Министерство образования и науки Российской Федерации

РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина

Кафедра «Высшая математика»

А. Н. Филиппов, Т. С. Филиппова,

Методические указания к выполнению типового расчета по теме «Дифференциальные уравнения»

(для студентов всех специальностей)

Москва 2014

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания подготовлены в соответствии с новым образовательным стандартом математических дисциплин, в котором типовой расчет рекомендован в качестве основной формы циклического задания для обучения студентов с целью развития навыков самостоятельной работы с новым материалом. Кроме того, данные указания будут полезны студентам альтернативных форм обучения, в том числе овладевающим знаниями по системе дистанционного образования.

Методические указания посвящены освоению техники решения дифференциальных уравнений различных типов и порядков. Задачи в каждом варианте подобраны в основном так, что при их решении требуется приложить некоторые усилия при сохранении доступного уровня сложности. Перед решением каждого варианта студенту желательно дать ответы на теоретические вопросы, что, в конечном счете, приведет к более глубокому и прочному усвоению темы «Дифференциальные уравнения».

В данных методических указаниях предложено подробное решение типового варианта, что позволит студентам самостоятельно справиться с решением своего задания.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определения следующих понятий: дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, его решение.
2. При каких условиях решение дифференциального уравнения первого порядка существует и единственно?
3. Какие вы знаете типы уравнений первого порядка? Расскажите о методах их решения.
4. Какие уравнения второго и высших порядков допускают понижение порядка? Приведите примеры таких уравнений и их решения.
5. Напишите общий вид однородного линейного уравнения n –го порядка. Докажите, что линейная комбинация его решений также есть решение этого уравнения.
6. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.
7. Напишите характеристическое уравнение для однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрите три возможных случая для корней характеристического уравнения и выпишите соответствующие формулы общего решения данного дифференциального уравнения.
8. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.
9. Напишите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с правой частью $f(x) = e^{lx}\Phi(x)$, $\Phi(x)$– многочлен n–ой степени, в случаях:

   А) l не является корнем характеристического уравнения;

   В) l является его корнем кратности k.
10. Запишите вид частного решения для правой части $f(x) = e^{ax}[\Phi(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]$; $\Phi(x)$, $Q(x)$ – многочлены n–ой степени.

11. Как найти частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, если его первая часть является суммой двух или более функций?
12. Изложите метод вариации произвольных постоянных решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

2. УПРАЖНЕНИЯ

1. Как называется уравнение вида $y' + \Phi(x)y = Q(x)$? Обоснуйте метод вариации произвольной постоянной для решения такого уравнения.
2. Дайте определение однородной функции двух переменных порядка k. Приведите примеры.
3. Определите тип уравнения $\frac{dx}{dy} = \Phi(y)x + x^a Q(y)$ и опишите метод его решения.
4. При каких условиях уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах? Как найти его общее решение?
5. Как понизить порядок уравнения $F(x, y', y'') = 0$?
6. Найдите общее решение уравнения $x'' + w^2 x = A\sin pt$ в случаях

A) $p \neq w$; B) $p = w$.

7. Докажите, что общее решение уравнения $x'' + w^2 x = \cos pt$ является периодическим тогда и только тогда, когда $w \neq 0$ и $\left|\frac{p}{w}\right|$ – рациональное число, отличное от 1.
8. При каких условиях все решения однородного линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами являются периодическими?

В качестве теоретического материала приведем способ решения дифференциальных уравнений, который присутствует не во всех лекционных курсах.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Этот метод является универсальным для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Обычно применяется в случае, когда правая часть уравнения не является функцией специального вида [2].

Изложение теоретического материала проведем для случая обыкновенного линейного д.у. 2-го порядка:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (1)$$

где $P(x), Q(x), R(x)$ – произвольные непрерывные функции аргумента x.

Рассмотрим однородное уравнение ($R(x)=0$), соответствующее неоднородному уравнению (1)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (2)$$

Следует напомнить важные свойства решений уравнения (2):

а) если Y_1 и Y_2 два каких-либо решения (2), то и $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ тоже решение (2) $(C_1, C_2 - const)$;

б) два решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ уравнения (2) называются линейно-независимыми, если $\dfrac{Y_1(x)}{Y_2(x)} \neq const$

Пусть известны два каких-либо линейно-независимых решения Y_1 и Y_2 однородного уравнения (2). Тогда:

в) общее решение однородного линейного дифференциального уравнения

2-го порядка представляется в виде:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2, \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные;

г) общее решение неоднородного уравнения (1) равно сумме общего решения (3) однородного д.у. (2) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (1) $y = Y + y_*$:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + y_* \tag{4}$$

Наиболее сложную задачу представляет собой нахождение частного решения y_*.Укажем теперь метод, позволяющий находить сразу общее решение (4) без промежуточного отыскания y_*.

Итак, пусть $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ – два любых линейно-независимых решения однородного уравнения (2).

Решение неоднородного уравнения (1) будем искать в виде аналогичном (3),но уже считая C_1 и C_2 независимыми функциями переменной x

$$y = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x). \tag{5}$$

Тогда $y' = C_1'Y_1 + C_2'Y_2 + \mathrm{C}_1Y_1' + C_2Y_2'$.

Положим $C_1'Y_1 + C_2'Y_2 = 0$. (6)

Тогда $y' = C_1Y_1' + C_2Y_2'$,

$$y'' = C_1'Y_1' + C_2'Y_2' + \mathrm{C}_1Y_1'' + C_2Y_2''. \tag{7}$$

Подставляя (5), (7) в (1) и группируя члены, получим:

$$C_1\left(Y_1'' + P\cdot Y_1' + Q\cdot Y_1\right) + C_2\left(Y_2'' + P\cdot Y_2' + Q\cdot Y_2\right) + \mathrm{C}_1'Y_1' + C_2'Y_2' = R(x).$$

Первые две скобки равны нулю, поскольку $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ – решения однородного д.у. (2). Остается соотношение

$$C_1'Y_1' + C_2'Y_2' = R(x). \tag{8}$$

Условия (6) и (8) образуют линейную алгебраическую систему для нахождения производных неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$$C_1'Y_1 + C_2'Y_2 = 0 \;,\; C_1'Y_1' + C_2'Y_2' = R(x). \tag{9}$$

Определитель этой системы является определителем Вронского, составленным для линейно-независимых решений д.у. (2) и поэтому нигде не обращается в нуль

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Откуда следует, что решение (9) существует и единственно:

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & Y_2 \\ R & Y_2' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \equiv -\frac{R(x)\cdot Y_2(x)}{\Delta(x)}, \qquad C_2'(x) = \begin{vmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_1' & R \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \equiv -\frac{R(x)\cdot Y_1(x)}{\Delta(x)}. \qquad (10)$$

После того как правые части (10) найдены, простым интегрированием находятся функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а значит и общее решение (5).

