**Министерство образования
Российской Федерации**

**Российский государственный университет
нефти и газа имени И.М. Губкина**

В.И. Иванов

Методические указания к изучению темы

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

(для студентов всех специальностей)

Москва 2011

Введение

Настоящие методические указания посвящены изучению одного из основных разделов математического анализа теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены все типы обыкновенных дифференциальных уравнений, изучаемых в курсе высшей математики. Для каждого типа приведены основные теоретические сведения, рассмотрены примеры решения дифференциальных уравнений, даны задачи для аудиторной и самостоятельной работ.

Общие замечания

Определение. Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную (переменные), неизвестную функцию и ее производные. Если неизвестная функция - это функция одной переменной, то уравнение называется обыкновенным, если нескольких переменных - то уравнением в частных производных.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Порядок уравнения определяется порядком его старшей производной.

В настоящих методических указаниях рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, которые изучаются в курсе высшей математики для всех специальностей дневного и вечернего форм обучения. Нужно отметить, что многие технологические и экономические процессы, механические задачи описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, т.к. в описании таких проблем чаще всего присутствует скорость процесса как один из основных параметров системы.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$ которая, будучи подставленной в уравнение, превращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$. Выразим производную:

$$y' = f(x, y). \tag{*}$$

Дифференциальное уравнение может быть записано через дифференциалы

$$M(x,\ y)\ d\,x + N(x,\ y)\ d\,y = 0.$$

Теорема о существовании и единственности решения уравнения (*). Если в некоторой области ***D*** функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial\ f}{\partial\ y}$ непрерывны, то для любой точки $M_o(x_o,\ y_o) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$, проходящее через эту точку (т.е. удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$).

Определение. Условие равенства $y = y_0$ при $x = x_0$ называется начальным условием.

Определение. Общим решением уравнения (*) называется функция $y = \varphi(x,\ C)$, зависящая от произвольной постоянной C и удовлетворяющая условиям:
1. при любом значении C_* функция $y = \varphi(x,\ C_*)$ является решением (*);
2. для любой точки $M_o(x_o,\ y_o) \in D$ существует значение постоянной $C=C_0$, что $y_0 = \varphi(x_0,\ C_0)$.

Общее решение, когда переменная y не выражается через переменную x, называется общим интегралом $\Phi(x, y, C) = 0$.

Определение. Частным называется решение, которое получается из общего при конкретном значении постоянной $C=C_0$. Аналогично получается частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши.

Замечание. Не любое частное решение может быть получено из общего решения. Если есть такое решение уравнения, то его будем называть особым.

Типы уравнений первого порядка и способы их решений

I. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными может быть представлено в следующих видах:

$$y' = g(x)\cdot h(y) \text{ или} \qquad (1)$$

$$M_1(x)\cdot M_2(y)\, d\,x + N_1(x)\cdot N_2(y)\, d\,y = 0. \qquad (1')$$

Для решения уравнения с разделяющимися переменными необходимо представить производную как отношение дифференциалов и разделить переменные, т.е. с одной стороны от знака равенства собрать выражение содержащее только x , с другой - только y:

$$y' = g(x)\cdot h(y); \qquad M_1(x)\cdot M_2(y)\, d\,x + N_1(x)\cdot N_2(y)\, d\,y = 0;$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = g(x)\cdot h(y); \qquad M_1(x)\cdot M_2(y)\, d\,x = -N_1(x)\cdot N_2(y)\, d\,y;$$

$$\frac{d\,y}{h(y)} = g(x)\cdot d\,x; \qquad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\, d\,x = \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, d\,y;$$

$$\int\frac{d\,y}{h(y)} = \int g(x)\cdot d\,x + C. \qquad \int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\, d\,x + C = \int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, d\,y.$$

Решения записаны с помощью интегралов, полученных при интегрировании уравнения. Эти решения содержат произвольную константу интегрирования и являются общими. А особые решения можно получить, решая алгебраические уравнения $h(y) \equiv 0;\ N_1(x) \equiv 0;\ M_2(y) \equiv 0.$.

Пример 1. Решить уравнение $3x\ln x\cdot y' = 5y - 4y\ln x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно, после преобразования получим

$$y' = \frac{5-4\ln x}{3x\ln x}\cdot y\,.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-4\ln x}{3x\ln x}\cdot y\,.$$

Рассмотрим два случая:

1. $y \equiv 0$. Легко убедиться, что данная функция является решением уравнения.

2. $\frac{d\,y}{y} = \frac{5-4\ln x}{3x\ln x}\cdot d\,x;\qquad \int\frac{d\,y}{y} = \int\frac{5-4\ln x}{3x\ln x}\cdot d\,x;$

$\ln|y| = \int\frac{5}{3x\ln x}\cdot d\,x - \int\frac{4\ln x}{3x\ln x}\cdot d\,x;\quad \ln|y| = \frac{5}{3}\,\ln|\ln x| - \frac{4}{3}\,\ln|x| + \ln|C|;$

$y = C\,\sqrt[3]{\frac{\ln^5 x}{x^4}}$

Здесь постоянная интегрирования представлена для удобства в виде логарифма, а модули отброшены, т.к. постоянная C может принимать и положительные и отрицательные значения. Функция, полученная в случае 2, является общим решением и включает в себя также решение случая 1, получаемое при $C \equiv 0$.

Решить уравнения:

1. $y' = 2e^{3x} - 4x^2 + 6,\ \ y(0) = 2.$
2. $y' = \sqrt[5]{4x-8},\ \ y(2) = 2.$
3. $y' = \sqrt[3]{2x}\cdot\log_3 x,\ \ y(1) = 0.$
4. $y' = \sqrt{y^2+5}\cdot\left(x^3+7\right).$
5. $y' = \sin^3 2x\cdot\cos^2 5y.$
6. $y' = 7\sin^2 2x\cdot\cos^2 5x.$
7. $x^4 y' = 5xy + 7\sqrt{x}y,\quad y(1) = 1.$
8. $3y\cdot y' = 4e^{5y^2+2},\quad y(0) = 0.$
9. $\left(x^2+4\right)y' = 9 - y^2.$
10. $\left(x+4\right)y' = \left(9+2y^2\right)\ln\left(x+4\right).$
11. $\ln\left(5y+6\right)e^{3x}y' = 1 + e^{7x},\ \ y(0) = -1.$
12. $y' = 7^{3y}\cdot tg(3-5x),\quad y(1) = \pi.$
13. $2x\left(2+y\right)\,d\,y = (x^2-7)(y-9)\,d\,x.$
14. $\sin y\cdot\cos x\ \ d\,y = \cos y\cdot\sin x\ \ d\,x.$
15. $\left(4x^3y^2 - y^2\right)\,d\,x = \left(3xy+5x\right)\,d\,y.$
16. $\left(4xy^2 - xy\right)\,d\,x = \left(xy + x + y + 1\right)\,d\,y.$

II. Однородные уравнения первого порядка

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется однородной функцией порядка k,

если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.

