Односторонние пределы. Классификация разрывов

Определение одностороннего предела

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, x_0) (соответственно на интервале (x_0, b)). Число А называется пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке x_0

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \; (A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x))$$

- если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x_0 - \delta < x < x_0$ (соответственно $x_0 < x < x_0 + \delta$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Обозначим $f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$)

Односторонние окрестности

- По аналогии с обычным пределом можно дать определение одностороннего предела с помощью односторонних проколотых окрестностей

$$\dot{U}_{\delta}(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0)$$

$$\dot{U}_{\delta}(x_0 + 0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

- Аналогичным образом определяются также односторонние бесконечные пределы

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$$

Предел при $x \to \pm\infty$

- Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x > M$ $(x < -M)$ для некоторого $M \geq 0$. .
- Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к $+\infty$ $(-\infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $L > 0$ такое, что для всех x таких, что $x > L$ $(x < -L)$ выполняется неравенство

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

Определение точки разрыва функции

- Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ кроме, быть может, самой точки x_0 .
- Если *функция не определена* в точке x_0 или *не является непрерывной в этой точке*, то точка x_0 называется точкой разрыва функции.
- Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ существует, но не равен значению функции в точке x_0

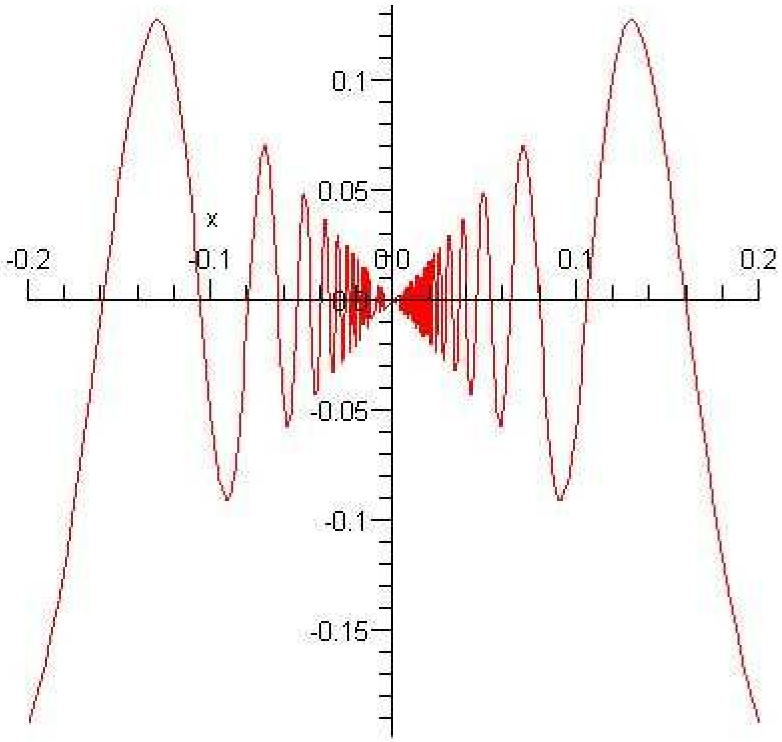
  Функцию, имеющую устранимый разрыв в точке x_0 , можно переопределить в этой точке, полагая

  $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и получить непрерывную функцию.

Пример устранимого разрыва

- Функция $y = x\sin\frac{1}{x}$ имеет устранимый разрыв в точке 0, так как функция не определена в этой точке и существует предел.