Изложенный метод называется методом вариации произвольных постоянных.

Пример. Решить уравнение $xy'' - y' = 3x^2$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение есть $xy'' - y' = 0$.

Делаем замену $p(x) = y'(x), \;\; y''(x) = p'(x)$:

$$xp' = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1| \equiv \ln|xC_1| \Rightarrow p = x\cdot C_1 \Rightarrow y' = x\cdot C_1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}C_1 + C_2.$$

Общее решение однородного уравнения: $y_0 = \frac{x^2}{2}\cdot C_1 + C_2$.

Таким образом, за линейно-независимые решения можно взять $Y_1 = \frac{x^2}{2}, Y_2 = 1.$

Так как $Y_1' = x, Y_2' = 0, R = 3x^2$, то система (9) примет вид:

$$C_1'\cdot\frac{x^2}{2} + C_2'\cdot 1 = 0, \qquad C_1'\cdot x + C_2'\cdot 0 = 3x^2$$

Из второго уравнения системы имеем $C_1' = 3x \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}x^2 + A$ (A=const).

Подставляя в первое уравнение $C_1' = 3x$, получим

$$\frac{3x}{2}x^2 + C_2' = 0 \Rightarrow C_2' = -\frac{3x^3}{2} \Rightarrow C_2 = -\frac{3x^4}{8} + B \quad (B\text{=const}).$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения есть

$$Y = C_1(x)\cdot\frac{x^2}{2} + C_2(x) \equiv \left(\frac{3}{2}x^2 + A\right)\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{3x^4}{8} + B\right),$$

$$Y = A\cdot\frac{x^2}{2} + B + \frac{3}{8}\cdot x^4.$$

Заметим, что структура полученного решения полностью соответствует виду (4). Действительно, $y_0 = A\cdot\frac{x^2}{2} + B$ представляет собой общее решение однородного уравнения, а $y_* = \frac{3}{8}x^4$ – частное решение неоднородного уравнения (в чем легко убедиться подстановкой).

<u>Замечание</u>. Особую наглядность и эффективность метод вариации произвольных постоянных приобретает для линейных д.у. с постоянными коэффициентами (P(x), Q(x)=const в уравнении (1)), поскольку в этом случае после решения соответствующего характеристического уравнения входящие в систему (9) линейно-независимые решения однородного уравнения (2) легко находятся.

<u>Пример</u>. Решить задачу Коши для д.у. 2-го порядка:

$$\begin{cases} y'' + y = tg(x) \\ y(0) = 1; y'(0) = 0 \end{cases}.$$

<u>Решение</u>. Правая часть данного уравнения не принадлежит ни к одному из специальных видов [2], поэтому для решения воспользуемся методом вариации.

Решаем однородное уравнение $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение: $l^2 + 1 = 0$, корни которого $l_{1,2} = \pm i$, а общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Легко проверить, что линейно-независимыми решениями будут следующие функции: $Y_1 = \sin x, Y_2 = \cos x$. Подставляя их в систему (9) с учетом того, что $R(x) = tgx$, получим

$$\begin{cases} \sin x\cdot C_1' + \cos x\cdot C_2' = 0 \quad , \\ \cos x\cdot C_1' - \sin x\cdot C_2' = tgx \quad . \end{cases}$$

Откуда, следуя (10),

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1, \quad C_1' = tgx \cdot \cos x = \sin x, \quad C_2' = -tgx \cdot \sin x.$$

Интегрируя по x последние два соотношения, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \sin x dx = -\cos x + A,$$

$$C_2(x) = -\int tgx \cdot \sin x dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \cos x dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x - \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) \right| + B.$$

При этом, общее решение исходного д.у. имеет вид:

$$Y = C_1(x)Y_1 + C_2(x)Y_2 = (A - \cos x)\sin x + \left(\sin x - \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) \right| + B\right)\cos x,$$

или, после приведения подобных, $Y = A\sin x + B\cos x - \cos x \cdot \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) \right|$.

Видно, что первые два слагаемых отвечают за общее решение однородного уравнения (A, B=const), а третий член представляет собой частное решение неоднородного уравнения. Ясно, что угадать каким-либо образом структуру частного решения априори было невозможно.

Подставляя в общее решение начальное условие y(0)=1, получим B=1. Чтобы найти вторую константу, продифференцируем общее решение по переменной x:

$$Y' = A\cos x - B\sin x + \sin x \cdot \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) \right| - 1.$$

Учитывая, что B=1, а $y'(0) = 0$, имеем A=1. Таким образом, частное решение найдено и имеет вид

$$Y = \sin x + \cos x \left(1 - \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) \right|\right)$$

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

Методом вариации произвольных постоянных решить следующие д.у. 2-го порядка:

1) $y'' - y' = \dfrac{1}{(e^x + 1)}$.

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

3) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x \cos x}}$.

4) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{\left(e^x \sin x\right)}$.

5) $xy'' - \left(1 + 2x^2\right) y' = 4x^3 e^{x^2}$.

6) $y'' - 2y' \cdot tgx = 1$.

7) $xy'' + (2x - 1) y' = -4x^2$.

8) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

9) $y'' + y = ctgx$.

10) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

11) $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$.

12) $y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos e^x$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА ТИПОВОГО РАСЧЕТА

1. Решить уравнение с разделяющимися переменными:

$y(1 + x^2) y' = x(y^2 - 1)$.

Решение:

$$y' = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{y^2 - 1}{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{y^2-1}{y}; \int \frac{ydy}{y^2-1} = \int \frac{xdx}{x^2+1};$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2-1)}{y^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1};$$

$$\ln\left|y^2 - 1\right| = \ln\left|x^2+1\right| + \ln C; y^2 - 1 = C(x^2+1);$$

$$y = \pm\sqrt{C(x^2+1)+1}.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения.

2. Решить однородное уравнение: $xy' \sin \dfrac{y}{x} + x = y \sin \dfrac{y}{x}$.

