

Министерство образования Российской Федерации

**Российский государственный университет
нефти и газа имени И.М. Губкина**

В.И. Иванов С.И. Васин

Методические указания к изучению темы

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

(для студентов всех специальностей)

Москва 2010



Введение

Исследование функций является основополагающей частью математического анализа. По данному разделу студенты самостоятельно выполняют расчетно-графическую работу, помочь им в этом и призваны настоящие методические указания.

Для удобства записи в дальнейшем будем использовать некоторые знаки математической логики. Приведем их:

\Rightarrow	–	следует	\forall	–	любое
\exists	–	существует	$:$	–	такое, что
\nexists	–	не существует	U_a^δ	–	δ окрестность точки a

Порядок полного исследования функции

I. Исследование функции без производной.

1. Нахождение области определения функции (ООФ) функции.
2. Исследование функции на симметричность (четность и нечетность).
3. Определение периодичности.
4. Нахождение точек пересечения с осями и определение интервалов знакопостоянства функции.
5. Исследование на непрерывность. Классификация точек разрыва.
6. Определение асимптот функции. Вычисление вертикальных и наклонных асимптот.

II. Исследование с помощью первой производной.

1. Вычисление первой производной.
2. Нахождение критических точек первого рода.
3. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
4. Нахождение точек экстремума.

III. Исследование с помощью второй производной

1. Вычисление второй производной.
2. Нахождение критических точек второго рода.
3. Определение интервалов выпуклости вогнутости функции.
4. Нахождение точек перегиба.

IV. Построение графика функции по исследованию и характерным точкам

Подробно рассмотрим каждый из пунктов приведенной схемы.

Исследование функции без производной

1. Нахождение области допустимых значений (ОДЗ) функции.

Определение: Областью определения (ОДЗ) функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x , для которых существуют соответствующие значения y .

Для нахождения области определения элементарной функции необходимо рассмотреть условие существования каждой основной элементарной функции, входящей в данную функцию. Общим ОДЗ будет пересечение всех частных ОДЗ.

Если функция составная (т.е. состоит из нескольких элементарных функций, каждая из которых определена на своем интервале), то нужно на каждом интервале определить ОДЗ для соответствующей функции, а после взять объединение полученных частных ОДЗ. В других случаях необходимо исходить из определения функции.

∞ **Пример 1.** Найти ОДЗ функции $y = \frac{\sqrt{6-3x}}{\ln x^2}$.

Решение: Рассмотрим все основные элементарные функции, входящие в данную функцию.

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{u}: u \geq 0 \\ 2) \frac{1}{v}: v \neq 0 \\ 3) \ln w: w > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 6-3x \geq 0 \\ \ln x^2 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Следовательно, областью определения будет объединение интервалов:

$$(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

∞ **Пример 1.** Найти ОДЗ составной функции $y = \begin{cases} x^2, & x < -3 \\ \operatorname{ctg} x, & -3 \leq x < 1. \\ \arccos x/2, & x > 1 \end{cases}$

Решение: На каждом из интервалов, где заданы функции, определим условия их существования:

- | | | |
|--------------------|---|-----------------------|
| 1) $(-\infty; -3)$ | x^2 : ограничений нет | $(-\infty; -3)$ |
| 2) $[-3; 1)$ | $\operatorname{ctg} x$: $x \neq 0$ | $[-3; 0) \cup (0; 1)$ |
| 3) $(1; +\infty)$ | $\arccos x/2$: $\begin{cases} -1 \leq x/2 \leq 1 \\ x > 1 \end{cases}$ | $(1; 2]$ |

Объединив все полученные интервалы, получим ОДЗ исходной функции:
 $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2]$

2. Исследование функции на симметричность (четность и нечетность).

Определение: Функция называется четной, если для $\forall x \in \text{ОДЗ}$ $f(-x) = f(x)$.

Функция называется нечетной, если для $\forall x \in \text{ОДЗ}$ $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Ox , нечетной относительно начала отсчета. Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, называются общего вида.

Например, функция $y = \sqrt[6]{x^2 + 1}$ - четная, т.к. для всех x

$y(-x) = \sqrt[6]{(-x)^2 + 1} = \sqrt[6]{x^2 + 1} = y(x)$. График приведен на рис. 1.

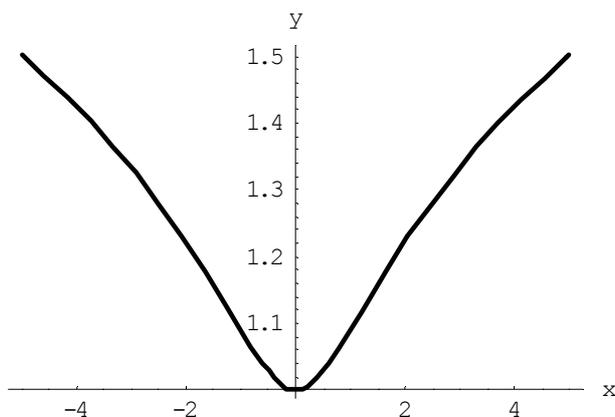


Рис. 1

Функция $y = \sqrt[5]{16x}$ является нечетной, т.к. для всех x
 $y(-x) = \sqrt[5]{16(-x)} = \sqrt[5]{16x} = -y(x)$. График приведен на рис. 2.

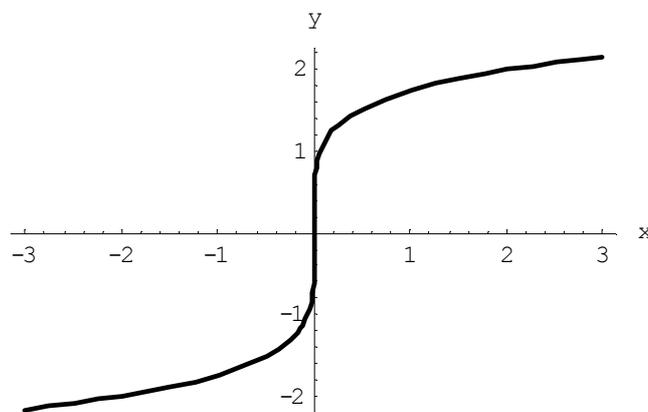


Рис. 2

3. Определение периодичности.

Отметим, что из элементарных функций периодическими являются только тригонометрические, и в случае периодичности достаточно исследовать функцию на периоде, а после дублировать ее.

4. Нахождение точек пересечения с осями и определение интервалов знакопостоянства функции.

Точка $H(0; y(0))$ является точкой пересечения с осью Oy . А для нахождения точек пересечения с осью Ox необходимо решить уравнение $y(x) = 0$ (т.е. найти нули функции). Нули функции делят ОДЗ на интервалы знакопостоянства функции, а знак определяется путем подстановки любого числа из рассматриваемого интервала.

5. Исследование на непрерывность. Классификация точек разрыва.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Определение: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна справа в точке $x = a$ и слева в точке $x = b$.

Определение: Точка $x = x_d$ называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности этой точки, но не выполняется условие непрерывности в данной точке.