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

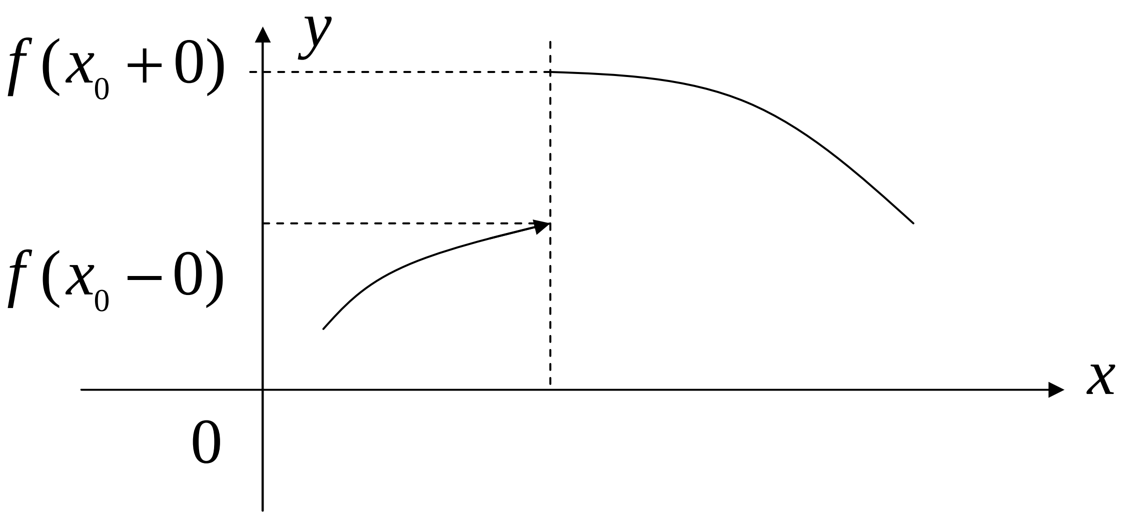


Разрыв первого рода

- Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* если существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

- и они не равны $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$

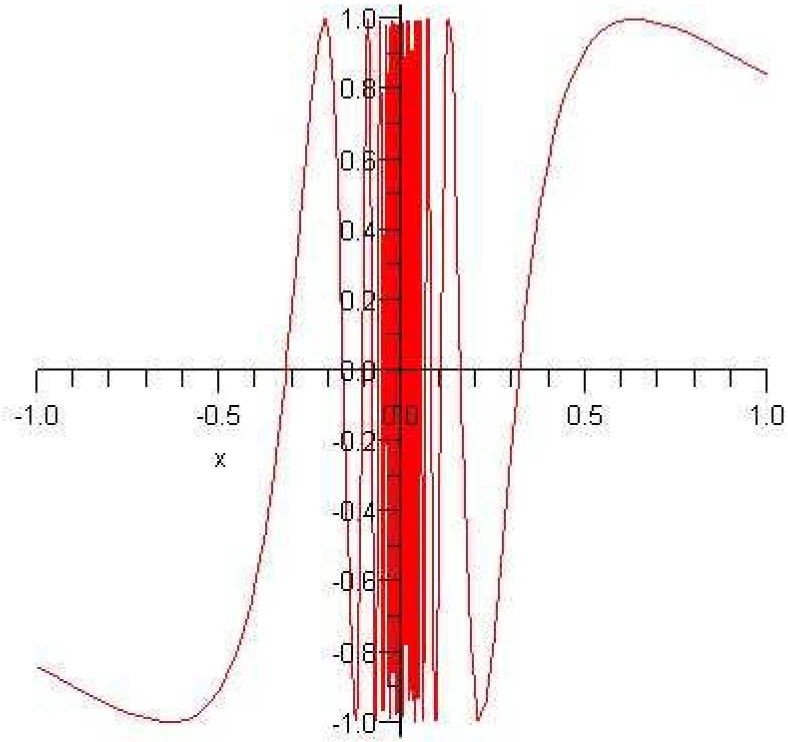


Разрыв второго рода

- Если в точке разрыва функция не имеет предел или не имеет хотя бы один односторонний предел, в том числе, когда хотя бы один односторонний предел бесконечен, называется *точкой разрыва второго рода.*
- Таким образом, *точка разрыва, которая не является точкой устранимого разрыва или разрыва первого рода*, называется *точкой разрыва второго рода.*
- Если хотя бы один односторонний предел бесконечен, то будем говорить также, что в точке *бесконечный разрыв*.