Определение. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ является однородной функцией порядка 0. Тогда, принимая $\lambda = 1/x$, получаем

$$y' = f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = q\left(\frac{y}{x}\right).$$

Таким образом, уравнение первого порядка является однородным, если его правая часть представима в виде функции, зависящей только от отношения переменных x и y

$$\boxed{y' = q\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (2)}$$

Однородное уравнение решается с помощью замены $\dfrac{y}{x} = t(x)$. При этом $y = t\,x$, $y' = t'x + t$. В новых переменных уравнение разрешает разделение переменных:

$$t'x + t = q(t);\ x\frac{dt}{dx} = q(t) - t;\ \int \frac{dt}{q(t) - t} = \int \frac{dx}{x};\ \int \frac{dt}{q(t) - t} = \ln|x| + C.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $x \cdot y' = 5x\,e^{2y/x} - 4x + y;\ y(1) = 0$.

Решение. Покажем, что это уравнение однородное. Выразим производную

$$y' = 5\,e^{2y/x} - 4 + y/x.$$

Правая часть уравнения зависит только от отношения переменных y и x, следовательно, уравнение – однородное. Введя замену $\frac{y}{x}=t(x)$, получим

$$x\,t'+t=5\,e^{2t}-4+t;\quad t'=\frac{5\,e^{2t}-4}{x};\quad \frac{d\,t}{5\,e^{2t}-4}=\frac{d\,x}{x};\quad \int\frac{d\,t}{5\,e^{2t}-4}=\int\frac{d\,x}{x}.$$

Вычислим интеграл слева:

$$\int\frac{d\,t}{5\,e^{2t}-4}=\int\frac{e^{2t}\,d\,t}{5\left(e^{2t}\right)^2-4e^{2t}}=\frac{1}{10}\int\frac{d\,e^{2t}}{\left(e^{2t}\right)^2-2e^{2t}\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}}=$$

$$=\frac{1}{10}\int\frac{d\left(e^{2t}-2/5\right)}{\left(e^{2t}-2/5\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{1}{10}\frac{1}{2\cdot 2/5}\ln\left|\frac{e^{2t}-7/5}{e^{2t}+3/5}\right|=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2t}-7/5}{e^{2t}+3/5}\right|.$$

Общий интеграл уравнения может быть записан в следующем виде:

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2y/x}-7/5}{e^{2y/x}+3/5}\right|=\ln|x|+\frac{1}{8}\ln|C|;\quad \frac{e^{2y/x}-7/5}{e^{2y/x}+3/5}=C\,x^8.$$

Подставим полученное решение в начальное условие $\frac{1-7/5}{1+3/5}=C;\,C=\frac{2}{7}.$

Таким образом, получим частный интеграл уравнения $\frac{e^{2y/x}-7/5}{e^{2y/x}+3/5}=\frac{2}{7}x^8.$

Решить уравнения:

17. $y'=\sin^2 3y/x+y/x.$
18. $y'=\sqrt{6y/x-7}+y.$
19. $x\cdot y'=5y-7x,\;\; y(1)=2.$
20. $3x\cdot y'=2y+9x,\;\; y(2)=1.$
21. $y\cdot y'=x-y.$
22. $11y\cdot y'=3x+y.$
23. $4xy'=y\ln x-y\ln y.$
24. $x\cdot y'=y\log_3 2y/x+y.$
25. $y\cdot y'=5x\cdot e^{4y/x}+y^2/x,\;\; y(1)=1.$
26. $y'=8\cdot 3^{y/6x}+y/x,\;\; y(1/6)=0.$
27. $x^2\cdot y'=3x^2+xy-y^2.$
28. $3x^2\cdot y'=x^2+3xy+2y^2.$

III. Линейные уравнения

Определение. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение следующего вида:

$$\boxed{y' + p(x)\cdot y = q(x). \qquad (3)}$$

Отметим, что в уравнение неизвестная функция *y(x)* и ее производная y' входят только в первой степени, и нет их перекрестных произведений.

Линейное уравнение решается с помощью подстановки $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Подставляя замену в уравнение, получим

$$u'\cdot v + \underbrace{u\cdot v' + p(x)\cdot uv} = q(x).$$

Выберем функцию $v(x)$ таким образом, чтобы выделенные фигурной скобкой слагаемые в сумме давали ноль.

1) $u\cdot\left(v' + p(x)\cdot v\right) = 0$. Но u не может равняться тождественно нулю, т.к. в этом случае и y, и y' будут тождественно равны нулю, а этого не может быть при ненулевом $q(x)$. Следовательно,

$$v' + p(x)\cdot v = 0; \quad \frac{d\ v}{v} = -p(x)\ d\ x; \quad \int\frac{d\ v}{v} = -\int p(x)\ d\ x;$$

$$\ln|v| = -\int p(x)\ d\ x; \quad v = e^{-\int p(x)\,d\,x}.$$

Т.к. функцию *v(x)* можем выбирать произвольной, примем константу интегрирования равной нулю. Оставшиеся части уравнения также представляют собой уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'\cdot v = q(x); \quad u'\cdot e^{-\int p(x)\,d\,x} = q(x); \quad u' = q(x)\cdot e^{\int p(x)\,d\,x}; \quad u = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\,d\,x}\,d\ x + C.$$

Запишем общее решение: $y = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,d\,x} d\,x + C \right) \cdot e^{-\int p(x)\,d\,x}$.

✍ **Пример 3.** Решить уравнение $x \cdot y' = 5y - 4\sqrt{x}$.