Теорема. Любая элементарная функция непрерывна там, где она существует (т.е. на ОДЗ).

В случае элементарных функций будем иметь достаточно простой алгоритм исследования функции на непрерывность и нахождения точек разрыва: точки разрыва могут быть только в граничных точках области определения функции, причем в тех точках, где функция не существует. А в случае составных функций подозрительными являются также и точки стыковок ее элементарных частей. В этих точках необходимо вычислить односторонние пределы для выяснения наличия разрыва и определения его типа.

Определение: Точка разрыва $x = x_d$ является точкой разрыва I рода, если односторонние пределы в двойном равенстве (1) существуют и конечны, причем устранимой точкой разрыва, если они равны между собой, и неустранимой, если различны. Точка разрыва $x = x_d$ является точкой

разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

☞ **Пример 2.** Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{x^2 - 2x}$.

Решение: Найдем ОДЗ функции, являющейся элементарной:

$$x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

Точки $x = 0$, $x = 2$ являются граничными точками ОДЗ, в них не существует функция, следовательно, они являются точками разрыва. Вычислим односторонние пределы от функции в каждой из этих точек.

$x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x - 2} = 1 \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x - 2} = 1 \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Односторонние пределы конечны и равны между собой, значит, $x = 0$ - точка разрыва I рода, устранимая. Это означает, что, видоизменив функцию в одной точке (в данном случае доопределив ее в точке $x = 0$), получим непрерывную

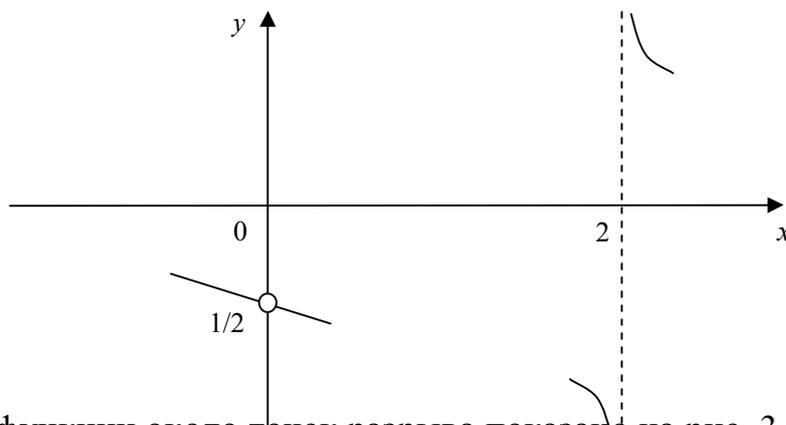
функцию. Функция $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^2 - 2x}, & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ является непрерывной функцией.

$x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{\sin x}{x^2 - 2x} = \left[\frac{\sin 2}{-0} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{\sin x}{x^2 - 2x} = \left[\frac{\sin 2}{+0} \right] = +\infty$$

Пределы бесконечны, следовательно. $x = 2$ точка разрыва II рода.



Поведение функции около точек разрыва показано на рис. 3.

Рис. 3

∞ **Пример 3.** Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x \leq 0. \\ \cos 1/x, & x > 0 \end{cases}$$

Решение: Областью определения будет вся числовая ось, т.к. все элементарные функции, составляющие исходную функцию, определены там, где они заданы. А интервалы полностью покрывают числовую ось. Подозрительными на разрыв будут точки стыковки $x = -1$; $x = 0$. Исследуем их.

$$x = -1:$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x + 2) = 1; \quad y(-1) = -1 + 2 = 1$$

Функция в данной точке непрерывна, т.к. выполнено условие непрерывности

(1).

$x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x + 2) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos \frac{1}{x} = \left[\cos \frac{1}{0} \right] = [\cos(+\infty)] - \nexists$$

Т.к. предел справа не существует, точка $x = 0$ является точкой разрыва II рода (Рис.4).

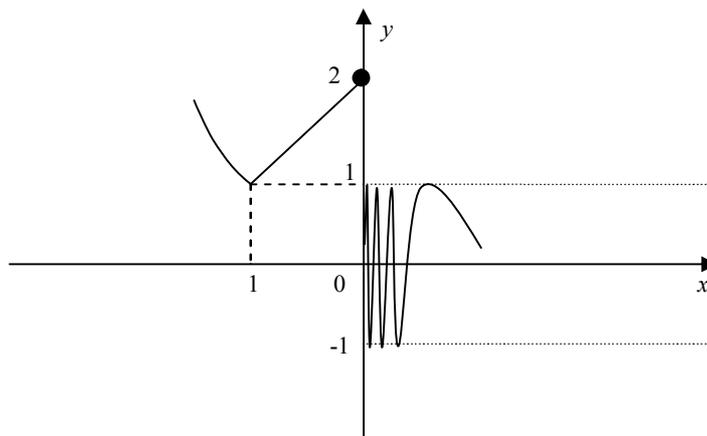


Рис. 4

6. Определение асимптот функции. Вычисление вертикальных и наклонных асимптот.

Определение: Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка на графике функции при ее удалении в бесконечность.

По способу вычисления и форме представления асимптоты подразделяются на вертикальные и наклонные. Частным случаем наклонных асимптот являются горизонтальные.

Из определения следует, что прямая $x = x_v$ является вертикальной асимптотой функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов при стремлении переменной x к x_v стремится к бесконечности:

$\lim_{x \rightarrow x_v^-} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_v^+} f(x) = \infty$. Значит, вертикальные асимптоты могут проходить только через точки разрыва второго рода, поэтому порядок нахождения вертикальных асимптот идентичен алгоритму поиска точек разрыва: находим ОДЗ, вычисляем в граничных точках ОДЗ односторонние пределы, и в зависимости от них делаем выводы.

∞ **Пример 4.** Найти вертикальные асимптоты функции $y = \frac{1}{\ln x^2}$.

Решение: Вычислим область определения функции:

$$\begin{cases} \ln x^2 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Граничными точками ОДЗ являются $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$. Вычислим односторонние пределы в этих точках.

$x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{\ln x^2} = \left[\frac{1}{\ln 1} \right] = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{\ln x^2} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty$$

Следовательно, точка $x = -1$ является точкой разрыва II рода и прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой функции.

$x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{\ln x^2} = \left[\frac{1}{\ln 0} \right] = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x^2} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0$$

Значит, точка $x = 0$ является устранимой точкой разрыва I рода, и здесь нет вертикальной асимптоты.

$x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\ln x^2} = \left[\frac{1}{\ln 1} \right] = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\ln x^2} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва II рода и прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции (Рис. 5).