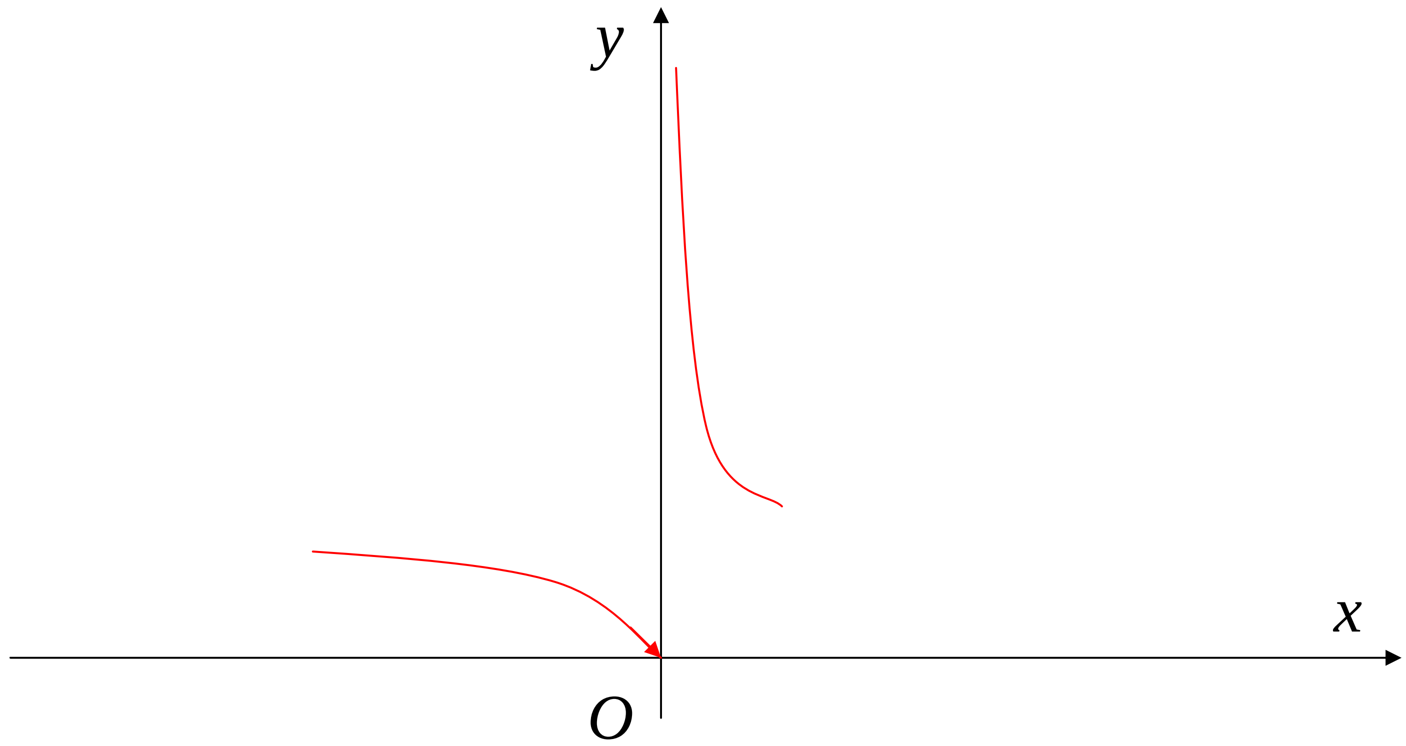
Пример разрыва второго рода

- Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода



Пример разрыва второго рода (бесконечного разрыва)

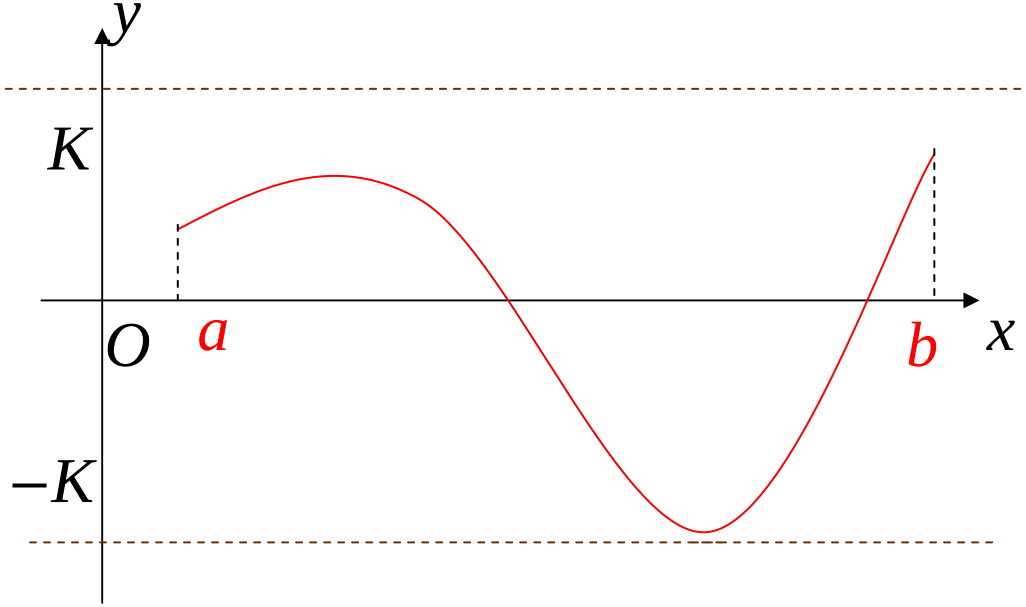
- Функция $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода (бесконечный разрыв)