Решение. Перепишем уравнение в удобном для нас виде: $y' - 5\dfrac{y}{x} = -\dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Применив подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, получим

$$u' \cdot v + \underbrace{u \cdot v' - \frac{5uv}{x}} = -\frac{4}{\sqrt{x}}.$$

Решаем два уравнения с разделяющимися переменными:

1) $u \cdot \left(v' - \dfrac{5v}{x} \right) = 0;$

$\dfrac{d\,v}{d\,x} - \dfrac{5v}{x} = 0;$

$\dfrac{d\,v}{v} = \dfrac{5d\,x}{x};$

$\displaystyle\int \frac{d\,v}{v} = \int \frac{5d\,x}{x};$

$\ln|v| = 5\ln|x|;$

$v = x^5.$

2) $u' \cdot v = -\dfrac{4}{\sqrt{x}};$

$u' \cdot x^5 = -\dfrac{4}{\sqrt{x}};$

$u' = -4x^{-11/2};$

$u = -\displaystyle\int 4x^{-11/2}\,d\,x = \frac{8}{9}x^{-9/2} + C.$

Запишем общее решение уравнения

$$y = u\,v = \frac{8}{9}\sqrt{x} + C\,x^5.$$

IV. Уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли отличается от линейного уравнения тем, что в правой части есть множитель в виде степени неизвестной функции

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = q\left(x\right) \cdot y^n. \qquad (4)}$$

Будем считать, что $n \neq 0; 1$ т.к. в этих случаях мы получаем линейное уравнение. Уравнение Бернулли решается по той же схеме, что и линейное уравнение.

Пример 4. Решить уравнение $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{3y^2}{x^4} e^{1/x}$.

Решение. Применив подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, получим

$$u'v + \underbrace{uv' - \frac{2uv}{x}} = \frac{3u^2v^2}{x^4} e^{1/x}.$$

Опять же выберем функцию *v(x)* так, чтобы выделенные слагаемые в левой части уравнения в сумме давали ноль.

1) $u\left(v' - \dfrac{2v}{x}\right) = 0$.

Рассмотрим два подслучая:

а) $u \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0$. Легко проверить, что данная функция является решением уравнения.

б) $v' - \dfrac{2v}{x} = 0;\ \dfrac{d\ v}{v} = 2\dfrac{d\ x}{x};\ \displaystyle\int \frac{d\ v}{v} = 2\int \frac{d\ x}{x};\ \ln|v| = 2\ln|x|;\ v = x^2$.

2) $u'v = \dfrac{3u^2v^2}{x^4} e^{\frac{1}{x}};\ \ u'x^2 = \dfrac{3u^2x^4}{x^4} e^{\frac{1}{x}};\ \displaystyle\int \frac{d\ u}{u^2} = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} d\ x;\ \ \frac{1}{u} = e^{\frac{1}{x}} + C;\ u = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + C}$.

Общее решение уравнения может быть записано в следующем виде $y = \dfrac{x^2}{e^{1/x} + C}$.

Но, из данного решения ни при каком значении константы C нельзя получить решение из подпункта *а),* которое, следовательно, будет являться особым решением.

Ответ: $y = \dfrac{x^2}{e^{1/x} + C}$ - общее решения уравнения; $y \equiv 0$ - особое решение.

Решить уравнения:

29. $y' + 3y = e^{4-x}$.

30. $y' + 2y = e^{3x}$.

31. $y' - 2xy = 5x, \;\; y(0) = 6$.

32. $y' - 7e^{2x}y = 3e^{2x}, \;\; y(0) = 2$.

33. $y' + 4y / x = \cos x^5$.

34. $y' + y / 2x = 3/(\sqrt{x} + 5)$.

35. $y' - y / x = e^x$.

36. $y' - y / x = 5/\sqrt{x^2 - 2}$.

37. $y' + y / x^2 = 7 / x^3, \;\; y(1) = 1$.

38. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = 2/\cos x, \;\; y(0) = 4$.

39. $y' + y / x = y^5$.

40. $y' + y \cdot \operatorname{ctg} x = y^2 \cos x$.

41. $y' + 5y / \sqrt{x} = 3 \cdot \sqrt[5]{y^4}, \;\; y(1) = 2$.

42. $y' - 2xy/(x^2 + 3) = 4xy^3$.

43. $y' - 2y/(2x + 3) = y^2 \cdot (x^2 - 5)$.

44. $y' - y / x = y^4 \cdot (3 - x^2), \; y(1) = 1$.

45. $y' = \dfrac{y}{y^3 + 3x}$.

46. $y' = \dfrac{4}{yx^2 + x}$.

V. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Уравнение вида

$$\boxed{M(x, y)\,d\,x + N(x, y)\,d\,y = 0. \qquad (5)}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен левой части уравнения:

$$d\,U(x, y) = M(x, y)\,d\,x + N(x, y)\,d\,y\,.$$

Теорема (условие Коши-Римана). Если в некоторой области D функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ и их частные производные непрерывны, то уравнение (5) является уравнением в полных дифференциалах при выполнении условия $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Соотношение $U(x, y) = C$ будет являться общим интегралом уравнения в полных дифференциалах, и он может быть найден из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x, y); \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \end{cases}$$

ʚɞ **Пример 5.** Решить уравнение $\left(3e^{2-x}-4xy^2+5\right)d\,x+\left(\sin\pi y-4x^2y-2\right)d\,y=0$.

Решение. В данном случае имеем следующие коэффициенты при дифференциалах: $M(x,y)=3e^{2-x}-4xy^2+5;\ N(x,y)=\sin\pi x-4x^2y-2$. Проверим выполнение условия Коши-Римана: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-8xy;\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=-8xy;\ \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Следовательно, уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Ищем функцию $U(x,y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=3e^{2-x}-4xy^2+5;\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=\sin\pi y-4x^2y-2.\end{cases}$$

Решим первое уравнение (при интегрировании принимаем, что *y* является величиной постоянной относительно переменной интегрирования *x*):

$$U=\int\limits_{y=const}\left(3e^{2-x}-4xy^2+5\right)d\,x=-3e^{2-x}-2x^2y^2+5x+\varphi(y).$$

Здесь константа интегрирования зависит от переменной *y*, т.к. интегрирование ведется по переменной *x*. Подставим полученную функцию во второе уравнение:

$$-4x^2y+\varphi'(y)=\sin\pi y-4x^2y-2;\quad \varphi'(y)=\sin\pi y-2;\ \varphi(y)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi y-2y.$$

Получим общий интеграл уравнения $-3e^{2-x}-2x^2y^2+5x-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi y-2y=C$.