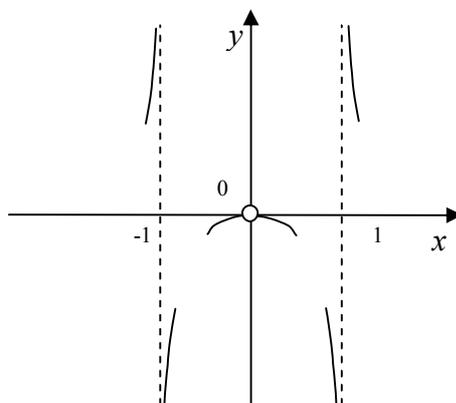


Рис. 5

Если существует наклонная асимптота, то ее можно задать с помощью уравнения $y = kx + b$, при этом, если точка на графике функции удаляется в бесконечность, то значение переменной x должно стремиться либо к $+\infty$ либо к $-\infty$. В зависимости от знака бесконечности получим либо правую, либо левую наклонные асимптоты. Параметры k и b вычисляются отдельно для правой и левой асимптот по следующим формулам:

$$x \rightarrow -\infty :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = k_-;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_- \cdot x) = b_-.$$

$$x \rightarrow +\infty :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = k_+;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_+ \cdot x) = b_+.$$

Асимптота будет существовать только при конечных предельных значениях k и b . Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота, которая получается при равенстве нулю углового коэффициента.

∞ **Пример 5.** Найти наклонные асимптоты функции $y = \sqrt{x^2 + 4x + 8}$.

Решение: Вычислим область определения функции:

$$x^2 + 4x + 8 \geq 0; \quad D = 16 - 4 \cdot 8 < 0 \Rightarrow x \in R.$$

Т.к. рассматриваемая функция элементарная и определена на всей числовой оси, это значит, что нет точек разрыва, следовательно, нет и вертикальных асимптот.

Определим наклонные асимптоты:

$x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}{x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + 4/x + 8/x^2 \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + 4/x + 8/x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + 4/x + 8/x^2} = 1 = k_+; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 8} - x \right) &= \left[\infty - \infty \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 8 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 8} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(4 + 8/x)}{x(\sqrt{1 + 4/x + 8/x^2} + 1)} = 2 = b_+. \end{aligned}$$

Таким образом, получим уравнение правой асимптоты: $y = x + 2$.

Аналогично вычислим левую асимптоту.

$x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}{x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + 4/x + 8/x^2 \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + 4/x + 8/x^2}}{x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + 4/x + 8/x^2} = -1 = k_-; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 8} + x \right) &= \left[\infty - \infty \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 8 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 8} - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 + 8/x)}{\left(|x| \sqrt{1 + 4/x + 8/x^2} - x \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 + 8/x)}{-x(\sqrt{1 + 4/x + 8/x^2} + 1)} = -2 = b_-. \end{aligned}$$

Уравнение левой асимптоты: $y = -x - 2$.

На Рис. 6 приведено поведение графика около асимптот. Конечно, надо учесть, что исчерпывающую информацию о поведении функции около асимптот можно получить только после полного исследования функции.

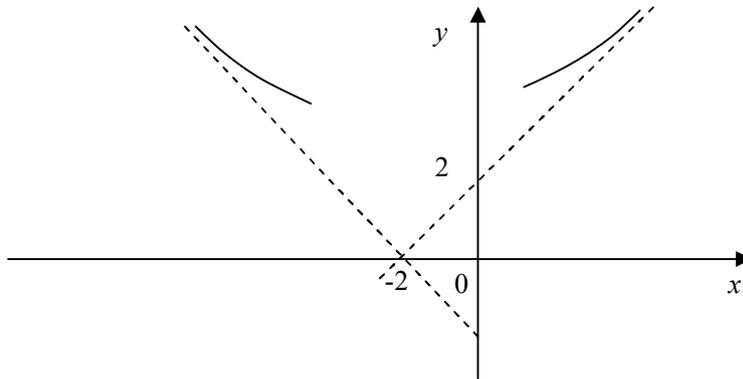


Рис. 6

Исследование функции с помощью первой производной

Приведем основные теоремы, необходимые для исследования функции.

Определение: Точка $x = x_m$ называется точкой локального минимума функции $y = f(x)$, если существует некоторая окрестность этой точки, где функция определена, и для любой точки x из этого интервала значение функции больше чем значение функции в точке x_m . А точка $x = x_M$ является точкой локального максимума, если $\exists U_{x_M} : \forall x \in U_{x_M} f(x) < f(x_M)$. Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Определение: Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a; b)$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Наоборот, убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Теорема. Если производная функции $y = f(x)$ положительна на интервале $(a; b)$, то функция возрастает на этом интервале, если отрицательна, то убывает.

Определение: Точка $x = x_c$ называется критической точкой первого рода для функции $y = f(x)$, если в этой точке производная либо равна 0 либо не существует, а функция непрерывна. Критические точки первого рода являются точками, подозрительными на экстремум.

Теорема (достаточное условие существования экстремума). Критическая точка первого рода является точкой экстремума, если при переходе через нее производная меняет знак, причем, точкой максимума, если с «+» на «-», и минимума, если с «-» на «+».

Следовательно, для нахождения интервалов возрастания и убывания, и точек экстремума необходимо знать ОДЗ, найти точки разрыва, определить критические точки первого рода. Критические точки первого рода и точки разрыва делят ОДЗ на интервалы знакопостоянства производной функции. Определив знак производной на полученных интервалах, можно сделать выводы о точках экстремума и интервалах возрастания и убывания.

Определение: Критическая точка первого рода является точкой излома функции $y = f(x)$, если в этой точке производная терпит разрыв (за исключением случая бесконечных односторонних производных одного знака).

✎ **Пример 6.** Исследовать с помощью первой производной функцию

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}.$$

Решение: Областью определения данной элементарной функции является вся числовая ось, т.к. кубический корень не требует никаких ограничений: $x \in \mathbb{R}$. Вычислим производную:

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 4}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 4}{\sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}} = 0 \Rightarrow x = 2 \in \text{ОДЗ}, \quad \text{следовательно, точка } x = 2 \quad - \quad -$$

критическая.

Найдем точки, где производная не существует:

$$\exists y': \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}. \text{ Эти точки принадлежат ОДЗ, значит, они}$$

являются критическими точками первого рода.

Здесь учтено, функция в этих точках непрерывна, т.к. она элементарна и определена в них. Нанесем на числовую ось ОДЗ, критические точки первого рода, определим знак производной на получившихся интервалах (Рис 7).

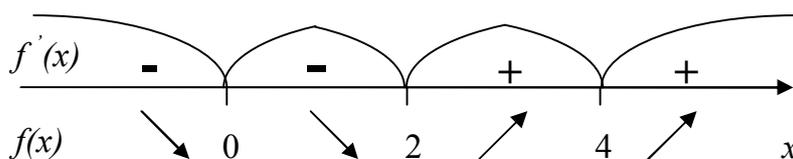


Рис. 7

Точки $x = 0$, $x = 4$ не являются точками экстремума, т.к. в них производная не меняет знака. А точка $x = 2$ есть точка минимума, потому что в ней убывающая часть графика сменяется возрастающей. Для завершения исследования вычислим значение функции в точке минимума: $y(2) = \sqrt[3]{2^2 - 4 \cdot 2} = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$. График функции приведен на рис. 8.