Решение:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\sin\frac{y}{x}};$$

$$\textit{Замена}: \ y = ux; y' = u'x + u;$$

$$u'x + u = u - \frac{1}{\sin u}; u' = -\frac{1}{x\sin u};$$

$$-\int \sin u du = \int \frac{dx}{x}; \cos u = \ln x + C;$$

$$u = \arccos(\ln x + C); y = x \cdot \arccos(\ln x + C)$$

Получили общее решение дифференциального уравнения.

3. Решить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения 1-го порядка: $\begin{cases} xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Решение:

$$\textit{Замена}: y = uv; y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x(x+1)} = 1; \ u'v + u\left(v' - \frac{v}{x(x+1)}\right) = 1;$$

$$а) \ v' - \frac{v}{x(x+1)} = 0; \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x^2 + x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(x+0,5)}{(x+0,5)^2 - 0,25}; \ \ln|v| = \ln\left|\frac{x+0,5-0,5}{x+0,5+0,5}\right|; v = \frac{x}{x+1};$$

$$б) \ u'\frac{x}{x+1} = 1; \ u = \int \frac{x}{x+1}dx; \ u = x + \ln|x| + C;$$

$$y = \frac{x}{x+1}\left(x + \ln|x| + C\right).$$

Получили общее решение дифференциального уравнения.

Подставим начальные условия и получим частное решение:

$$0 = \frac{1}{2}(1 + C); \Rightarrow C = -1;$$

$$y = \frac{x}{x+1}\left(x + \ln|x| - 1\right).$$

4. Решить уравнение Бернулли: $xy' - y = x^2y^2$.

Решение:

$$\text{Замена}: y = uv; y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = xu^2v^2;\ u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = xu^2v^2;$$

$$a)\ v' - \frac{v}{x} = 0;\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x}; v = x;$$

$$б)\ u'x = xu^2x^2;\ \int\frac{du}{u^2} = \int x^2dx; -\frac{1}{u} = \frac{x^3}{3} - \frac{C}{3}; u = \frac{3}{C - x^3};$$

$$y = \frac{3x}{C - x^3}.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения.

5. Решить уравнение: $y^3dx + \left(e^y + 3xy^2\right)dy = 0$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана: $\dfrac{\partial\left(y^3\right)}{\partial y} = 3y^2$, $\dfrac{\partial\left(e^y + 3xy^2\right)}{\partial x} = 3y^2$. Выполнено. Можно решать как уравнение в полных дифференциалах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y^3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = e^y + 3xy^2, \end{cases}$$

$$u = \int y^3dx = xy^3 + j\ (y); \frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2 + j\,'(y),$$

что по условию должно быть равно $e^y + 3xy^2$. Отсюда $j\,'(y) = e^y; j\ (y) = e^y + C$.

Таким образом, общий интеграл уравнения есть $xy^3 + e^y + C = 0$.

6. Решить дифференциальное уравнение: $xy'' + y' = 1 + x$.

В уравнение явно не входит функция y, поэтому сделаем замену: $y' = p(x); y'' = p'(x)$. Получим два уравнения 1-го порядка и последовательно решим их.

$$xp' + p = 1 + x; p' + \frac{p}{x} = \frac{1 + x}{x};$$

$$p = uv; p' = u'v + uv';$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1 + x}{x};$$

$$a) v' + \frac{v}{x} = 0; \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; v = \frac{1}{x};$$

$$b) u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}; u = \int (1+x) dx; u = x + \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$p = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + C_1 \right); y' = 1 + \frac{x}{2} + \frac{C_1}{x};$$

$$y = \int \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{C_1}{x} \right) dx;\ y = x + \frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Окончательно получили общее решение.

7. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}, \\ y(0) = 1; y'(0) = 2. \end{cases}$

В уравнение явно не входит переменная x, поэтому сделаем замену: $y' = p(y); y'' = p'(y)\,p(y)$. Решим два уравнения первого порядка. Сначала первое:

$$p'p = \frac{p}{\sqrt{y}}; \int dp = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}; p = 2\sqrt{y} + C_1;$$

$$y' = 2\sqrt{y} + C_1.$$

Затем найдем константу C_1, подставив начальные условия: $2 = 2 \cdot \sqrt{1} + C_1; C_1 = 0$.

Решаем теперь второе уравнение: $y' = 2\sqrt{y}; \int \dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx; \sqrt{y} = x + C_2; y = (x + C_2)^2$. Найдем вторую константу из начальных условий: $1 = (0 + C_2)^2; C_2 = 1$. Итак, получили частное решение уравнения в виде $y = (x+1)^2$.

8. Решить задачу Коши для д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами: $\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 2; y'(0) = 1. \end{cases}$

Составим характеристическое уравнение: $l^2 + 1 = 0$. Его корни: $l_{1,2} = \pm i$. Общее решение имеет вид: $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Найдем константы, подставив начальные условия:

$$2 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0; C_1 = 2,$$
$$1 = -C_1\sin 0 + C_2\cos 0; C_2 = 1.$$

Окончательно частное решение имеет вид: $y = 2\cos x + \sin x$.

9. Решить однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка: $y^{IV} - 4y'' = 0$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$l^4 - 4l^2 = 0; l^2\left(l^2 - 4\right) = 0,$$
$$l_{1,2} = 0; l_3 = 2; l_4 = -2.$$

Общее решение: $y_0 = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

10. Решить неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка: $y'' + 3y' = x^2 + 2$.

а) Решаем однородное уравнение:

$$\begin{array}{l} y'' + 3y' = 0;\ l^2 + 3l = 0;\ l_1 = 0; l_2 = -3; \\ y_0 = C_1 + C_2e^{-3x} \end{array}.$$

б) Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = x^2 + 2$ — многочлен 2-го порядка. Частное решение ищем в аналогичном виде: $y_* = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x^s$, где s-число совпадений корня правой части с корнями характеристического уравнения. В нашем случае s=1. Теперь найдем неопределенные коэффициенты A,B,C. Подставим $y_* = Ax^3 + Bx^2 + Cx; y_*' = 3Ax^2 + 2Bx + C; y_*'' = 6Ax + 2B$ в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения:

$$6Ax + 2B + 3\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 + 2;$$
$$9Ax^2 + (6A + 6B)x + (2B + 3C) = x^2 + 2;$$
$$9A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{9};$$
$$6A + 6B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{9};$$
$$2B + 3C = 2 \Rightarrow C = \frac{20}{27};$$
$$y_* = \frac{1}{27}\left(3x^3 - 3x^2 + 20x\right).$$

Общее решение неоднородного уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$Y = y_0 + y_* = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{27}\left(3x^3 - 3x^2 + 20x\right).$$

11. Решить неоднородное уравнение: $y'' + 4y' + 4y = \sin x$.

