Необходимое условие экстремума

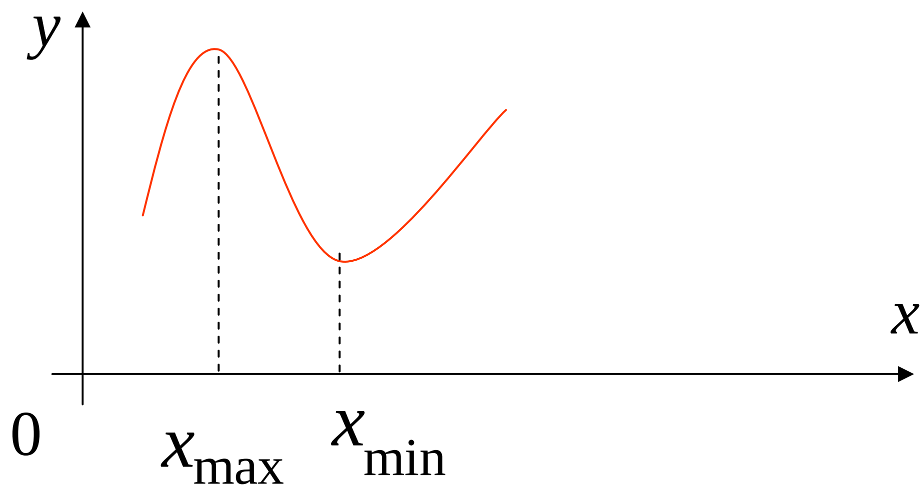
Теоремы о среднем значении дифференцируемых функций.Правило Лопиталя

Информация о текущей успеваемости

- http://cis.intranet.gubkin.ru/

Определение экстремума функции

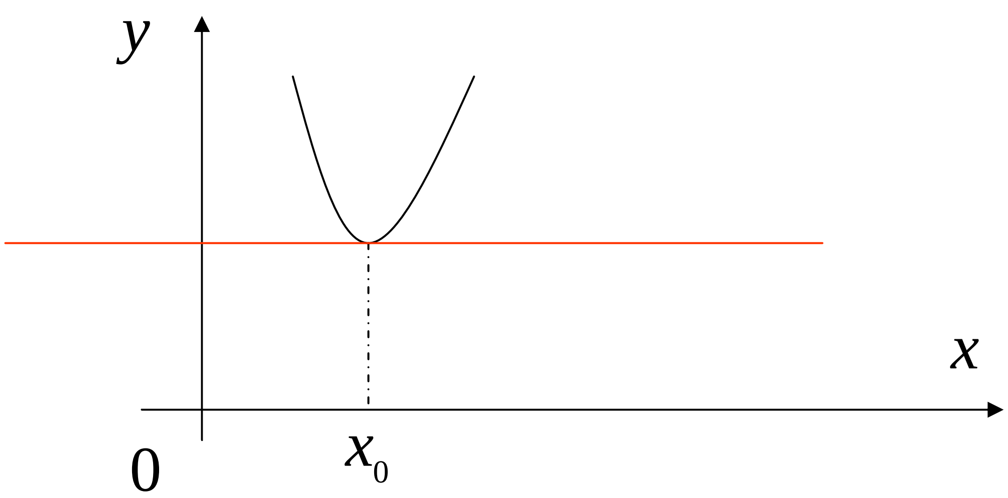
- Будем говорить, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если существует окрестность $U(x_0)$, в каждой точке которой выполняется неравенство $$f(x) \le f(x_0), \quad x \in U(x_0)$$ $$(f(x) \ge f(x_0), \quad x \in U(x_0)).$$