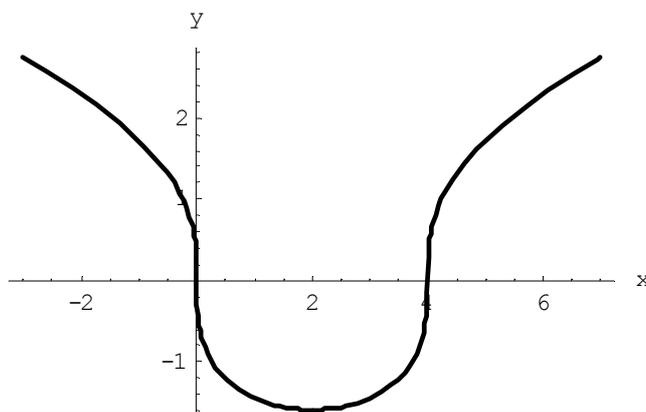


Рис. 8

☞ **Пример 7.** Исследовать с помощью первой производной функцию

$$y = \begin{cases} -6x - x^2 - 8, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \leq x < 0. \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Решение: Областью определения данной элементарной функции является вся числовая ось, т.к. все функции определены там, где они заданы, а интервалы полностью перекрывают всю числовую ось: $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию на непрерывность, подозрительными являются точки стыковки $x = -2$, $x = 0$.

$$x = -2:$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (-6x - x^2 - 8) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x + 2) = 0; \quad y(-2) = 0$$

В этой точке функция непрерывна.

$$x = 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x + 2) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$$

Односторонние пределы конечны, но различны, следовательно, $x = 0$ - неустранимая точка разрыва первого рода.

$$\text{Вычислим производную: } y' = \begin{cases} -6 - 2x, & x < -2 \\ 1, & -2 \leq x < 0 \\ 1/2\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Определим критические точки первого порядка:

$$y' = 0: -6 - 2x = 0 \Rightarrow x = -3;$$

$$\cancel{y'}: x = -2; x = 0.$$

Но точка $x = 0$ является точкой разрыва, значит, критическими точками первого рода являются точки $x = -3$, $x = -2$. Нанесем на числовую ось ОДЗ и критические точки и точки разрыва (Рис. 9) и определим знак производной на каждом из интервалов.

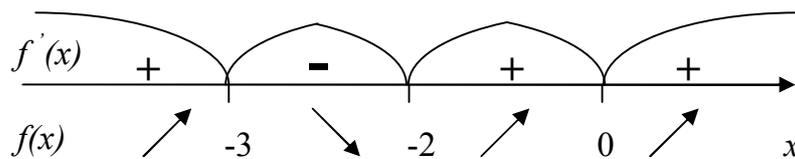


Рис. 9

Точка $x = -3$ является точкой локального максимума, а точка $x = -2$ - локального минимума. $y(-3) = 1$; $y(-2) = 0$.

График функции приведен на рис. 10.

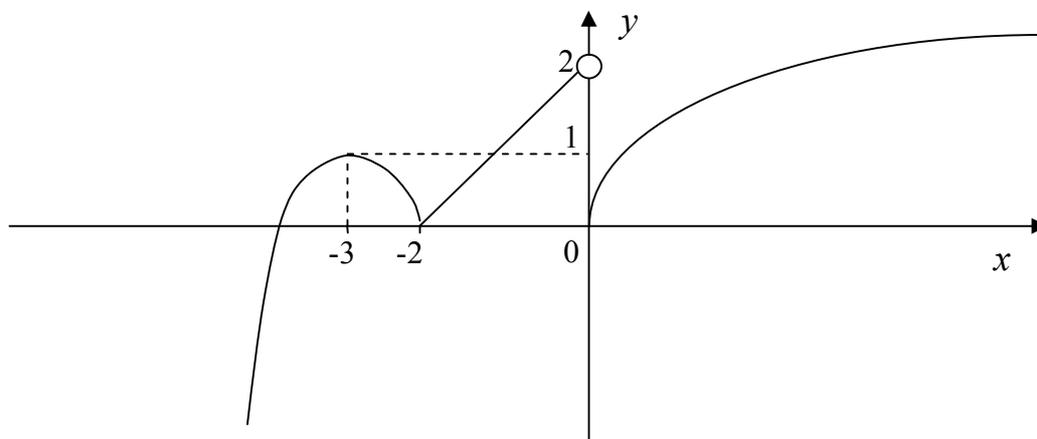


Рис. 10

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда функция на этом отрезке принимает свои наибольшее и наименьшее значения. Эти значения могут приниматься либо на концах отрезка, либо в некоторых внутренних точках интервала, которые, следовательно, будут являться критическими точками. Отсюда получаем алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке:

- убедиться, что на рассматриваемом отрезке функция определена и непрерывна;

- найти критические точки первого рода, принадлежащие данному интервалу;
- вычислить значения функции в этих критических точках и на концах интервала;
- из вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее значения.

∞ **Пример 8.** Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \arctg^3(\sqrt{x^2 + 5} - 3) \text{ на отрезке } [-1; 3].$$

Решение: Исследуемая функция определена на данном отрезке и непрерывна на нем, т.к. является элементарной. Найдем критические точки первого рода, принадлежащие интервалу. Вычислим первую производную.

$$y' = 3 \arctg^2(\sqrt{x^2 + 5} - 3) \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)^2 + 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

Приравняем производную нулю:

$$y' = 0: \begin{cases} \arctg^2(\sqrt{x^2 + 5} - 3) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Но, точка $x = -2$ не принадлежит рассматриваемому интервалу. Производная функция на отрезке $[-1; 3]$ определена всюду, следовательно, критическими точками первого рода из данного отрезка будут точки $x = 0$; $x = 2$. Вычислим значения функции на концах отрезка и в критических точках:

$$y(-1) = \arctg^3(\sqrt{6} - 3);$$

$$y(0) = \arctg^3(\sqrt{5} - 3);$$

$$y(2) = \arctg^3(0) = 0;$$

$$y(3) = \arctg^3(\sqrt{14} - 3).$$

Учитывая, что функция $y = \operatorname{arctg}^3 z$ - возрастающая, получим

$$\min_{[-1; 2]} y(x) = \operatorname{arctg}^3(\sqrt{5} - 3) = y(0);$$

$$\max_{[-1; 2]} y(x) = \operatorname{arctg}^3(\sqrt{14} - 3) = y(3).$$

Исследование с помощью второй производной

Определение: Функция $y = f(x)$ называется выпуклой на интервале $(a; b)$, если ее график лежит ниже любой касательной, проведенной к точке кривой на данном интервале, вогнутой, если выше.

Теорема. Если вторая производная функции $y = f(x)$ положительна на интервале $(a; b)$, то функция вогнута на этом интервале, если отрицательна, то выпукла.

Определение: Точка $x = x_p$ называется точкой перегиба функции $y = f(x)$, если она отделяет выпуклую часть графика от вогнутой, и этой точке существует касательная к графику функции.

Определение: Точка $x = x_c$ называется критической точкой второго рода для функции $y = f(x)$, если в этой точке вторая производная либо равна 0, либо не существует, а функция непрерывна.

Также отметим, что с помощью второй производной можно определить, существование экстремума.

Теорема (достаточное условие существования экстремума). Критическая точка первого рода является точкой минимума, если в этой точке вторая производная положительна, и максимума, если отрицательна. А в случае равенства нулю второй производной требуется дополнительное исследование.