а) Решаем сначала однородное уравнение:

$$y'' + 4y' + 4y = 0;\ l^2 + 4l + 4 = 0;\ l_{1,2} = -2,$$
$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

б) Решаем неоднородное уравнение:

$$y_* = (A\sin x + B\cos x)x^s; (s = 0); y_*' = A\cos x - B\sin x;$$
$$y_*'' = -A\sin x - B\cos x;$$
$$-A\sin x - B\cos x + 4(A\cos x - B\sin x) + 4(A\sin x + B\cos x) = \sin x;$$
$$(-A - 4B + 4A)\sin x + (-B + 4A + 4B)\cos x = \sin x.$$

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1 \\ 3B + 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{25} \\ B = -\dfrac{4}{25} \end{cases};$$

$$y_* = \frac{1}{25}(3\sin x - 4\cos x).$$

Общее решение неоднородного уравнения: $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{25}(3\sin x - 4\cos x)$.

12. Решить неоднородное уравнение: $y'' + 4y = 8\sin x$.

а) Решаем однородное уравнение:

$$y'' + 4y = 0;\ l^2 + 4 = 0;\ l_{1,2} = \pm 2i,$$
$$y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

б) Решаем неоднородное уравнение:

$$y_* = (A\cos 2x + B\sin 2x)x^s; (s = 1);$$
$$y_* = (A\cos 2x + B\sin 2x)x;$$
$$y_*' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)x + (A\cos 2x + B\sin 2x);$$
$$y_*'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x);$$
$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-4A\sin 2x + 4B\cos 2x) + 4(A\cos 2x + B\sin 2x)x = 8\sin 2x;$$
$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 8\sin 2x;$$

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \end{cases}; \quad y_* = -2x\sin 2x.$$

Общее решение неоднородного уравнения: $Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x\sin 2x$.

13. Решить уравнение: $y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x} + 6\cos x$.

а) Решаем однородное уравнение:

$y'' - 5y' + 6y = 0;\ l^2 - 5l + 6 = 0;\ l_1 = 2;\ l_2 = 3;$
$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$

б) Решаем неоднородное уравнение в два этапа, учитывая, что правая часть состоит из двух слагаемых разного типа:

1) Решение для первого слагаемого:

$y_{1*} = (Ax + B)e^{2x}x^s; (s = 1); y_{1*} = \left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x};$

$y_{1*}' = (2Ax + B)e^{2x} + 2\left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x};$

$y_{1*}'' = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + B)e^{2x} + 2(2Ax + B)e^{2x} + 4\left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x};$

$2Ae^{2x} + 4(2Ax + B)e^{2x} + 4\left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x} - 5(2Ax + B)e^{2x} - 10\left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x} +$

$+6\left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x} = 4xe^{2x};$

$e^{2x}\left(2A + 4(2Ax + B) + 4\left(Ax^2 + Bx\right) - 5(2Ax + B) - 10\left(Ax^2 + Bx\right) + 6\left(Ax^2 + Bx\right)\right) =$

$= 4xe^{2x};$

$2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx - 10Ax - 5B - 10Ax^2 - 10Bx + 6Ax^2 + 6Bx = 4x;$
$2A - B - 2Ax = 4x;$

$$\begin{cases} -2Ax = 4x \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -4 \end{cases};$$

$y_{1*} = \left(-2x^2 - 4x\right)e^{2x}.$

2) Решение для второго слагаемого:

$y_{2*} = (M\cos x + N\sin x)x^s; (s = 0);$

$y_{2*}' = (-M\sin x + N\cos x);$

$y_{2*}'' = (-M\cos x - N\sin x);$

$-M\cos x - N\sin x - 5(-M\sin x + N\cos x) + 6(M\cos x + N\sin x) = 6\cos x;$

$(-M - 5N + 6M)\cos x + (-N + 5M + 6N)\sin x = 6\cos x;$

$$\begin{cases} 5M - 5N = 6 \\ 5N + 5M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = 0{,}6 \\ N = -0{,}6 \end{cases};$$

$y_{2*} = 0{,}6\cos x - 0{,}6\sin x.$

Общее решение имеет вид: $Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \left(-2x^2 - 4x\right)e^{2x} + 0,6\cos x - 0,6\sin x$.

14. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных: $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

а) Решаем однородное уравнение:

$$y'' + 2y' + y = 0;\ l^2 + 2l + 1 = 0;\ l_{1,2} = -1;$$
$$y_0 = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-x}.$$

б) Решаем неоднородное уравнение:

$$Y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x};$$
$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0 \\ C_1'(x)\left(-e^{-x}\right) + C_2'(x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases};$$
$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ -C_1'(x) + C_2'(x) - C_2'(x)x = \dfrac{1}{x} \end{cases};\Leftrightarrow \begin{cases} C_2'(x) = \dfrac{1}{x} \\ C_1'(x) = -1 \end{cases};\Leftrightarrow \begin{cases} C_2(x) = \int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C_4 \\ C_1(x) = \int -dx = -x + C_3 \end{cases};$$
$$Y = \left(-x + C_3\right)e^{-x} + \left(\ln|x| + C_4\right)xe^{-x}.$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде:

$$Y = C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} - xe^{-x} + \ln|x|e^{-x}.$$

15. Решить неоднородное уравнение 5-го порядка: $y^{V} - 3y^{IV} + 2y^{III} = 5e^x$.

а) Решаем однородное уравнение:

$$y^{V} - 3y^{IV} + 2y^{III} = 0;\ l^5 - 3l^4 + 2l^3 = 0;$$
$$l_{1,2,3} = 0;\ l_4 = 1;\ l_5 = 2;$$
$$y_0 = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5e^{2x}.$$

б) Решаем неоднородное уравнение:

$$y_* = Ae^xx^s;(s = 1);\ y_* = Axe^x$$
$$y_*' = Ae^x + Axe^x;\ y_*'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x;$$
$$y_*^{III} = 3Ae^x + Axe^x;\ y_*^{IV} = 4Ae^x + Axe^x;\ y_*^{V} = 5Ae^x + Axe^x;$$
$$5Ae^x + Axe^x - 3\left(4Ae^x + Axe^x\right) + 2\left(3Ae^x + Axe^x\right) = 5e^x;$$
$$5A + Ax - 12A - 3Ax + 6A + 2Ax = 5;$$
$$-A = 5;\ A = -5;$$
$$y_* = -5xe^x.$$

Общее решение имеет вид: $Y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5e^{2x} - 5xe^x$.