Решить уравнения:

47. $\left(3x^2y+4xy-y^2\right)\cdot d\,x+\left(x^3+2x^2-2xy\right)\cdot d\,y=0.$
48. $\left(y\cdot\sin x-\sin y-x\right)\cdot d\,x-\left(\cos x+x\cdot\cos y+4y\right)\cdot d\,y=0.$
49. $\left(y\cdot e^x+2xy^3+3x^2\right)\cdot d\,x+\left(\cos y+e^x+3x^2y^2\right)\cdot d\,y=0,\ y(0)=1.$
50. $\left(\dfrac{3y}{x^2+1}+xy^2-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)\cdot d\,x+\left(3\operatorname{arctg}x+e^{4y}+yx^2\right)\cdot d\,y=0.$
51. $\left(\dfrac{5y}{x-4}-4xy+3y^2\right)\cdot d\,x+\left(5\ln(x-4)-2x^2+6yx+\ln y\right)\cdot d\,y=0.$
52. $\left(6x^2y^4+x+5y\right)\cdot d\,x+\left(8x^3y^3+5x-y\right)\cdot d\,y=0,\ y(1)=2.$

Дифференциальные уравнения второго порядка

В дифференциальном уравнении второго порядка $F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$ выразим вторую производную:

$$y''=f(x,\ y,\ y'). \qquad (**)$$

Теорема о существовании и единственности решения уравнения (**). Если в некоторой области ***D*** функция $f(x,\ y,\ y')$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны, то для любой точки $M_o(x_o,\ y_o,\ y_o{}')\in D$ существует единственное решение $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y_0=\varphi\ (x_0);\ y_o{}'=\varphi'(x_o)$.

Определение. Общим решением уравнения (**) называется функция $y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2)$, зависящая от произвольных постоянных C_1, C_2 и удовлетворяющая условиям:

1. при любых значениях постоянных $C_1=C_1^*,\ C_2=C_2^*$ функция $y=\varphi(x,\ C_1^*,\ C_2^*)$, является решением уравнения (**);
2. для любой точки $M_o(x_o,\ y_o,\ y_o{}')\in D$ существуют значения постоянных $C_1=C_1^*,\ C_2=C_2^*$, что $y_o=\varphi(x_o,\ C_1^*,\ C_2^*),\ y_o{}'=\varphi'(x_o,\ C_1^*,\ C_2^*)$.

Рассмотрим типы уравнений второго порядка.

I. Уравнение, не содержащее явно переменную y

$$F(x,\ y',\ y'')=0. \qquad (6)$$

Решение этого уравнения сводится к решению двух уравнений первого порядка. Для этого сделаем замену $y'=g(x),\ y''=g'(x)$. Получим систему из двух уравнений $\begin{cases}F(x,\ g,\ g')=0;\\ y'=g(x).\end{cases}$

В первую очередь решаем первое уравнение, и, подставляя полученное решение во второе уравнение, определяем искомую функцию.

Пример 6. Решить уравнение $x\cdot y''+2y'=3$.

Решение. В уравнение явно не входит переменная y, поэтому сделаем замену

$$y'=g(x);\ \ y''=g'(x);\quad xg'+2g=3;\ \ x\cdot\frac{d\,g}{d\,x}=-(2g-3);$$

$a)$ $x\equiv 0-$не является решением;

$g\equiv 3/2;\ \ y=\dfrac{3}{2}x+C_2-$решение;

$б)$ $\dfrac{d\,g}{2g-3}=-\dfrac{d\,x}{x};\ \ \displaystyle\int\frac{d\,g}{2g-3}=-\int\frac{d\,x}{x};$

$\dfrac{1}{2}\ln|2g-3|=-\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|C_1|;\ \ g=\dfrac{C_1}{2x^2}+\dfrac{3}{2}.$

После обратной замены получим

$$y'=\frac{C_1}{2x^2}+\frac{3}{2};\ \ y=\int\left(\frac{C_1}{2x^2}+\frac{3}{2}\right)d\,x=-\frac{C_1}{2x}+\frac{3}{2}x+C_2.$$

Данное решение является общим решением, т.к. содержит две произвольные константы, полученные во время интегрирования. Полученное в подпункте *а)* решение не является особым, потому что получается из общего при $C_1=0$.

II. Уравнение, не содержащее явно переменную x

$$F(y,\,y',\,y'')=0. \qquad (7)$$

В этом случае вводим новую функцию, зависящую от y: $y'=p(y),\ \ y''=p\cdot\dfrac{d\,p}{d\,y}$.

Пример 7. Найти частное решение уравнения

$$y\,y''+2\left(y'\right)^2=5y\,y',\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=5/3.$$

Решение. После замены $y'=p(y),\ \ y''=p\cdot\dfrac{d\,p}{d\,y}$ мы получим:

$$y\,p\,\frac{d\,p}{d\,y}+2p^2=5y\,p;\quad p\left(y\,\frac{d\,p}{d\,y}+2p-5y\right)=0;$$

1. $p\equiv 0\ \Rightarrow\ y'\equiv 0\ \Rightarrow\ y\equiv C-$решение.

