Министерство образования и науки Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА имени И.М. ГУБКИНА

Д.Л. Белоцерковский

ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ.

Методические указания

Москва 2014

УДК 517.272
Б43

Белоцерковский Д.Л.
Полное исследование функции. Методические указания – М.: РГУ нефти и газа им И.М. Губкина, 2014. –33 с.

Настоящее учебно-методическое пособие входит в серию учебно-методических изданий, посвященных различным разделам курса высшей математики для технических высших учебных заведений. Изложены основные понятия и факты, связанные с темами математического анализа, знание которых необходимо для построения графиков функций одной переменной. Приведены подробно разобранные примеры, проиллюстрированные большим числом рисунков. В конце пособия содержатся расчетно-графическая работа на закрепление полученных в ходе изучения пособия навыков.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина и подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:
Зав. лабораторией методов анализа и синтеза сетевых протоколов Института проблем передачи информации Российской академии наук (ИППИ РАН),
доктор технических наук А.И. Ляхов,
Доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина,
кандидат физико-математических наук В.И. Иванов

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) №3 студенты, обучающиеся по направлению «Нефтегазовое дело», обязаны знать основы математического анализа, уметь решать типовые задачи курса, используя методы высшей математики, а также владеть методикой построения математических моделей и их последующим анализом. Кроме этого, студент должен уметь использовать в своей работе персональный компьютер для численного решения, стоящих перед ним профессиональных задач.

В связи с вышесказанным, особое значение имеет применение основ дифференциального исчисления к вопросу полного исследования функции и последующим построением ее графика. Умение построить график требуемой функции, которая, возможно, описывает важное физическое явление или химический процесс, является весьма полезным и даже необходимым навыком, которым следует овладеть студенту в рамках читаемого ему курса «Математика».

Для выполнения указанных задач студенту требуются весьма серьезные как теоретические знания дифференциального исчисления (знание свойств функции, умение вычислять и анализировать первую и вторую производную рассматриваемой функции (см., например, [1])), так и практические навыки, заключающийся в умении правильно схематично построить требуемый график [2].

Однако точность выполненного от руки графика часто оставляет желать лучшего. В некоторых случаях не только вычисление первой и, особенно, второй производной требует громоздких вычислений, но и анализ полученных в результате дифференцирования равенств или неравенств затруднен их трансцендентностью (т.е. невозможностью получить аналитический результат).

Применение различных систем компьютерной алгебры (***Mathematica, Mapple, MathLab, MathCad***) решает эту проблему [3]. Построенные с их помощью графики выполнены со значительно большей точностью, чем сделанные от руки. Кроме того, системы компьютерной алгебры позволяют получить координаты точек экстремума и перегиба даже в случае трансцендентности уравнений, решив их приближенно, причем с заданной точностью. Это же касается определения промежутков монотонности и выпуклости.

Важно отметить, что умение применить системы компьютерной алгебры повышают уровень компьютерной грамотности студента.

В данной работе особое внимание уделено применению системы ***Mathematica***.

Данное методическое пособие разработано с целью научить студента строить графики функций как вручную, так и с помощью системы ***Mathematica***. (Для первоначального ознакомления с этой системой компьютерной алгебры может быть рекомендовано пособие [4], а также любые другие соответствующие пособия)

Для закрепления навыков и знаний, изложенных в методическом пособии, студенту предлагается выполнить расчетно-графическую работу (РГР) «Полное исследование функции с использованием системы компьютерной алгебры».

Методическое пособие будет полезно студентам не только направления «Нефтегазовое дело», но и остальных направлений, в учебные планы которых входит дисциплина «Математика».

Введение

Прочтение пособия следует начинать с части 1, где рассмотрены все необходимые теоретические сведения из курса математического анализа, которые достаточно подробно представлены в лекционном курсе, читаемом обычно в первом семестре обучения студентов РГУ нефти и газа им. Губкина И. М. по дисциплине «Высшая математика». Сформулирован также общий план полного исследования функции, приводящий к построению графика.

В части 2 рассмотрены шесть разнообразных примеров, иллюстрирующие сформулированные в части 1 сведения. Полное исследование функции проводится в соответствии с указанным ранее общим планом, который поможет студенту успешно усвоить навыки последующего за исследованием построения графика, которое завершает задачу полного исследования. Глава 2 является подготовительной для перехода студента к выполнению рейтинговой расчетно-графической работы (РГР) из части 3.

