сразу находим $x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получаем $x_1 = \frac{7}{18} + \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2$.

Итак, общее решение системы имеет следующий вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} + \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{18}C_2 \\ C_1 \\ \frac{1}{6} - \frac{5}{6}C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/18 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1/18 \\ 0 \\ -5/6 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Замечание. Выбор базисных и свободных неизвестных не является однозначным. Он определяется выбором базисного минора. В последнем примере в качестве базисного можно было выбрать минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 5/6 \end{vmatrix}$, тогда базисными неизвестными были бы x_1, x_4, а свободными – x_2, x_3. В этом случае вид общего решения был бы другим.

ПРИМЕР 3. С помощью метода Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow IV}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-3I \\ III-2I \\ IV-2I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{II \leftrightarrow IV}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \overset{\substack{III-3II \\ IV-5II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместна, так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3$, и имеет единственное решение, так как ранг равен числу неизвестных. Все неизвестные – базисные.

Полученной расширенной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 5, \\ \qquad\qquad x_3 = -1. \end{cases}$$

Из третьего уравнения сразу видим, что $x_3 = -1$. Из второго уравнения находим $x_2 = 2$. Из первого уравнения получаем $x_1 = 1$.

Итак, заданная система имеет единственное решение $X = (1, \quad 2, \quad -1)^T$.

Можно привести расширенную матрицу системы к более простому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{II+3III \\ I-2III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{I+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

тогда система, соответствующая полученной ступенчатой матрице имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

То есть решение заданной системы находится в правом столбце расширенной матрицы.■

Задачи

1. С помощью метода Гаусса решить системы:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$ г). $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения:

1. Доказать, что система n линейных алгебраических уравнений с $n-1$ неизвестными совместна тогда и только тогда, когда определитель расширенной матрицы равен нулю.

2. Существует ли такая система линейных уравнений, что $(1,\ \ 2,\ \ 3)^T$ является ее решением, а $(-1,\ \ -2,\ \ -3)^T$ – нет? Если существует, то что можно сказать об этой системе?

3. Доказать, что если система $\begin{cases} ay+bx=c, \\ cx+az=b, \\ bz+cy=a. \end{cases}$ имеет единственное решение, то $abc\neq 0$.

Задачи:

7.1. С помощью метода Гаусса решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0, \\ 7x_1+6x_2+5x_3=4, \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3 \qquad -3x_5=1, \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+\ \ x_5=0, \\ x_1+3x_2+\ \ x_3-2x_4-9x_5=3. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x_1+\qquad\quad x_3+2x_4=1, \\ \qquad -x_2+\ \ x_3+2x_4=2, \\ 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=3, \\ 4x_1-3x_2-\ \ x_3-2x_4=-5. \end{cases}$

8. ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Однородные системы

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$AX = 0.$$

Очевидно, что любая однородная система имеет, по крайней мере, нулевое решение $X = (0, \ 0, \ \ldots \ 0)^T$, то есть однородные системы всегда совместны, при этом возможны два случая:

1) если $\operatorname{rang} A = n$, где n – число неизвестных, то система имеет только тривиальное (нулевое) решение;

2) если $\operatorname{rang} A < n$, то система имеет ненулевые решения.

Множество всех решений однородной системы является линейным пространством, размерность которого равна $n-r$, где r – ранг матрицы A. Любой базис пространства решений однородной системы называется ***фундаментальной системой решений*** однородной системы и состоит из $n-r$ линейно независимых частных решений системы.

Фундаментальную систему решений (ФСР) обычно обозначают $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$, тогда общее решение однородной системы $X_{\text{оо}}$ имеет следующую структуру:

$$X_{\text{оо}} = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_{n-r} E_{n-r},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Укажем способ нахождения фундаментальной системы решений. Поскольку ФСР состоит из частных решений системы, а частные решения получаются, если свободным неизвестным придавать конкретные значения, то поступим следующим образом:

будем свободным неизвестным придавать поочередно значение равное единице, приравнивая при этом остальные свободные неизвестные нулю. Например, если первой свободной неизвестной придать значение 1, а остальные свободные неизвестные приравнять нулю, то соответствующее частное решение и есть E_1. Если вторая свободная неизвестная равна единице, а все остальные свободные неизвестные равны нулю, то получается E_2, и так далее. Такой способ гарантирует линейную независимость найденных частных решений $E_1, E_2, ..., E_{n-r}$.