2. $y\,\dfrac{d\,p}{d\,y}+2p-5y=0.$

Данное уравнение является и линейным, и однородным уравнением, мы будем решать как однородное уравнение.

$$\frac{d\,p}{d\,y}=-\frac{2p}{y}+5;\ \frac{p}{y}=t(y);\quad p=t\cdot y;\ \ \frac{d\,p}{d\,y}=\frac{d\,t}{d\,y}\,y+t;$$

$$\frac{dt}{dy}\,y + t = -2t + 5; \quad \frac{dt}{dy}\,y = -3t + 5;$$

$$а) -3t + 5 \equiv 0;\; t \equiv 5/3;\; p = 5/3 \cdot y;\; y' = 5/3 \cdot y;\; \ln|y| = 5/3 \cdot x;\; y = Ce^{5x/3};$$

$$б)\; \frac{dt}{3t-5} = -\frac{dy}{y};\; \int\frac{dt}{3t-5} = -\int\frac{dy}{y};$$

$$\frac{1}{3}\ln|3t-5| = -\ln|y| + \frac{1}{3}\ln|C_1|;\;\; 3t-5 = \frac{C_1}{y^3};\;\; p = \frac{C_1}{3y^2} + 5y/3;\quad y' = \frac{C_1}{3y^2} + 5y/3.$$

Подставляя в начальные условия, получим:

$$5/3 = \frac{C_1}{3} + 5/3 \Rightarrow C_1 = 0, \quad \text{тогда} \quad y' = 5y/3;\; \frac{dy}{dx} = 5y/3;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{5}{3}dx;\;\; \int\frac{dy}{y} = \frac{5}{3}\int dx;\;\; \ln|y| = \frac{5}{3}x + \ln|C_2|;\;\; y = C_2\, e^{5x/3}.$$

Еще раз воспользуемся начальными условиями и получим искомое частное решение

$$1 = C_2\, e^0 \Rightarrow C_2 = 1, \text{ следовательно, } \; y = e^{5x/3}.$$

Следует заметить, что в некоторых случаях частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, нельзя получить из общего решения. В этих случаях необходимо проверить, не является ли особое решение искомым решением.

Решить уравнения:

53. $y'' - 3y' = 4.$

54. $y'' - 4y' = 2x.$

55. $y'' + 2y' = 6x,$
$y(0) = 6,\; y'(0) = 1.$

56. $y'' + 5y' = 7,$
$y(0) = y'(0) = 1.$

57. $x \cdot y'' - 2y' = 8x^2,$
$y(1) = 1,\; y'(1) = 7.$

58. $x \cdot y'' + 3y' = 2x \cdot (y')^2,$
$y(1) = 0,\; y'(1) = 1.$

59. $8x \cdot y'' + 8y' = x(y')^3,$
$y(1) = 4,\; y'(1) = 2.$

60. $y' \cdot y'' + x \cdot (y')^2 = -e^{-x^2},$
$y(0) = y'(0) = 0.$

61. $y'' + \sqrt{1-(y')^2} = 0,$
$y(\pi/2) = 1,\;\; y'(\pi/2) = 0.$

62. $y'' = \sqrt{y \cdot y'},$
$y(0) = y'(0) = 1.$

63. $y \cdot y'' = 5(y')^2,$
$y(1) = 2,\; y'(1) = 32.$

64. $(y+1) \cdot y'' = 2(y')^2,$
$y(1) = -3,\; y'(1) = 1.$

III. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

Рассуждения данного раздела могут быть применены и для подобных уравнений более высокого порядка.

В общем случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка может быть записано в следующем виде:

$$\boxed{y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x). \qquad (***)}$$

В случае равенства правой части тождественно нулю уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным. Рассмотрим в начале однородные уравнения.

1. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

Как уже было сказано, однородное уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\boxed{y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0. \qquad (8)}$$

Рассмотрим некоторые свойства уравнения (8).

Теорема 1. Если функции $y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x) -$ два решения уравнения (8), то их линейная комбинация $y = \alpha_1\ \varphi_1(x) + \alpha_2\ \varphi_2(x)$ тоже является решением этого уравнения.

Определение. Функции $y_1(x),\, y_2(x),\, ...,\, y_n(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a,\, b]$, если их линейная комбинация $\alpha_1\ y_1(x) + \alpha_2\ y_2(x) + ... + \alpha_n\ y_n(x)$ ни при каких значениях α_i , кроме случая $\alpha_i \equiv 0,\ \forall i$, не обращается тождественно в ноль (для всех значений $x \in [a,\, b]$).

В противном случае функции называются линейно зависимыми, и в этом случае одну из функций можно выразить через другие (для примера пусть это будет $y_j(x)$):

$$y_j(x) = \beta_1\, y_1(x) + \beta_2\, y_2(x) + \ldots + \beta_{j-1}\, y_{j-1}(x) + \beta_{j+1}\, y_{j+1}(x) + \ldots + \beta_n\, y_n(x).$$

В случае двух функций они будут линейно зависимыми, если их отношение есть постоянная величина $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv k$ на отрезке $[a, b]$.

Определение. Для функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ определитель, составленный из них и их производных $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$, называется определителем Вронского.

Теорема 2. Если функции $y = y_1(x),\ y = y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского для этих функций тождественно равен 0.

Теорема 3. Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - два линейно независимых решения уравнения (8) на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского для этих функций не обращается в 0 ни в одной точке данного отрезка.

Теорема 4. Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - два линейно независимых решения уравнения (8), то общее решение представимо в виде линейной комбинации данных частных решений

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x).$$

2. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения. Общее решение неоднородного уравнения (***) может быть представлено в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (8) и некоторого частного решения неоднородного уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}.$$

3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{y'' + p\,y' + q\,y = 0. \qquad (9)}$$

Решение уравнения будем искать в следующем виде $y = e^{kx}$. Подставив данную функцию в уравнение (9), будем иметь $k^2\,e^{kx} + pk\,e^{kx} + q\,e^{kx} = 0$ или $k^2 + pk + q = 0$, т.к. экспонента никогда не может обратиться в ноль.

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (10)$$

называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (9). При решении характеристического уравнения (10) возможны три случая:

1) $D > 0;\ k_1 \neq k_2,\ k_1, k_2 \in R$. В этом случае функции $y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$ - два линейно независимых решения уравнения (9), следовательно, общим решением будет следующая функция

$$y_{oo} = C_1\,e^{k_1 x} + C_2\,e^{k_2 x}. \qquad (11)$$

2) $D = 0;\ k_1 = k_2 = k,\ k \in R$. Одно решение уравнения (9) – это функция $y_1 = e^{kx}$. Вместо второго решения (это можно проверить, подставив данную функцию в уравнение) надо взять функцию $y_2 = x e^{kx}$. Эти функции будут линейно независимыми. В этом случае получим общее решение

$$y_{oo} = C_1\,e^{kx} + C_2\,x\,e^{kx}. \qquad (12)$$

3) $D < 0;\ k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. В этом случае можно рассмотреть два линейно независимых решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. И общее решение примет вид

$$y_{oo} = C_1\,e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2\,e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (13)$$

Пример 8. Решить уравнение $y'' - 7y' + 3y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-7k+3=0$. Корнями уравнения будут два действительных числа $k_1=\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}$; $k_2=\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$, следовательно, общее решение в этом случае запишется так

$$y_{oo}=C_1\ e^{\frac{7-\sqrt{37}}{2}x}+C_2\ e^{\frac{7+\sqrt{37}}{2}x}.$$

ℰ **Пример 9.** Найти решение уравнения $2y''+12y'+18y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4$; $y'(0)=0$.