ЗАДАНИЯ К ТИПОВОМУ РАСЧЕТУ

1. Уравнение с разделяющимися переменными.
2. Однородное уравнение первого порядка (подстановка y=ux).
3. Линейное уравнение первого порядка (подстановка $y = uv$, или $x = uv$).
4. Уравнение Бернулли (та же подстановка, что и в п. 3).
5. Уравнение в полных дифференциалах.
6. Уравнение второго порядка, не содержащее явно y (подстановка $y' = p(x)$, $y'' = p'$).
7. Уравнение второго порядка, не содержащее явно x (подстановка $y' = p(y)$, $y'' = p'p$).

8, 9. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

10 – 15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (решение является суммой общего решения однородного уравнения в частного решения неоднородного уравнения); в п. 14 – решить методом вариации постоянных.

Если заданы начальные условия (поставлена задача Коши), то необходимо найти частное решение данного уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

ВАРИАНТ 1

$1. yy' = \frac{1-2x}{y}$

$2. (xy' - y)arctg\frac{y}{x} = x$

$3. xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0$

$4. xy' + 2y = \frac{2\sqrt{y}}{Cos^2 x}$

$5. (xy^2 + x^3)dx + (y^3 + x^2 y)dy = 0$

$6. y'' = \frac{x}{y'}, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 1$

$7. y''Cosy + y'^2 Siny = y'$

$8. y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2$

$9. y''' - 5y'' + 4y' = 0$

$10. y'' - 4y' = Sinx$

$11. y'' - y = x^2 + e^x$

$12. y'' + y = 5Cosx$

$13. y'' - 5y' + 4y = xe^x + 2x^2 Sin2x$

$14. y'' + 4y = \frac{2}{Cos2x}$

$15. y^{(V)} + y^{(IV)} = 1$

ВАРИАНТ 2

$1. (x + xy) + y'(xy + y) = 0$

$2. xy' = y + xSin\frac{y}{x}$

$3. (2x+1)y' = 4x - 2y, y(0) = 1$

$4. y' + 2y = y^2 e^x$

$5. (Cosx + 2xSiny)dx + x^2 Cosydy = 0$

$6. x^2 y'' = (y')^2$

$7. y^3 y'' = -1, y(1) = y'(1) = 1$

$8. y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

$9. y^{IV} - 18y''' + 81y'' = 0$

$10. y'' + 2y' = Cosx$

$11. y'' + y' = x + e^{-x}$

$12. y'' + y = 3Sinx$

$13. y'' - 18y' + 81y = x^3 e^{9x}$

$14. y'' + 4y = \frac{2}{Sin2x}$

$15. y''' + y' = 2e^{-x}$

ВАРИАНТ 3

$1. (1 + e^x) yy' = e^x$

$2. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

$3. xy' + y = \ln x + 1, y(1) = 3$

$4. x^2 y' + y^2 = yx$

$5. (Siny + \frac{1}{x})dx + (xCosy - \frac{1}{y})dy = 0$

$6. 2xy'' - y' = 0$

$7. y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$

$8. y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 9$

$9. y''' + 16y' = 0$

$10. y'' - 3y' = xe^{3x} + 1$

$11. y'' + 4y' = Sinx$

$12. y'' + 4y' = 2Sin2x - 3Cos2x$

$13. y'' - 2y' + 2y = 4xe^x (Sinx + 2)$

$14. y'' - 2y' + y = \frac{8e^x}{x}$

$15. y^{(IV)} - 4y = 2Sinx$

ВАРИАНТ 4

$1. y'Cos^2 x = y\ln y$

$2. (x - y)dx + (x + y)dy = 0$

$3. y'Cosx - ySinx = Sin2x, y(0) = 0$

$4. y'x + y = xy^2$

$5. 3(x^2 + 2xy^2)dx + 2(3x^2 y + 2y^2)dy = 0$

$6. y'' = \frac{y'}{x} + x$

$7. yy'' = (y')^2 - (y')^3, y(1) = 1, y'(1) = -1$

$8. y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

$9. y''' - y' = 0$

$10. y'' + 2y' = e^{-2x} + x$

$11. y'' - 4y' = 2Cosx$

$12. y'' + 4y' = Cos2x$

$13. y'' - 5y' + 4y = e^{4x} + (x^2 + 1)e^x Sin3x$

$14. y'' + 2y' + y = -\frac{e^{-x}}{3x}$

$15. y''' + y'' - 2y' = e^{-x}$

ВАРИАНТ 5

1. $(x^2y + x^2)dx + (x^3 - 1)(y - 1)dy = 0$
2. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$
3. $y'(1 + x^2) + 2xy = 2x, y(1) = 0$
4. $xy' + y = xy^2 \ln x$
5. $(y - \frac{Sin^2 x}{y^2})dy + (\frac{Sin2x}{y} + x)dx = 0$
6. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
7. $y'y'' = y'(y' + y), y(0) = 1, y'(0) = -1$
8. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$
9. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$
10. $y'' + 5y' + 4y = e^{-x} + x^2 + 3$
11. $y'' + 2y' = Cos2x$
12. $y'' + 9y = Sin3x$
13. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + 5e^xSinx$
14. $y'' + 2y' + y = 15e^{-x}\sqrt{x+1}$
15. $y''' + y = x^3$

ВАРИАНТ 6

1. $y' + \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} = 0$
2. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$
3. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}, y(0) = 2$
4. $y'Cosx + y^2 = ySinx$
5. $(2x^3 + y^2x)dx + (2y^3 + yx^2)dy = 0$
6. $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$
7. $2(y')^2 = (y - 1)y'', y(0) = 2, y'(0) = 1$
8. $y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$
9. $y''' - 8y'' + 16y' = 0$
10. $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x} + 2x$
11. $y'' - 2y' = Sin2x$
12. $y'' + 9y = Cos3x$
13. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{3x} + 3Cosx$
14. $y'' + 3y' + 2y = \frac{2}{e^x + 1}$
15. $y^{IV} + 9y'' = 4e^{-3x}$