ПРИМЕР 1. Решить однородную систему и указать ФСР:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2I \\ III-3I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{III+2II}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{III/9}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Выберем в качестве базисного минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда базисными являются неизвестные x_1, x_4, x_5, соответствующие столбцам этого минора, а x_2 и x_3 – свободные неизвестные.

Полученной расширенной матрице соответствует система (все свободные неизвестные перенесены в правые части уравнений)

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - \ \ x_5 = -2x_2 + x_3, \\ \qquad x_4 + 4x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_5 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух частных решений E_1 и E_2, так как $n-r=5-3=2$. Чтобы найти E_1, придадим свободным неизвестным значения 1 и 0 и, подставив их в последнюю систему, найдем значения базисных неизвестных (из третьего уравнения находим x_5, из второго – x_4, а из первого – x_1). Чтобы найти E_2, придадим свободным неизвестным значения 0 и 1 и найдем соответствующие значения базисных неизвестных x_5, x_4, x_1. Итак,

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = (-2, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0)^T,$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad E_2 = (1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0)^T.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X_{\text{оо}} = C_1E_1 + C_2E_2 = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Решить однородную систему и указать ФСР:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - x_4 + \ \ x_5 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 17 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II/(-9)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -17/9 & 7/9 & -1/9 & 0 \end{array}\right) \overset{I-4II}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5/9 & -1/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1 & -17/9 & 7/9 & -1/9 & 0 \end{array}\right).$$

Полученной расширенной матрице соответствует следующая система

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{9}x_3 + \dfrac{1}{9}x_4 - \dfrac{4}{9}x_5, \\ x_2 = \dfrac{17}{9}x_3 - \dfrac{7}{9}x_4 + \dfrac{1}{9}x_5, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные, x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные. Найдем фундаментальную систему решений:

$$x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = (-5/9, \quad 17/9, \quad 1, \quad 0, \quad 0)^T;$$

$$x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = (1/9, \quad -7/9, \quad 0, \quad 1, \quad 0)^T;$$

$$x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad E_3 = (-4/9, \quad 1/9, \quad 0, \quad 0, \quad 1)^T;$$

Итак, общее решение данной системы имеет вид

$$X_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{3} C_k E_k = C_1 \begin{pmatrix} -5/9 \\ 17/9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1/9 \\ -7/9 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -4/9 \\ 1/9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Неоднородные системы

Рассмотрим неоднородную систему $AX = B$ и соответствующую ей однородную систему $AX = 0$ (матрица A общая). Общее решение неоднородной системы $X_{\text{он}}$ равно сумме некоторого частного

решения неоднородной системы $X_{\text{чн}}$ и общего решения соответствующей однородной системы $X_{\text{оо}}$, то есть

$$X_{\text{он}} = X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}} = X_{\text{чн}} + C_1E_1 + ... + C_{n-r}E_{n-r}.$$

ПРИМЕР 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & 1 \end{array}\right) \overset{II/(-3)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 5/3 & -1/3 \end{array}\right) \overset{I-II}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & 5/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Пусть x_1, x_2 - базисные, а x_3, x_4 - свободные неизвестные. Тогда исходная система эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}x_4, \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}x_3 - \dfrac{5}{3}x_4. \end{cases}$$

Найдем ее частное решение, положив $x_3 = 0, x_4 = 0$:

$$X_{\text{чн}} = (4/3, \quad -1/3, \quad 0, \quad 0)^T.$$

Чтобы получить общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}x_4, \\ x_2 = \dfrac{4}{3}x_3 - \dfrac{5}{3}x_4, \end{cases}$$

найдем ее фундаментальную систему решений:

$$x_3 = 1, x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = (-1/3, \quad 4/3, \quad 1, \quad 0)^T,$$

$$x_3 = 0, x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad E_2 = (2/3, \quad -5/3, \quad 0, \quad 1)^T.$$

Итак, общее решение исходной системы имеет вид

$$X_{\text{он}} = X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Решить уравнение

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 1.$$

Решение. Дана система из одного уравнения. Очевидно, $r = 1$. Пусть x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 – свободные неизвестные. Тогда

$$x_1 = 1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6.$$

Найдем частное решение исходной (неоднородной) системы:

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{\text{чн}} = (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0)^T.$$

Чтобы найти общее решение соответствующей однородной системы

$$x_1 = 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6,$$

выпишем ФСР:

$$x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = (2, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0),$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = (3, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0),$$

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_3 = (-1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0),$$

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_4 = (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0),$$

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1 \quad \Rightarrow \quad E_5 = (-2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1).$$

Итак, общее решение исходной системы имеет вид

$$X_{\text{он}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + C_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + C_5\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.\blacksquare$$

Задачи

1.Решить однородные системы. Указать ФСР.