По аналогии исследования функции с помощью первой производной, для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости, и точек перегиба необходимо знать ОДЗ, найти точки разрыва, определить критические точки второго рода. Критические точки второго рода и точки разрыва делят ОДЗ на интервалы знакопостоянства второй производной функции. Определив знак

второй производной на полученных интервалах, можно сделать выводы об интервалах выпуклости и вогнутости, точках перегиба.

☞ **Пример 9.** Исследовать с помощью второй производной функцию $y = e^{-x^2}$.

Решение: Областью определения данной элементарной функции является вся числовая ось: $x \in R$. Следовательно, нет точек разрыва. Вычислим первую и вторую производные:

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-2x); \quad y'' = e^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2)$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$e^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{2} \in OДЗ$, следовательно, точки $x = \pm 1/\sqrt{2}$ - критические. Нанесем их на числовую ось, определим знак второй производной на полученных интервалах (Рис. 11).

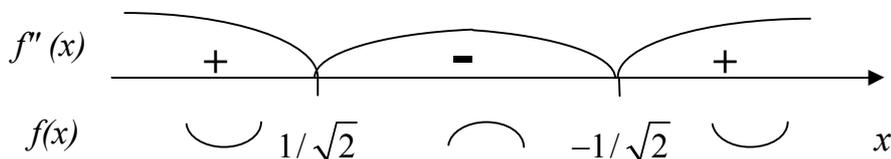


Рис. 11

Видим, на интервалах $(-\infty; -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}; +\infty)$ функция вогнута, а на интервале $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ - выпукла. Точки $x = \pm 1/\sqrt{2}$ являются точками перегиба. Значение функции в этих точках равно

$y(\pm 1/\sqrt{2}) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$. График функции приведен на рис 12.

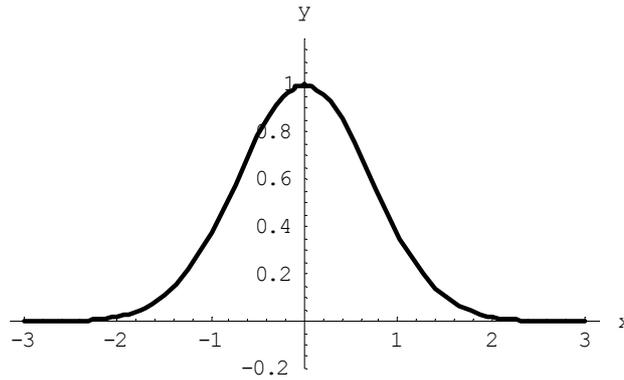


Рис. 12

Полное исследование функции и построение графика

Рассмотрим примеры полного исследования функции.

✎ **Пример 9.** Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x}$ и построить ее график.

Решение: Областью определения данной элементарной функции является вся числовая ось: $x \in \mathbb{R}$.

Проверим функцию на симметричность.

$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - 4(-x)} = -\sqrt[3]{x^3 - 4x} = -y(x).$$

Функция является нечетной, и ее график симметричен относительно начала отсчета.

Функция является непериодической, т.к. не содержит тригонометрических функций.

Определим точки пересечения с осями.

$$y(0) = \sqrt[3]{0} = 0.$$

$$y = 0: \sqrt[3]{x^3 - 4x} = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Нули функции $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ делят ОДЗ на следующие интервалы знакопостоянства функции (Рис. 13):

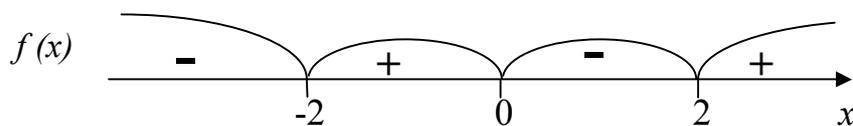


Рис. 13

Функция элементарна и определена на всей числовой оси, следовательно, нет точек разрыва. Значит, нет и вертикальных асимптот.

Определим наклонные асимптоты. Функция нечетная, поэтому можно исследовать ее только на правой полуоси, а потом отобразить график симметрично относительно начала отсчета.

$x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 (1 - 4/x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt[3]{(1 - 4/x^2)}}{x} = 1 = k_-;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_- \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 4x} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \sqrt[3]{1 - 4/x^2} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt[3]{1 - 4/x^2} - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x (-4/3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{3x} = \left[\frac{-4}{\infty} \right] = 0 = b_-$$

Следовательно, получим уравнение левой асимптоты: $y = x$.

Можно отметить, что при вычислении пределов мы нигде не использовали знака бесконечно большой величины, поэтому пределы получатся точно такими же и при $x \rightarrow +\infty$. Значит, прямая $y = x$ является и правой асимптотой.

Вычислим производную функции

$$y' = (x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4)$$

Найдем критические точки первого рода:

$$y' = 0: (x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2/\sqrt{3} \in \text{ОДЗ};$$

$$\nexists y': x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \text{ОДЗ} \\ x = \pm 2 \in \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Следовательно, точки $x = \pm 2/\sqrt{3}$; $x = \pm 2$; $x = 0$ являются критическими точками первого рода. Нанесем их на числовую ось, определим знак производной на получившихся интервалах (Рис. 14). Точка $x = -2/\sqrt{3} = x_M$ является точкой максимума, а точка $x = 2/\sqrt{3} = x_m$ точкой минимума. Точки $x = \pm 2$; $x = 0$ не являются точками экстремума, т.к. в них производная не меняет знак. Вычислим значения функции в точках экстремума

$$y_M = y(-2/\sqrt{3}) = \sqrt[3]{16/3\sqrt{3}} \approx 1.5; \quad y_m = y(2/\sqrt{3}) = -\sqrt[3]{16/3\sqrt{3}} \approx -1.5.$$

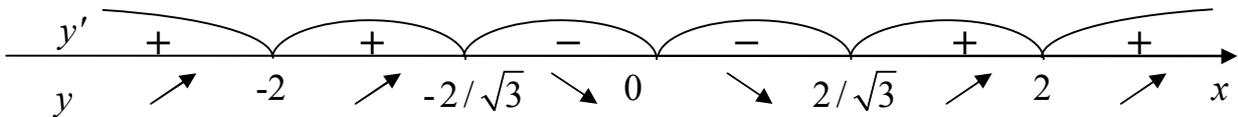


Рис. 14

Будем исследовать функцию с помощью второй производной:

$$\begin{aligned} y'' &= \left[(x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4) \right]' = 6x(x^3 - 4x)^{-2/3} - \frac{2}{3}(x^3 - 4x)^{-5/3} (3x^2 - 4)^2 = \\ &= (x^3 - 4x)^{-5/3} \left[6x^4 - 24x^2 - 6x^4 + 16x^2 - \frac{32}{3} \right] = -(x^3 - 4x)^{-5/3} \left[8x^2 + \frac{32}{3} \right] \end{aligned}$$

Определим критические точки второго рода:

$$y'' = 0: \emptyset$$

$$\nexists y'': x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \text{ОДЗ} \\ x = \pm 2 \in \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Критические точки второго рода $x = \pm 2$; $x = 0$ нанесем на числовую ось, определим интервалы выпуклости и вогнутости (Рис. 15).

