ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

I. Знакопостоянные. (++++…)

- **Необходимый** признак сходимости: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$.
- Достаточные признаки:

1) Признак **сравнения**.

Ряд сравнивается со стандартным: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}}$; $\begin{cases} p > 1 & - \text{сходится} \\ p \le 1 & - \text{расходится} \end{cases}$

Теорема сравнения:
а) ряд сходится, если его члены меньше членов сходящегося ряда;
ряд расходится, если его члены больше членов расходящегося ряда.

б) ряды ведут себя одинаково, если $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = Const (\ne 0)}$.

2) Признак **Даламбера**.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1 - & \text{сх} \\ >1 - & \text{расх} \\ =1 - & ? \end{cases}$$

3) **Радикальный** признак **Коши**.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 - & \text{сх} \\ >1 - & \text{расх} \\ =1 - & ? \end{cases}$$

4) **Интегральный** признак **Коши**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \to \int_1^{\infty} a(x)dx = \begin{cases} = Const - \text{сх} \\ = \infty - \text{расх} \end{cases}.$$

II. Знакочередующиеся. (+-+-+-…)

Абсолютная сходимость:

если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно сходится.

Условная сходимость (признак **Лейбница**): если выполняются

условия Лейбница $\boxed{\begin{cases} \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \\ |a_{n+1}| < |a_n| \end{cases}}$, то ряд условно сходится.

III. Знакопеременные. (+++---+++---…)

Проверяются только на абсолютную сходимость.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Интервал сходимости находится по одной из формул:

1) Даламбера: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$

2) Коши: $\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{u_n(x)} \right| < 1$

Для **степенных** рядов $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ получают выражение вида:

$$|x - x_0| < R,$$

где R – радиус сходимости.
Границы интервала проверяются на сходимость отдельно.
Интервал с проверенными границами наз. **Областью сходимости ряда**.

СТАНДАРТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
(ряд Маклорена)

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$

3. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots$

5а) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; **5б)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

Ряды (1), (2), (3) сходятся при $|x| < \infty$; ряды (4), (5) при $|x| < 1$ (границы проверяются отдельно).
P.S. Если требуется получить разложение в окрестности произвольной точки $x = x_0$, то делают замену переменных при $x - x_0 = t$ и получают разложение по степеням t.