а) $\begin{cases}2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0,\\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0,\\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0.\end{cases}$

2. Решить неоднородные системы:

а) $\begin{cases}x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,\\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 1,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 = 4.\end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения:

1. Доказать, что любая линейная комбинация решений однородной системы тоже является решением.

2. При каких значениях параметра *a* система имеет нетривиальные решения?

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0,\\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.\end{cases}$$

3. Могут ли следующие арифметические векторы

$$X_1 = (1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5)^T,\ \ X_2 = (0,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 2)^T,$$

$$X_3 = (1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 3)^T$$

быть фундаментальной системой решений некоторой системы линейных алгебраических уравнений?

Задачи:

8.1. Решить однородные системы уравнений. Указать ФСР.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$

8.2. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

в) $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 1.$

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Тема: Матрицы и определители

Вариант 1

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти AB и BA (если это возможно), где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Дано: $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. Найти $\det C$ и C^{-1}.

Вариант 2

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти AB и BA (если это возможно), где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Дано: $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Найти $\det C$ и C^{-1}.

Тема: Системы линейных алгебраических уравнений

Вариант 1

1. С помощью метода Крамера и с помощью обратной матрицы решить систему уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

2. Решить однородную систему уравнений. Указать ФСР.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Решить неоднородную систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Вариант 2

1. С помощью метода Крамера и с помощью обратной матрицы решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Решить однородную систему уравнений. Указать ФСР.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

3. Решить неоднородную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 3. \end{cases}$$

Ответы

1.1. а) -11; б) -10; в) -12, г) $-4+4i$.

1.2. а) 12; б) $-10;2$; в) $(-\sqrt{23};\sqrt{23})$.

1.3. а) 100; б) 60; в) $2a-8b+c+5d$.

2.1. $\begin{pmatrix} 0 & -11 & -5 \\ 5 & -10 & -5 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$. **2.2.** а) $AB=(21), BA=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -20 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & -8 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -12 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & -24 & 12 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $AB=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 0 \\ -3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}$.

2.3. $AA^T=\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}, A^TA=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 1 \\ -5 & 13 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.4.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3.1. а) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/\lambda_4 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1/\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2. а) $\begin{pmatrix} 1/14 & -4/14 \\ -11/14 & 16/14 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.1. а) 2; б) 3. **4.2.** а) 2; б) 3. **5.1.** а) линейно зависимы; б) линейно независимы. **5.2.** а) 2; б) 3. **5.3.** 2.

6.1. а) $(2,\ \ -3)^T$; б) $(2,\ \ 0,\ \ -1)^T$; в) $(0,\ \ 3,\ \ -2)^T$.

Список рекомендуемой литературы

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Т.1. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 253с.

2. Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328с.

3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – СПб.: Лань, 2006. – 240с.

4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.

5. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Под редакцией Ефимова А.В. Ч.1. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 288с.

6. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика. (Решебник). – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 368с.

УДК 512
М17

Мельникова И.Н., Соболева Т.С., Фастовец Н.О.
М17 Методические рекомендации к практическим занятиям по высшей математике. Часть 1. Элементы линейной алгебры (Для факультета АиВТ) – М.: РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2013. – 66с.

Пособие предназначено для студентов, изучающих линейную алгебру в курсе высшей математики. В пособии содержится необходимый теоретический материал, примеры и задачи по темам: матрицы, определители, линейное пространство арифметических векторов, системы линейных алгебраических уравнений.

Пособие может использоваться студентами всех специальностей, изучающими линейную алгебру, а также магистрантами и аспирантами, которые занимаются исследованиями, связанными с применением математических методов. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

Профессор военной академии РВСН имени Петра Великого,
д.ф.-м.н. А.В. Чечкин
Доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа
имени И.М. Губкина, к.ф.-м.н. А.К. Тюлина

© Мельникова И.Н.,
Соболева Т.С.,
Фастовец Н.О., 2013

© Издательский центр РГУ нефти и газа
им. И.М. Губкина, 2013