Решение. В начале найдем общее решение уравнения. Составим характеристическое уравнение $2k^2+12\,k+18=0$. Дискриминант равен нулю – имеем два одинаковых корня $k_{1,2}=-3$, и общее решение дифференциального уравнения $y_{oo}=\left(C_1\ +C_2\,x\right)\ e^{-3\,x}$.

Подставим полученное решение в начальные условия:

$$\begin{cases}\left(C_1\ +C_2\cdot 0\right)\ e^{-3\cdot 0}=4;\\ \left(C_2-3C_1\ -3C_2\cdot 0\right)\ e^{-3\cdot 0}=0.\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}C_1=4;\\ C_2-3C_1=0.\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}C_1=4;\\ C_2=12.\end{cases}$$

Частное решение, удовлетворяющее задаче Коши, будет иметь вид

$$y_{чо}=\left(4\ +12x\right)\ e^{-3\,x}.$$

4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Как было отмечено выше, для решения неоднородного уравнения достаточно знать общее решение однородного уравнения (что просто сделать) и любое частное решение неоднородного. Рассмотрим два особых случая правой части неоднородного уравнения и способы нахождения частных решений.

<u>Первый случай особой правой части</u> – произведение многочлена и показательной функции:

$$\boxed{y'' + p\, y' + q\, y = P_n(x)\cdot e^{a\,x}. \qquad (14)}$$

Частное решение в этом случае будем искать в следующем виде:

$y_ч = S_n(x)\cdot e^{a\,x}\cdot x^r$,

где

$S_n(x)$ - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

$e^{a\,x}$ - та же экспонента, что и в правой части уравнения (14);

x^r - усиление, параметр r определяется следующим образом:

$$r = \begin{cases} 0, \text{ если } a \neq k_1,\ a \neq k_2, \text{ т.е. } a \text{ не является корнем характеристического уравнения;} \\ 1, \text{ если } a = k_1,\ a \neq k_2, \text{ т.е. число } a \text{ равно одному из корней;} \\ 2, \text{ если } a = k_1 = k_2 = k, \text{ т.е. корни одинаковые и равны } a. \end{cases}$$

✍ **Пример 10.** Решить уравнение $y'' + 3y' - 4y = \left(10x - 8\right)e^x$.

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 3\,k - 4 = 0$, корнями которого будут $k = 1;\quad k = -4$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет иметь вид $y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

Выпишем параметры, необходимые для составления частного решения неоднородного уравнения:

$$\boxed{P_n(x) = 10x - 8 \Rightarrow n = 1;\ \ a = 1 \Rightarrow r = 1.}$$

Следовательно, частное решение будем искать в следующем виде:

$y_{чн} = \left(Ax + B\right)\cdot e^x\cdot x$.

Общий вид частного решения содержит неизвестные коэффициенты A и B. Их мы определим, подставляя данное частное решение в исходное уравнение. Для удобства вычислений слева от искомой функции и ее производных выпишем соответствующие коэффициенты из уравнения, а выражение в сумме разложим по степеням переменной x.

$$
\begin{array}{r|l}
-4 & y_ч = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x \\
3 & y_ч' = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x + \left(2Ax + B\right)e^x \\
1 & y_ч'' = \left(Ax^2 + Bx\right) \cdot e^x + 2\left(2Ax + B\right)e^x + 2Ae^x \\
\hline
\end{array}
$$

$$
e^x\left(x^2\left(-4A+3A+A\right)+x\left(-4B+3B+6A+B+4A\right)\right.
$$
$$
\left.+3B+2B+2A\right)=(10x-8)e^x
$$

Левая и правая части уравнения содержат множитель $e^x \neq 0$. После сокращения на этот множитель и упрощения получим:

$$10A \cdot x + \left(2A + 5B\right) = 10 \cdot x - 8;$$

$$\begin{cases} 10A = 10; \\ 2A + 5B = -8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1; \\ B = -2. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения равно

$$y_ч = \left(x - 2\right) \cdot e^x \cdot x.$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения

$$y_{он} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-4x} + \left(x - 2\right) \cdot e^x \cdot x.$$

Рассмотрим второй случай особой правой части:

$$\boxed{y'' + p\ y' + q\ y = e^{ax}\left(P_n(x) \cdot \cos bx + Q_m(x) \cdot \sin(bx)\right). \qquad (15)}$$

Частное решение в этом случае будем искать в следующем виде:

$y_ч = e^{ax}\left(S_l(x) \cdot \cos bx + T_l(x) \cdot \sin(bx)\right) \cdot x^r$, где

$S_l(x),\ \ T_l(x)$ - многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, а $l = \max(n,\ m)$;

$$r = \begin{cases} 0, & \text{если } a \pm bi \neq k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \text{ т.е. числа } a \pm bi \text{ не являются корнями} \\ & \qquad\qquad \text{характеристического уравнения;} \\ 1, & \text{если } a \pm bi = k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \text{ т.е. числа } a \pm bi \text{ есть корни} \\ & \qquad\qquad \text{характеристического уравнения.} \end{cases}$$

ஐ **Пример 11.** Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 6x \cdot e^{-x} \cdot \cos x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0;\quad y'(0) = 4$.