ВАРИАНТ 7

1. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = 0$
2. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
3. $xy' + y - e^x = 0, y(1) = 0$
4. $y' + y^2Cosx = ytgx$
5. $x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(y^2 + x^2 + a^2)dy = 0$
6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x, y(1) = y'(1) = \frac{1}{2}$
7. $2yy'' = 1 + (y')^2$
8. $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$
9. $y''' - 4y' = 0$
10. $y'' - 2y' = 3x + xe^{3x}$
11. $y'' + 2y' - 3y = Cos2x$
12. $y'' + y = 2Sinx$
13. $y'' - 2y' + 5y = xCos2x - x^2Sin2x$
14. $y'' + 9y = 3tg3x$
15. $y^{IV} + 4y'' + 4y = -2Cos2x$

ВАРИАНТ 8

1. $SinyCosxdy = CosySinxdx$
2. $x^2y' = y^2 + xy$
3. $y' + 2xy = x, y(0) = 1$
4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{3}x^2y^4$
5. $y(3x^2 + y^2)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$
6. $y''(1 + \ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 1$
7. $yy'' = (y')^2$
8. $3y'' - 2y' - 8y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
9. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$
10. $y'' - 2y' = xe^{2x} + 3$
11. $y'' + 4y = Cos2x$
12. $y'' + 4y' = Cos3x$
13. $y'' - 2y' + 5y = e^xSin2x + (x^2 + 3)$
14. $y'' + 9y = 3ctg3x$
15. $y''' - 2y'' + y' = 3x^2 + x$

ВАРИАНТ 9

1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$
2. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$
3. $y'+2xy=xe^{-x^2},\ y(0)=\frac{1}{2}$
4. $y'+\frac{y}{x}-2x^2y^2=0$
5. $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx+y\sqrt{x^2+y^2}dy=0$
6. $xy''=y'$
7. $1+(y')^2=2yy'',\ y(1)=y'(1)=1$
8. $y''-2y'-2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$
9. $y'''-25y'=0$
10. $y''-7y'+12y=e^{4x}-x$
11. $y''-y'=Sinx$
12. $y''+4y'=Cos2x$
13. $y''-2y'+y=x^2e^x+Cos2x$
14. $y''+4y'=\frac{4}{Cos2x}$
15. $y'''-y'=e^x$

ВАРИАНТ 10

1. $y'=2\sqrt{y}\ln x$
2. $y^2+x^2y'=xyy'$
3. $y'-3x^2y=4x^3e^{x^3},\ y(0)=1$
4. $y'+2xy=2xy^3$
5. $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$
6. $(y')^2y''=1$
7. $y''-(y')^2+y'(y-1)=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=3$
8. $y''-2y'-3y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=3$
9. $y'''+4y'=0$
10. $y''+y'=Sin5x$
11. $y''+y=Cosx$
12. $y''-7y'+12y=e^{3x}+4$
13. $y''+4y'+4y=xe^{2x}+Sin2x$
14. $y''+4y'=\frac{4}{Sin2x}$
15. $y^{IV}+y''=1-3x$

ВАРИАНТ 11

1. $(1+e^{2x})y^2dy=e^{2x}dx$
2. $2x^3y'=(2x^2-y^2)y$
3. $y'-3x^2y=x^2,\ y(0)=\frac{2}{3}$
4. $xy'=4y+2x^2\sqrt{y}$
5. $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$
6. $y''-2y'ctgx=Sin^3x$
7. $yy''-(y')^2=y',\ y(1)=2,\ y'(1)=1$
8. $y''+2y'+y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$
9. $y'''+3y''+2y'=0$
10. $y''-2y'=e^{2x}+5$
11. $y''-2y'+10y=Sin3x$
12. $y''+4y=2Cos2x$
13. $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x+Sinx$
14. $y''+3y'+2y=\frac{3}{e^x+1}$
15. $y'''+4y''+3y'=3e^x$

ВАРИАНТ 12

1. $xy(1+x^2)dy=(1+y^2)dx$
2. $xy'Sin\frac{y}{x}+x=ySin\frac{y}{x}$
3. $xy'-\frac{y}{x+1}=x,\ y(1)=1$
4. $xy'+y=y^2$
5. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$
6. $xy''+y'=1+x$
7. $y''=\frac{y'}{\sqrt{y}},\ y(1)=1,\ y'(1)=2$
8. $y''+y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$
9. $y'''+7y''+12y'=0$
10. $y''+2y'=x^2+3$
11. $y''+16y'+64y=Sinx$
12. $y''+4y=2Sin2x$
13. $y''-5y'+6y=xe^{2x}+Cosx$
14. $y''+2y'+y=-\frac{e^{-x}}{x}$
15. $y^{VI}+2y^{IV}=e^{-x}$