Необходимое условие экстремума

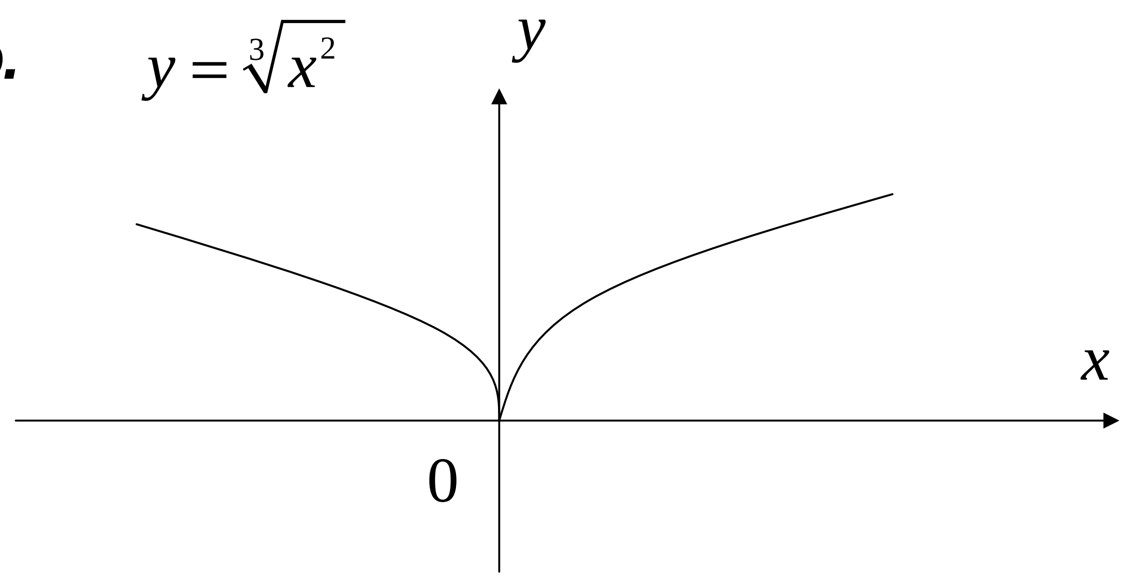
- Теорема 1 Ферма. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и достигает в этой точке экстремум, то

$$f'(x_0) = 0$$



Необходимое условие экстремума

- Теорема 2. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, определённой в окрестности точки x_0, то производная функции $f'(x_0)$ ***либо не существует*** **,** ***либо равна нулю*** $f'(x_0) = 0.$
- ***Пример.*** $y = \sqrt[3]{x^2}$