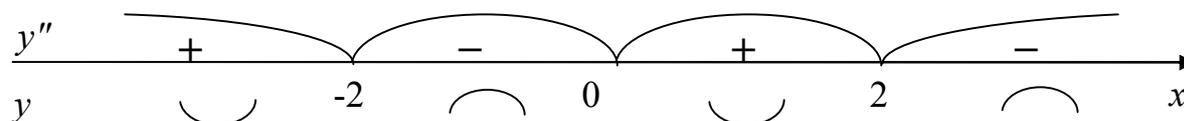


Рис. 15

Покажем, что в критических точках второго рода $x = \pm 2$; $x = 0$ касательная к графику функции существует. Вычислим односторонние пределы производной в этих точках.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4) = \left[\frac{-4}{+0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4) = \left[\frac{-4}{+0} \right] = -\infty.$$

Односторонние пределы бесконечны, но имеют одинаковый знак, следовательно, в этой точке существует касательная к графику функции, значит, критическая точка второго рода $x = 0$ является точкой перегиба.

Аналогично проверим точки $x = \pm 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm 2^-} y' = \lim_{x \rightarrow \pm 2^-} (x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4) = \left[\frac{8}{+0} \right] = +\infty;$$

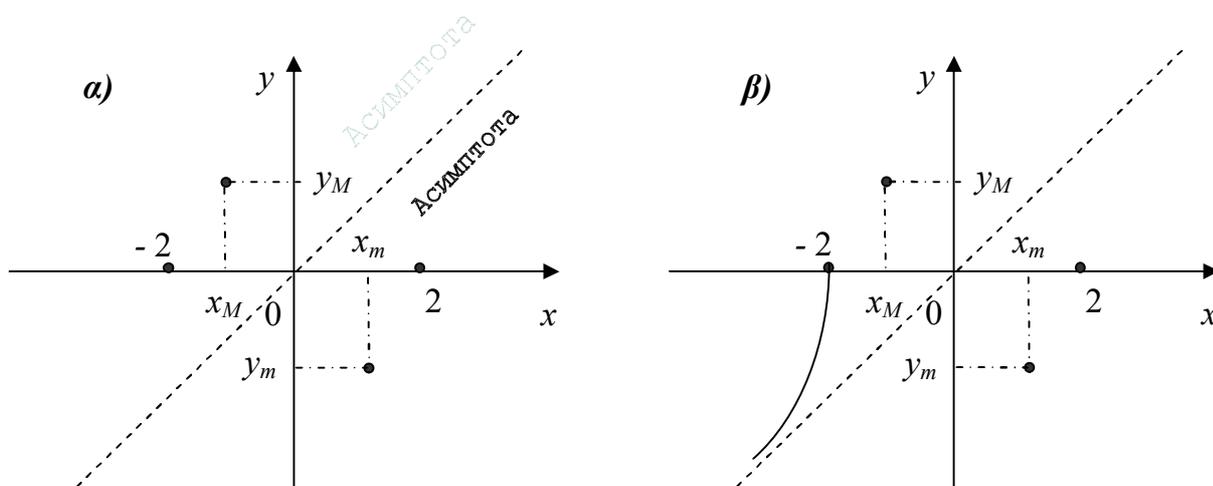
$$\lim_{x \rightarrow \pm 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow \pm 2^+} (x^3 - 4x)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4) = \left[\frac{8}{+0} \right] = +\infty.$$

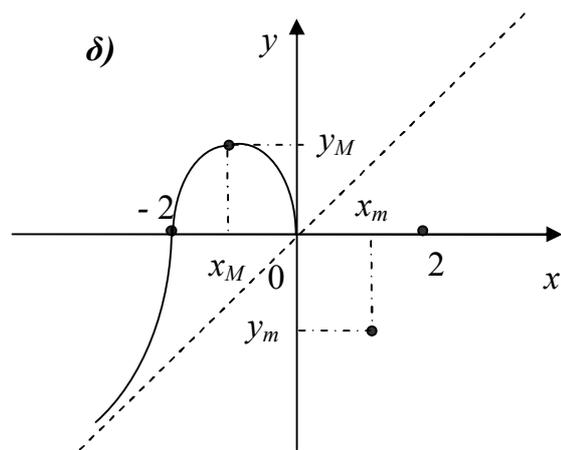
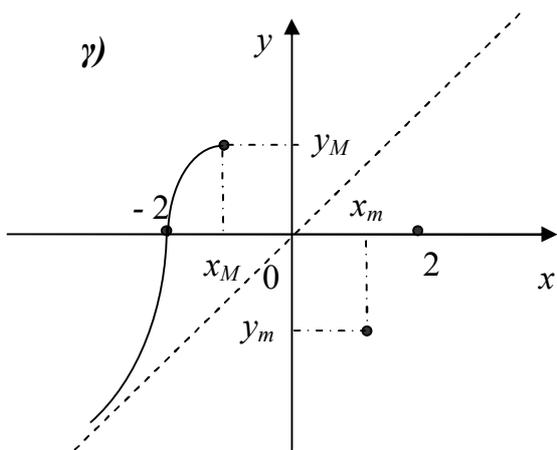
Таким образом, имеем три точки перегиба $x = \pm 2$; $x = 0$. А значение функции в этих точках равно нулю.

Исследование проведено, осталось построить график. Начнем с осей координат. Нужно провести оси и выбрать масштаб так, чтобы максимальные

характерные значения x и y были не дальше от начала отсчета, чем середина полуоси. Отметим на числовой плоскости характерные точки: граничные точки ОДЗ, точки пересечения с осями, точки экстремума и перегиба, точки разрыва. Если необходимо, то можно добавить несколько точек на графике функции. Проведем асимптоты (Рис. 16 α). Здесь точные значения координат точек экстремума не указаны, чтобы не загромождать рисунок, они заменены буквенными символами.

График функции будем рисовать поэтапно. Левая граница ОДЗ отсутствует, следовательно, начнем с «- бесконечности». Первая самая левая характерная точка – точка перегиба $x = -2$. Рассмотрим интервал $[-\infty; -2]$. На этом интервале функция возрастает, вогнута, в «- бесконечности» приближается к наклонной асимптоте, и приходит в точку перегиба $x = -2, y = 0$ под прямым углом. Нарисуем такую дугу (Рис. 16 β).





Переходим следующему интервалу $[-2; -2/\sqrt{3}]$. На этом интервале функция продолжает возрастать, но становится выпуклой, подходит к точке максимума горизонтально (под нулевым углом). Нарисуем соответствующую дугу (Рис. 16 γ).

На этом интервале $[-2/\sqrt{3}; 0]$ функция начинает убывать, но остается выпуклой, приходит в начало координат, касаясь оси Oy . Продолжим график соответствующей дугой (Рис. 16 δ).

Продолжая построение графика элементарными дугами, получим окончательный вариант графического представления исследуемой функции (Рис. 17). На рис. 18 приведен график, построенный программой «Математика».