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$. Корнями характеристического уравнения $k^2 + 2k + 5 = 0$ будут комплексные числа $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения примет вид:

$$y_{oo} = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Правую часть уравнения можно представить в таком же виде, что и в уравнении (15):

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\left(6x \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x\right).$$

Выпишем параметры, необходимые для составления произвольного частного решения неоднородного уравнения:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_n(x) = 6x;\ Q_m(x) = 0 \Rightarrow n = 1;\ m = 0;\ l = 1; \\ a \pm bi = -1 \pm i \neq -1 \pm 2i \ \Rightarrow\ r = 0. \end{array}}$$

Следовательно, частное решение будем искать в следующем виде:

$$y_{чн} = e^{-x}\left[\left(Ax + B\right) \cdot \cos x + \left(Cx + D\right) \cdot \sin x\right] x^0.$$

Подставим данное частное решение в исходное уравнение:

$$\begin{array}{r|l} 5 & y_{чн} = e^{-x}\left[\left(Ax + B\right) \cdot \cos x + \left(Cx + D\right) \cdot \sin x\right] \\ 2 & y'_{чн} = e^{-x}\left[-\left(Ax + B\right) \cdot \cos x - \left(Cx + D\right) \cdot \sin x + A\cos x + C\sin x - \right. \\ & \qquad \left. -\left(Ax + B\right) \cdot \sin x + \left(Cx + D\right) \cdot \cos x\right] \\ 1 & y''_{чн} = e^{-x}\left[2\left(Ax + B\right) \cdot \sin x - 2\left(Cx + D\right) \cdot \cos x - 2A\cos x - 2C\sin x - \right. \\ & \qquad \left. -2A \cdot \sin x + 2C \cdot \cos x\right] \end{array}$$

$$\begin{aligned} & e^{-x}\left\{\cos x\left[x(5A - 2A + 2C - 2C) + 5B - 2B + 2A + 2D - 2D - 2A + 2C\right] + \right. \\ & \quad \left. + \sin x\left[x(5C - 2C - 2A + 2A) + 5D - 2D + 2C - 2B + 2B - 2C - 2A\right]\right\} = \\ & \quad = e^{-x}\left((6x + 0)\cos x + (0x + 0)\sin x\right) \end{aligned}$$

Коэффициентами при $\cos x,\ \sin x$ в левой и правой частях равенства являются многочлены первой степени, приравняем коэффициенты при степенях x:

$$\begin{cases} 3A = 6; \\ 3B + 2C = 0; \\ 3C = 0; \\ 3D - 2A = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2; \\ B = 0; \\ C = 0; \\ D = 4/3. \end{cases}$$

При этом частное решение примет вид $y_{чн} = e^{-x}\left[2x \cdot \cos x + 4/3 \cdot \sin x\right]$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{он} = e^{-x}\left(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x\right) + e^{-x}\left(2x \cdot \cos x + 4/3 \cdot \sin x\right).$$

Определим коэффициенты C_1, C_2, для этого подставим полученное общее решение в начальные условия:

$$y'_{он} = e^{-x}\left[-C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x - 2x \cos x + 4/3 \cdot \sin x - 2C_1 \sin 2x + \right.$$
$$\left. + 2C_2 \cos 2x + 2\cos x - 2x \sin x + 4/3 \cos x\right].$$

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ -C_1 + 2C_2 + 2 + 4/3 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 1/3. \end{cases}$$

Окончательное решение задачи Коши следующее:

$$y = \frac{1}{3}e^{-x} \cdot \sin 2x + e^{-x}\left(2x \cdot \cos x + \frac{4}{3} \cdot \sin x\right).$$

Метод суперпозиции решений

Метод суперпозиции (сложения) решений заключается в следующем: если правая часть линейного неоднородного уравнения (***) представляется в виде суммы двух функций, то и частное решение этого уравнения можно представить в виде суммы двух частных решений так, что первое из них является частным решением уравнения, в правой части которого стоит первое слагаемое, а второе – когда второе слагаемое.

Пример 12. Решить уравнение $y'' - 3y' = 9x^2 - 5 - 12\sin 3x$.

Решение. Однородному уравнению $y'' - 3y' = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 3k = 0$, имеющее действительные корни: $k_1 = 0;\ k_2 = 3$. Тогда общее решение будет следующее: $y_{оо} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x}$.

Правую часть уравнения можно представить как сумму двух функций $f_1(x)=9x^2-5;\ f_2(x)=-12\sin 3x$, причем, каждое из слагаемых является функцией вида правой части особого типа. Рассмотрим уравнение с первой правой частью.

1. $y''-3y'=9x^2-5;$

$$\boxed{P_n(x)=9x^2-5\Rightarrow n=2;\quad a=0\Rightarrow r=1.}$$

$$\begin{array}{r|l}
0 & y_{ч1}=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x=Ax^3+Bx^2+Cx \\
-3 & {y_{ч1}}'=3Ax^2+2Bx+C \\
1 & {y_{ч1}}''=6Ax+2B \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{x^2\left(-9A\right)+x\left(-6B+6A\right)-3C+2B=9x^2-5}
\end{array}$$

$$\begin{cases}-9A=9;\\ 6A-6B=0;\\ 2B-3C=-5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1;\\ B=-1;\\ C=1.\end{cases}$$

Таким образом, получаем первое частное решение:

$y_{ч1}=-x^3-x^2+x$.

2. $y''-3y'=-12\sin 3x$.

$$\boxed{\begin{array}{l}P_n(x)=0;\ Q_m(x)=-12\Rightarrow n=0;\ m=0;\ l=0;\\ a\pm bi=0\pm 3i\ \Rightarrow\ r=0.\end{array}}$$

$$\begin{array}{r|l}
0 & y_{ч2}=A\cos 3x+B\sin 3x \\
-3 & {y_{ч2}}'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x \\
1 & {y_{ч2}}''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\cos 3x\left(-9B-9A\right)+\sin 3x\left(9A-9B\right)=-12\sin 3x}
\end{array}$$

$$\begin{cases}-9A-9B=0;\\ 9A-9B=-12.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B;\\ -18B=-12.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-2/3;\\ B=2/3.\end{cases}$$

Второе частное решение: $y_{ч2} = -2/3\cos 3x + 2/3\sin 3x$.