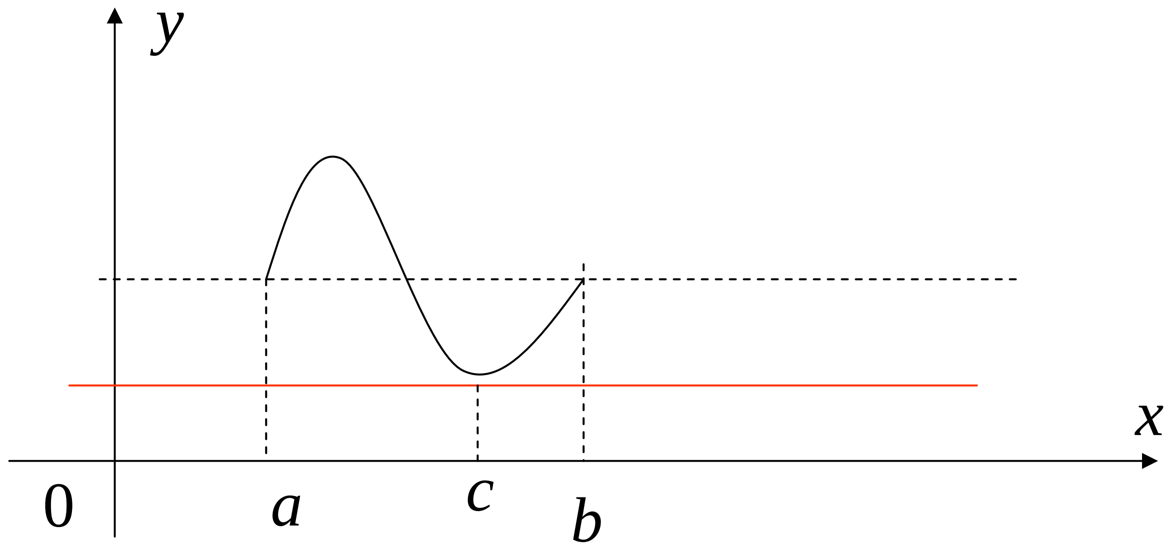


Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

- Пусть требуется найти ***наибольшее и наименьшее*** значения функции ***на отрезке*** $[a,b]$.
- Если функции непрерывны на отрезке $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса существуют точки, в которых достигаются эти значения. Точки наибольшего или наименьшего значения ***могут быть либо на концах отрезка, либо в точках, в которых производная равна нулю или не существует***.
- Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x + \cos x$ на отрезке $[0,\pi]$.

Теорема Ролля

- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b) , причём $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.



Теорема Коши

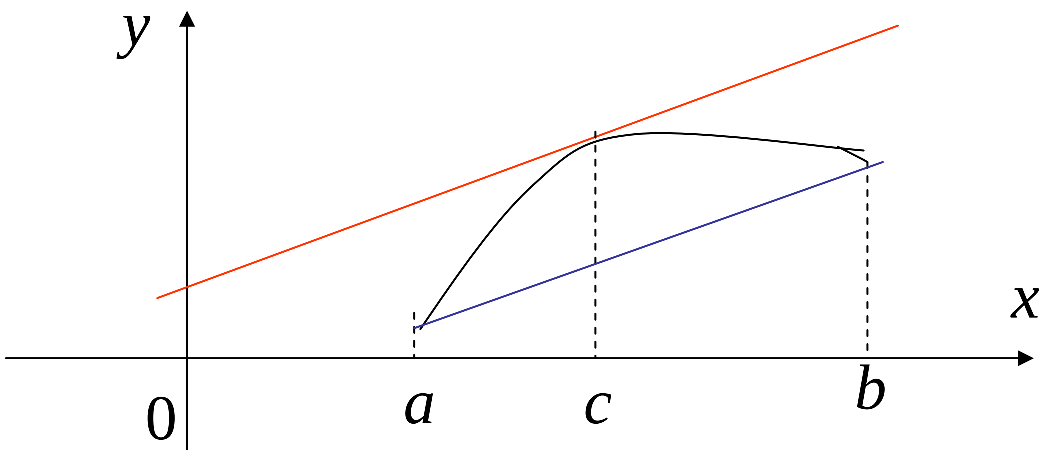
- Если функции $y = f(x),\ y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причём $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$ то существует точка такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Теорема Лагранжа

- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то существует точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Следствие.

- Если функция на интервале (a,b) имеет производную равную нулю, то она постоянна на этом интервале.

  Действительно, по теореме Лагранжа для любых точек $x_2 > x_1$ интервала (a,b) получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$$

Правило Лопиталя

- ***Теорема.*** Пусть функции $y = f(x), y = g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 , и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

- причём $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0 . Тогда, если существует предел отношения
- производных $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел
- отношения функций $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Правило Лопиталя. Случаи бесконечно удалённой точки и отношения бесконечно больших функций.

Следствие 1. Правило Лопиталя сохраняется , если функции $y = f(x), y = g(x)$ бесконечно большие при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Следствие 2.Правило Лопиталя сохраняется и при $x_0 = \infty$.

Сравнение роста степенной, показательной и логарифмической функций.

- По правилу Лопиталя доказываются следующие равенства

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0,\ \alpha>0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0,\quad \alpha>0,\ a>1.$$

- Из этих равенств следует, что на бесконечности степенная функция растёт быстрее логарифмической, а показательная быстрее степенной.

Неопределённости вида

$$0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, 0^{\infty}, \infty^{0}$$

- Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\varepsilon}\ln x, \varepsilon > 0.$
- Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$
- Пример 3 $\lim\limits_{x\to +0} x^{x}.$

.