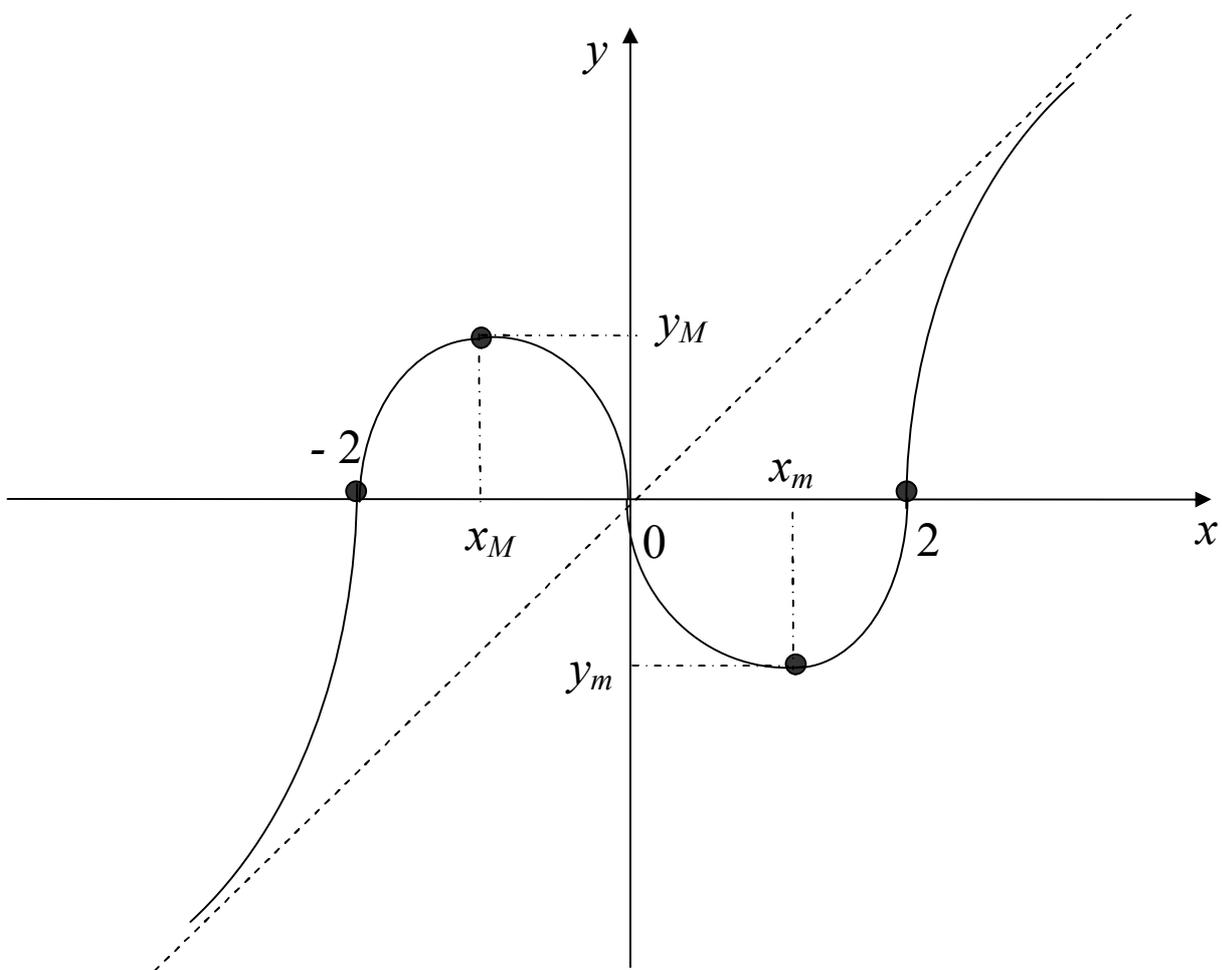


Рис. 17

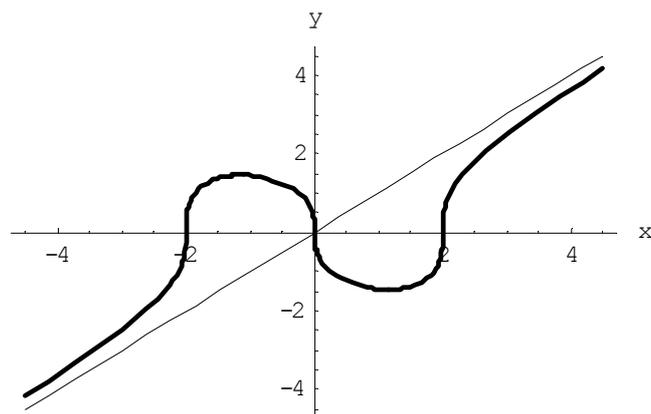


Рис. 18

☞ **Пример 10.** Исследовать составную функцию $y = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0 \\ \ln x, & 0 < x < 1 \text{ и} \\ \frac{1-x^2}{x+2}, & x \geq 1 \end{cases}$

построить график.

Решение: Все элементарные функции определены там, где они заданы. А интервалы задания функций покрывают числовую ось за исключением одной точки $x = 0$. Следовательно, областью определения являются интервалы $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция общего вида, т.к. $y(-x) \neq -y(x)$; $y(-x) \neq y(x)$ и неперiodическая.

Найдем точки пересечения с осями.

$$y(0) - \text{н.д.}$$

$$y = 0:$$

$$(-\infty; 0): e^{1/x} = 0 \Rightarrow x \in \emptyset;$$

$$(0; 1): \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (0; 1);$$

$$(1; +\infty): \frac{1-x^2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; \quad x = -1 \notin (1; +\infty).$$

Таким образом, получаем единственную точку пересечения с осями координат $M_0(1; 0)$.

Точка $x = 0$ является точкой разрыва. Подозрительной точкой также является точка стыковки $x = 1$. Исследуем эти точки.

$x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{1/x} = \left[e^{\frac{1}{-0}} \right] = \left[e^{-\infty} \right] = \left[\frac{1}{e^{+\infty}} \right] = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = \left[\ln(+0) \right] = -\infty.$$

$x = 0$ является точкой разрыва II рода, и прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

$x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln x = \ln 1 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1-x^2}{x+2} = 0; \quad y(1) = 0.$$

В точке $x = 1$ функция непрерывна.

Вычислим наклонные асимптоты.

$x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 = k_-;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_- \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1/x} - 0) = 1 = b_-.$$

$x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x(x+2)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1/x^2 - 1)}{x^2(1 + 2/x)} = -1 = k_+;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - k_+ \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x^2}{x+2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x^2+x^2+2x}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{x+2} \right) = 2 = b_+.$$

Таким образом, получаем левую горизонтальную асимптоту $y = 1$ и правую наклонную асимптоту $y = -x + 2$.

Вычислим первую производную.

$$y' = \begin{cases} -e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Производная нигде не обращается в 0, не существует в точке $x=1$, которая является критической точкой второго рода. Нанесем эту точку и точку разрыва на числовую ось (Рис.19).