Общее частное решение исходного неоднородного уравнения равно сумме полученных частных решений

$$y_{ч\,н} = y_{ч\,1} + y_{ч\,2} = -x^3 - x^2 + x - 2/3\cos 3x + 2/3\sin 3x.$$

Тогда общее решение примет вид

$$y_{о\,н} = y_{о\,о} + y_{ч\,н} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} - x^3 - x^2 + x - 2/3\cos 3x + 2/3\sin 3x.$$

<u>Метод вариации постоянных</u>

Рассмотрим общий метод решения неоднородного уравнения

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x).$$

Как было показано ранее, общее решение однородного уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ можно представить в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений $y_{оо} = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в следующем виде:

$$y_{он} = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2. \qquad (16)$$

В данном случае принимается, что коэффициенты при частных решениях y_1, y_2 есть некоторые неизвестные функции, т.е. вместо постоянных величин будем рассматривать переменные или будем варьировать постоянные величины. Определим их, подставляя данную функцию в исходное уравнение. Для этого вычислим производную

$$y'_{он} = C'_1 \cdot y_1 + C'_2(x) \cdot y_2 + C_1 \cdot y'_1 + C_2(x) \cdot y'_2.$$

Представление (16) достаточно общее, и поэтому можно принять, что сумма первых двух слагаемых в производной равна 0

$$C'_1 \cdot y_1 + C'_2(x) \cdot y_2 = 0. \qquad (17)$$

Вычислим вторую производную

$$y''_{он} = C'_1 \cdot y'_1 + C'_2(x) \cdot y'_2 + C_1 \cdot y''_1 + C_2(x) \cdot y''_2.$$

Подставим вычисленные производные в исходное уравнение

$$C_1'\cdot y_1' + C_2'\cdot y_2' + C_1\underbrace{\left(y_1'' + p\cdot y_1' + q\cdot y_1\right)}_{=0} + C_2\underbrace{\left(y_2'' + p\cdot y_2' + q\cdot y_2\right)}_{=0} = f(x).$$

Учтем, что y_1, y_2 являются решениями однородного уравнения. Тогда для определения искомых функций получим систему условий

$$\begin{cases} C_1'\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0; \\ C_1'\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (18)$$

Полученная система является системой линейных алгебраических уравнений относительно производных искомых функций C_1', C_2'. Определитель матрицы коэффициентов является определителем Вронского для функций y_1, y_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1,\ y_2).$$

Т.к. функции y_1, y_2 линейно независимы, определитель Вронского не равен нулю, следовательно, система имеет единственное решение, которое можно получить, например, методом Крамера

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{-f(x)\cdot y_2}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}; \\ C_2' = \dfrac{f(x)\cdot y_1}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} C_1 = \displaystyle\int \frac{-f(x)\cdot y_2}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}dx + D_1; \\ C_2 = \displaystyle\int \frac{f(x)\cdot y_1}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}dx + D_2. \end{cases}$$

При этом общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y_{он} = y_1\cdot\int\frac{-f(x)\cdot y_2}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}dx + y_2\cdot\int\frac{f(x)\cdot y_1}{y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2}dx + D_1\cdot y_1 + D_2\cdot y_2.$$

Отметим, что общее решение неоднородного уравнения представляется (как должно и быть) в виде суммы общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного.

℘ **Пример 13.** Решить уравнение $y'' + 4y = 7/\cos^3 2x$.

Решение. Решением соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$ является функция $y_{oo} = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2 = C_1\cos 2x + C_2\cdot\sin 2x$. Здесь $y_1 = \cos 2x;$ $y_2 = \sin 2x$. Будем искать решение в виде выражения (16). Тогда система (18) представится так:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos 2x + C_2' \cdot \sin 2x = 0; \\ -2C_1' \cdot \sin 2x + 2C_2' \cdot \cos 2x = 7 / \cos^3 2x. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $2\cos 2x$, а второе на $-\sin 2x$ и сложим:

$$C_1' = -\frac{7}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}.$$

Умножив первое уравнение на $2\sin 2x$, а второе на $\cos 2x$, и сложив, получим

$$C_2' = \frac{7}{2\cos^2 2x}\ .$$

Проинтегрируем полученные выражения:

$$C_1 = -\frac{7}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx = \frac{7}{2\cdot 2}\int \frac{d\cos 2x}{\cos^3 2x} = -\frac{7}{8\cos^2 2x} + D_1;$$

$$C_2 = \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{7}{4}\ \mathrm{tg}\, 2x + D_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения примет вид:

$$y_{он} = \frac{7}{8\cos 2x} + \frac{7}{4}\ \mathrm{tg}\, 2x \cdot \sin 2x + D_1 \cdot \cos 2x + D_2 \cdot \sin 2x\,.$$

Решить уравнения:

65. $y'' - 3y' = 0.$

66. $y'' + 5y' = 0.$

67. $y'' + 10y' + 25y = 0,$
 $y(0) = 6,\ y'(0) = 1.$

68. $y'' + 5y' - 6y = 0,$
 $y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

69. $4y'' - 2y' + y = 0.$

70. $9y'' - 6y' + y = 0.$

71. $y'' + 3y' - 10y = 6x^2 - 12x.$

72. $y'' + 7y' - 18y = 19.$

73. $y'' - 4y' + 4y = 30e^{2x},$
 $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

74. $y'' + y = -8e^{-x},$
 $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

75. $y'' - 4y' + 10y = 22\cos x - \sin x.$

76. $y'' + 4y' + 13y = -10\cos 3x.$

77. $y'' + y' + 2y = 11xe^{2x} - 4\sin x.$

78. $y'' + 16y = 36\cos 4x - 20e^{-x}.$

79. $y'' - 7y' + 6y = e^x\left(9 - 4\cos 6x\right).$

80. $y'' + 6y' - 7y = \left(e^x - 1\right)^2.$

81. $y'' + 4y = 5x^2e^{2x} - 6\sin 2x.$

82. $y'' + y' + 3y = \left(6 - x\right)e^{-2x} + \cos x.$

83. $y'' + 2y' = -3/\left(1 - e^{-2x}\right).$

84. $y'' - 9y = 2/\left(1 + e^{3x}\right).$

85. $y'' - 6y' + 9y = 8e^{3x}/x.$

86. $y'' + y = -4\sin^5 x.$

Список литературы

1. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 2. М. Наука. 1985.
2. Б.П. Демидович. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для втузов. М.
3. И.Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Изд-во МГУ. 1984.
4. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. Наука. 1979.

Содержание