ВАРИАНТ 13

$1. y'Cos2x = y\ln y$

$2. y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}, y(2) = 1$

$3. (x^2 - 1)y' + xy = \sqrt{x^2 - 1}$

$4. xy' - 3y = \frac{2x^2}{y}$

$5. (2x^2 + xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$

$6. y'' + 2x(y')^2 = 0, y(1) = -1, y'(1) = 1$

$7. y''ctgy + 2(y')^2 = 0$

$8. y'' - 8y' + 16y = 0, y(1) = -1, y'(0) = 4$

$9. y''' + 4y'' + 29y' = 0$

$10. y'' - 4y' = x^3 + 1$

$11. y'' + y' - 2y = 5Sin2x$

$12. y'' + 9y = 3Cos3x$

$13. y'' + 2y' + 2y = e^x(x+1) + 3Sinx$

$14. y'' + 2y' + y = 5e^{-x}\sqrt{x+1}$

$15. y^{VI} + 3y^{IV} = 2e^{2x}$

ВАРИАНТ 14

$1. (1 - e^{2x})y' = 2ye^x$

$2. x^2y' = x^2 + xy + y^2, y(1) = 0$

$3. y' = x^3 + y$

$4. xy' - y = \frac{x^5}{y^3}$

$5. \frac{xdy}{x^2 + y^2} = (\frac{y}{x^2 + y^2} - 1)dx$

$6. y''(x^3 + 1) = 3x^2y', y(1) = 5, y'(1) = 8$

$7. 2yy'' = (y')^2$

$8. y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

$9. y''' + 2y'' + 10y' = 0$

$10. y'' + 4y' = -xe^{-4x}$

$11. y'' + y' - 2y = 5Cos2x$

$12. y'' + 9y = 3Sin3x$

$13. y'' + 2y' + 2y = e^xCosx + e^x$

$14. y'' + 4y = 2tg2x$

$15. y^V + 2y^{IV} + y''' = 2$

ВАРИАНТ 15

$1. y'Sinx = y\ln y$

$2. (y^2 + 2xy)dx + x^2dy = 0$

$3. y' - ytgx = \frac{x^4}{Cosx}$

$4. (x+1)(y' + y^2) = -y, y(0) = 1$

$5. (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$

$6. x^2y'' + xy' = 2, y(1) = 1, y'(1) = 0$

$7. 3yy'' - (y')^2 = 0$

$8. y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$

$9. y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$

$10. y'' - 5y' = 5e^{5x} + 2$

$11. y'' - 5y' + 4y = Cosx + 3Sinx$

$12. y'' + y = 5Sinx$

$13. y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x} + Cos2x$

$14. y'' + y = 4tgx$

$15. y^V + y''' = 1$

ВАРИАНТ 16

$1. xydx = -(x+1)dy$

$2. y' = \frac{y}{x} + Cos^2\frac{y}{x}$

$3. x^2y' - x = 2(y - xy')$

$4. xy^2y' - x = x^2 + y^3, y(1) = 0$

$5. \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

$6. y'' = \frac{y'}{x}(1 + \ln\frac{y'}{x}), y(1) = y'(0) = 0$

$7. y''(1 + y) = 5(y')^2$

$8. y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

$9. y''' + 9y' = 0$

$10. y'' + 5y' = x^3 - 2x + 1$

$11. y'' + 2y' + y = 2Sin2x$

$12. y'' + y = 3Cosx$

$13. y'' + 5y' + 4y = e^{-x}Sinx + Cosx$

$14. y'' + y = 2ctgx$

$15. y''' + y'' = e^{-x}$

ВАРИАНТ 17

1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0, y(0)=1$

2. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

3. $(1-2xy)y'=y(y-1)$

4. $xydy=(y^2+x)dx$

5. $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$

6. $x^3y''+x^2y'=1, y(1)=1, y'(1)=-1$

7. $yy''-y'(1+y')=0$

8. $y''+4y'+13y=0,$

9. $y'''-4y''+3y'=0$

10. $y''+3y'=xe^{-3x}$

11. $y''-4y'+3y=2\cos 2x$

12. $y''+4y=\sin 2x$

13. $y''-4y'+3y=(x+2)e^x+x^2e^{5x}$

14. $y''-2y'+y=\dfrac{5e^x}{x}$

15. $y^{IV}-4y'''+4y''=5$

ВАРИАНТ 18

1. $y'ctgx+y=2, y(0)=-1$

2. $(y-x)dy+ydx=0$

3. $y-xy'=5(1+x^2)$

4. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$

5. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0,$

6. $y''x+xy'^2-y'=0,\ y(1)=2, y'(1)=2$

7. $y''y^3=2$

8. $y''-9y=0, y(0)=0, y'(0)=3$

9. $y'''+5y''+4y'=0$

10. $y''+3y'=3x^2+1$

11. $y''-14y'+49y=3\cos 3x$

12. $y''+4y=2\cos 2x$

13. $y''+4y'+13y=e^x\sin 3x$

14. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{2x}$

15. $y'''+9y'=\cos 2x$

ВАРИАНТ 19

1. $xy'+xy=y, y(1)=1$

2. $xy'+x=y+\dfrac{y^2}{x}$

3. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$

4. $2y'+\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$

5. $(1+2xy)dx+x^2dy=0$

6. $(1+x)y''+xy'^2=y', y(1)=-2, y'(1)=4$

7. $yy''+(y')^2=0$

8. $4y''+4y'+y=0, y(0)=1, y'(0)=0$

9. $y^{IV}-2y'''+2y''=0$

10. $y''+2y'=1+e^{-2x}$

11. $y''-y=5\sin x$

12. $y''+y=3\cos x$

13. $y''+y'-2y=(x^2+2)e^{-x}$

14. $y''+4y=tg2x$

15. $y^{IV}-2y''+y=-x^2$

ВАРИАНТ 20

1. $y'+\dfrac{2(1-x^3)}{x^4-4x+1}\sin 2y=0$

2. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}, y(1)=2$

3. $(3x-y^2)y'=y$

4. $(1+x^2)y'=2xy+x^2y^2$

5. $(2xy+\dfrac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2x)dy=0,$

6. $(1+x^2)y''-2xy'=0,\ y(0)=0, y'(0)=3$

7. $\dfrac{1+(y')^2}{y}=2y''$

8. $y''+p^2y=0, y(1)=2, y'(1)=1$

9. $y^{IV}+y''=0$

10. $y''-2y'=xe^x$

11. $y''-y=5\cos x$

12. $y''+y=4\sin x$

13. $y''+p^2y=x^2\sin x+x\cos x+2$

14. $y''+4y=ctg2x$

15. $y'''-5y''+4y'=x$

ВАРИАНТ 21

1. $2x^2yy'+y^2=2$
2. $(xy'-y)\sin\frac{7}{x}+x=0$
3. $(2e^y-x)y'=1$
4. $x^3\sin y dy=xdy-2ydx,\ y(1)=\frac{p}{2}$
5. $\left(y^2+\sin 2x\right)dx+\left(2xy-y^2\right)dy=0$
6. $y''(e^x+1)+y'=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=2$
7. $yy''=(y')^2$
8. $y''-5y'+4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$
9. $y^{IV}+2y''+y=0$
10. $y''+2y'=x^2+1$
11. $y''-y=3\cos 3x$
12. $y''+49y=\sin 7x$
13. $y''+4y'+13y=xe^{-2x}+\sin x+(x+1)\cos x$
14. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$
15. $y^{IV}+4y''=e^{-2x}$

ВАРИАНТ 22

1. $y'=xy^2+2xy$
2. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$
3. $(2x+y)dy=ydx+4\ln ydy$
4. $(2x^2y\ln y-x)y'=y,\ y(1)=1$
5. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy=0$
6. $(1+x^2)y''-2xy'=2(1+x^2)^2,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$
7. $2yy''+(y')^2=0$
8. $y''+4y'+4y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$
9. $y^{IV}-2y'''+y''=0$
10. $y''-2y'=e^{2x}+x$
11. $y''-y=5\sin 5x$
12. $y''+49y=7\cos 7x$
13. $y''+4y'+13y=e^{-2x}(x\cos 3x+\sin x)$
14. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{2x}$
15. $y'''+y''=\sin 2x$