Свойства функций непрерывных на отрезке

Теорема 1

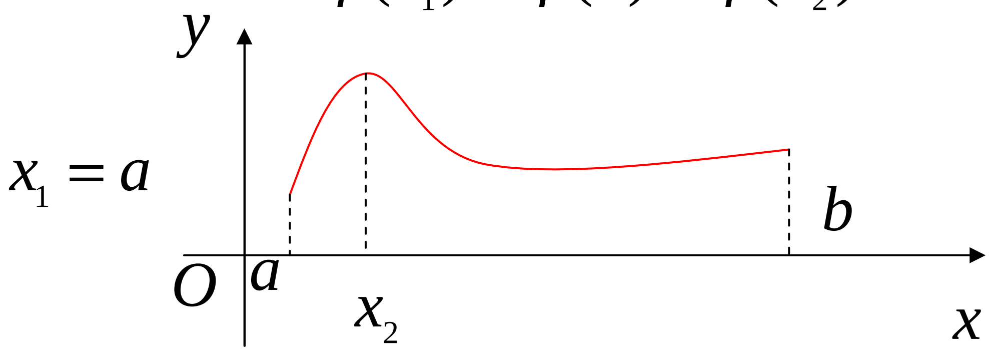
- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нём, т.е. существует число $K > 0$ такая, что $|f(x)| \leq K$ для всех точек x из отрезка $[a,b]$.



Теорема 2 (Вейерштрасса)

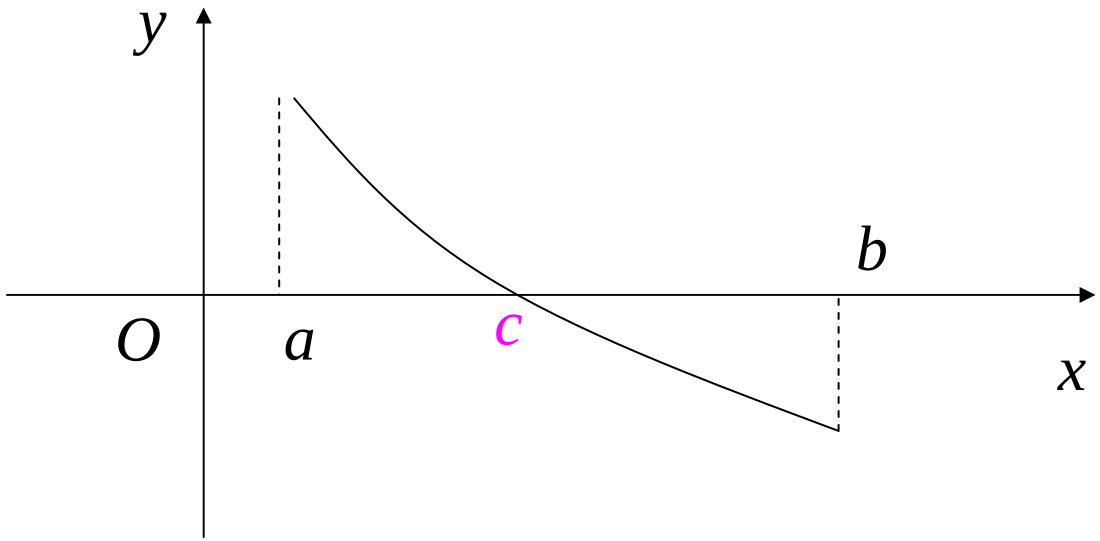
- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют точки x_1, x_2, принадлежащие отрезку $[a,b]$, такие, что для любых точек x из отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$



Теорема 3

- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка разные знаки, то существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ внутри отрезка такая, что $f(c) = 0$.
.



Теорема о промежуточном значении

- Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и M - наибольшее значение функции на отрезке , а m – наименьшее, то $y = f(x)$ принимает все значения функции из отрезка $[m, M]$.

Пример

- Найти интервал, содержащий корень уравнения

$$e^x + x - 2 = 0.$$