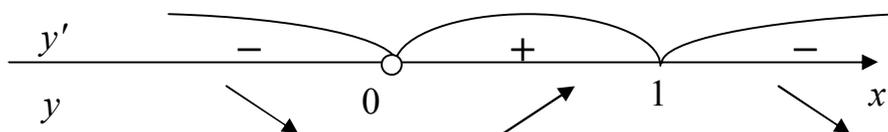


Рис. 19

Точка $x = 1$ является точкой максимума.

Исследуем функцию с помощью второй производной.

$$y'' = \begin{cases} e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^4} (2x + 1), & x < 0 \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{6}{(x + 2)^3}, & x > 1 \end{cases}$$

Вторая производная обращается в 0 при $x = -1/2 \in \text{ОДЗ}$, а не существует при $x = 1$. Эти точки являются критическими точками второго рода. Определим интервалы выпуклости и вогнутости (Рис. 20).

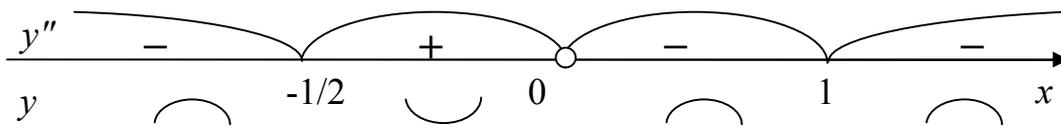


Рис. 20

Точка $x = -1/2$ является точкой перегиба, а точка $x = 1$ точкой излома функции. Значение функции в точке перегиба равно $1/e^2 \approx 0.12$.

График функции приведен на рис 21. А на рис. 22 показан график, построенный программой «Математика».

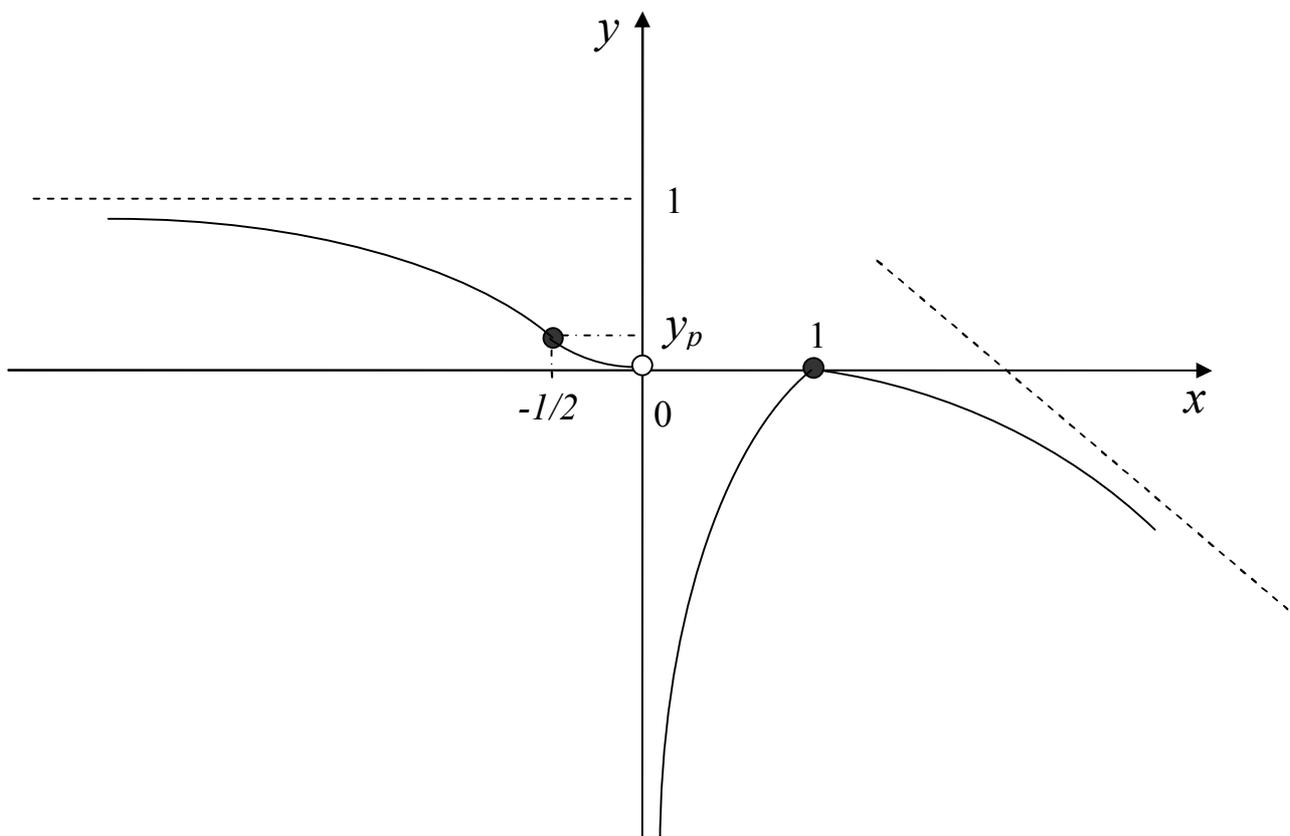


Рис. 21

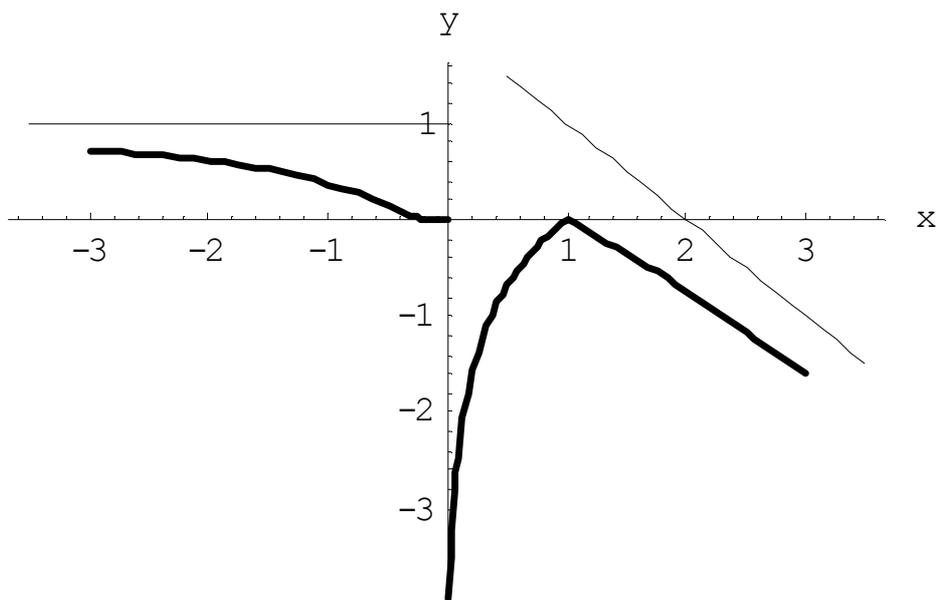


Рис. 22