ВАРИАНТ 23

1. $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$
2. $y'=\frac{y}{x}+ctg\frac{y}{x},\ y(2)=0$
3. $(x+y^2)dy=ydx$
4. $3xy-2y=\frac{x^3}{y^2}$
5. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$
6. $(x^2-1)y''-xy'=0,\ y(0)=y'(0)=1$
7. $y^2y''+y'=0$
8. $y''+3y'+2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=4$
9. $y^{IV}-6y''+9y=0$
10. $y''+5y'=x^2+4x+3$
11. $y''-4y=2\cos 2x$
12. $y''+4y=10\sin 2x$
13. $y''+2y'+y=(x^2+3x)e^{-x}+e^{-x}x\cos x$
14. $y''+3y'+2y=-\frac{1}{e^x+1}$
15. $y'''-8y=1-x$

ВАРИАНТ 24

1. $y\frac{dy}{dx}=(1-x)e^7$
2. $y'=\frac{y}{x}(\ln\frac{x}{y}+1),\quad y(1)=e$
3. $(\sin^2 y+xctgy)y'=1$
4. $y'-3y=xy^2$
5. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$
6. $y''(x^2+1)=2xy',\ y(0)=1,\quad y'(0)=3$
7. $y''=\frac{y'}{4\sqrt{y}}$
8. $y''+5y'=0,\ y(0)=0,\quad y'(0)=5$
9. $y^{IV}+2y'''+y''=0$
10. $y''-5y'=e^{5x}+2$
11. $y''-4y=3\sin 3x$
12. $y''+4y=2tg2x$
13. $y''-2y'+2y=x^3e^x\cos x$
14. $y''+4y=8\cos 2x$
15. $y^{IV}-4y''=e^{2x}$

ВАРИАНТ 25

1. $x^2yy'+1=y$
2. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x},\ y(2)=0$
3. $y'+ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$
4. $ydx+\left(x-0,5x^3y\right)dy=0$
5. $\left(2xy^3-x\right)dx-\left(1-3x^2y^2\right)dy=0$
6. $y''x\ln x=y'$
7. $2(y')^2=y''(y-1),\ y(1)=2,\ y'(1)=-1$
8. $y''-y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-2$
9. $y^{IV}+8y''+16y=0$
10. $y''-9y=e^{3x}+3$
11. $y''+3y'=\sin 3x$
12. $y''+4y=3\cos 2x$
13. $y''+4y'+13y=e^{-2x}x\sin x$
14. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$
15. $y'''+y''-y'=x$

ВАРИАНТ 26

1. $xy'=y^2-2y$
2. $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}+x,\quad y(1)=0$
3. $y=x(y'-x\cos x)$
4. $y'(x^3+y^2+3)=3x^2$
5. $3x^2(1+y)dx=\left(x^3-2y\right)dy$
6. $xy''-y'=x^2e^x$
7. $2yy''-(y')^2=1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$
8. $4y''-8y'+5y=0,\quad y(0)=0, y'(0)=4$
9. $y^{IV}-2y''+y=0$
10. $y''+3y'=x^2+2$
11. $y''+y'=\cos x$
12. $y''+4y=7\sin 2x$
13. $y''-2y'+y=xe^x+e^x\cos x$
14. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$
15. $y^{IV}+9y''=2$

ВАРИАНТ 27

1. $2yx^2dy=(1+x^2)dx$
2. $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$
3. $y'=2x(x^2+y)$
4. $xy'+y+y^2=0,\ y(8)=\dfrac{1}{47}$
5. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$
6. $y''-\dfrac{1}{x}y'=x^2$
7. $2yy''=1+(y')^2,\ y(0)=y'(0)=1$
8. $y''+6y'+9y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$
9. $y'''+y'=0$
10. $y''-3y'+2y=-4x+e^x$
11. $y''+2y'+2y=3\cos 3x$
12. $y''+y=7\sin x$
13. $y''-2y'+5y=x^2e^x+xe^x\sin 2x$
14. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$
15. $y'''+y=1+x$

ВАРИАНТ 28

1. $xy'=\sqrt{y}$
2. $y'-\dfrac{y}{x}=2$
3. $(xy'-1)\ln x=2y$
4. $y'-2y=-y^3,\ y(0)=1$
5. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$
6. $xy''=y'$
7. $yy''-(y')^2=y'',\ y(0)=1,\quad y'(0)=1$
8. $y''+4y'+29y=0,\ y(0)=0,\quad y'(0)=5$
9. $y^{IV}-2y''=0$
10. $y''+2y'+2y=2-e^x$
11. $y''+y'=5\sin x$
12. $y''+4y=12\cos 2x$
13. $y''+6y'+9y=xe^{-3x}+x^2e^{-3x}\sin x$
14. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$
15. $y'''-4y'=e^{2x}$

ВАРИАНТ 29

1. $y'(x^2+1)=xy, \quad y(0)=1$
2. $(x^2-y^2)dy-xydx=0$
3. $x(y'-y)=e^x$
4. $(4-x^2)y'+2xy=y^2\sin x$
5. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$
6. $y''tgx=y'+1$
7. $y''=e^{2y}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$
8. $y''+2y'+10y=0, y(0)=0, \quad y'(0)=-2$
9. $y'''-y'=0$
10. $y''+10y'+25y=5e^{-5x}$
11. $y''+9y=2\sin 3x$
12. $y''-9y=21\cos 3x$
13. $y''+4y'+5y=e^{-2x}(\sin 2x+x^2\cos 2x)$
14. $y''+y=ctgx$
15. $y'''-4y''+3y'=x+2$

ВАРИАНТ 30

1. $(x^3+1)y'=3x^2y, y(1)=1$
2. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$
3. $x^2y'+xy+1=0$
4. $y'+\dfrac{y}{x+1}=-\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$
5. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$
6. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$
7. $y''ctgy=(y')^2, y(0)=\dfrac{p}{3}, y'(0)=2$
8. $y''+10y'+25y=0, y(0)=5, y'(0)=0$
9. $y'''-13y''+12y'=0$
10. $y''+5y'=10e^{-5x}+5$
11. $y''-9y=3\cos 3x$
12. $y''+9y=4\sin 3x$
13. $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$
14. $y''+y=tgx$
15. $y'''+9y'=\sin 3x$

Содержание