Часть 3 посвящена выполнению студентами РГР. В пункте 3.1 студенту предлагается ознакомиться с правилами выполнения РГР. После ознакомления студент переходит к выполнению указанного преподавателем варианта из пункта 3.2.

Часть 1. Теоретические вопросы полного исследования функции.

Мы желаем изучить все особенности поведения функции $y = f(x)$ и построить ее график. Для этого используется как сведения из элементарной математики, так и важные факты из курса высшей математики, сформулированные далее.

1.1. Необходимые сведения из элементарной математики.

Область определения функции $y = f(x)$ (ООФ) - это множество значений аргумента x, при которых функция $y = f(x)$ имеет смысл. Для построения графика важно знать, при каких значениях x, график может быть построен.

Функция называется ***четной,*** если $f(-x) = f(x)$ для любых x из ООФ. Если функция четная, то график функции достаточно построить только для $x \geq 0$, а часть графика при $x < 0$ является симметричной части графика при $x > 0$ относительно оси OY.

Функция называется ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$ для любых x из ООФ. Если функция нечетная, то график функции достаточно построить только для $x \geq 0$, а часть графика при $x < 0$ является симметричной части графика для $x > 0$ относительно начало координат.

1.2. Периодичность.

Функция называется ***периодической***, если существует такая наименьшая константа $T > 0$, что для всех x из области определения выполнено $f(x+T) = f(x)$. Например, все тригонометрические функции являются периодическими.

1.3. Асимптоты.

Асимптоты кривой функции $y = f(x)$ – это прямая, расстояние от точки которой до точки кривой стремится к нулю, при удалении точки кривой в бесконечность. Асимптоты классифицируются по углу наклона этой прямой к оси Ox. Если угол наклона равен 90°, то такая асимптота называется ***вертикальной***. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой кривой функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty$, т.е. предел рассматривается с обеих сторон приближения (справа и слева) к точке x_0. Если такой предел существует только справа или только слева, то говорят о ***правой*** и ***левой вертикальной асимптоте*** соответственно. Если угол наклона не равен 90°, то такая асимптота называется ***наклонной***. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой кривой функции $y = f(x)$, если выполнено: 1) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)/x) = k$ и 2) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$. В случае, если $k = 0$, то асимптота называется ***горизонтальной***. Если хотя бы один предел не существует, то наклонной асимптоты не существует.

1.4. Минимум и максимум функции.

Определим, что ***минимум*** функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, называется значение $f(x_0)$, если для всех точках, достаточно близких к x_0, выполнено $f(x_0) \le f(x)$. Наоборот, ***максимумом*** функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ назовем значение $f(x_0)$, если во всех точках x, достаточно близких к x_0, выполнено $f(x_0) \ge f(x)$. Максимум и минимум функции $y = f(x)$ обобщаются общим понятием – ***экстремумом***. ***Стационарной точкой*** функции $y = f(x)$, называется значение аргумента $x = x_0$ этой функции, удовлетворяющее уравнению $f'(x_0) = 0$.

Заданные определения проиллюстрируем соответствующими важными фактами из курса математического анализа.

Важнейшими являются следующие утверждения:

1) Если $y = f(x)$, при $x = x_0$ имеет производную $f'(x_0)$ и является максимумом или минимумом, то $f'(x_0) = 0$. Это условие является необходимым условием существования экстремума (теорема Ферма).

2) Если $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0) = 0$, а также производные в точках, правее и левее точки $x = x_0$, (обычно говорят, что условие выполнено в окрестности точки $x = x_0$), то:

а) если $f'(x) > 0$, при $x < x_0$, и $f'(x) < 0$, при $x > x_0$, то $y = f(x_0)$ является максимумом функции в окрестности точки $x = x_0$, а точка $x = x_0$ называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$.

б) если $f'(x) < 0$, при $x < x_0$, и $f'(x) > 0$, при $x > x_0$, то $y = f(x_0)$ является минимумом функции в окрестности точки $x = x_0$, а точка $x = x_0$ называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$.

Однако, в некоторых случаях это условие весьма затруднительно для проверки, так как часто требует решения весьма нетривиальных неравенств.

Сформулированные выше необходимое условие существования экстремума не является достаточным. Действительно, если рассмотреть функцию $y = x^3$, то мы увидим, что в точке $x = 0$, имеем $y'(0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума.

Сформулируем достаточное условие существования экстремума.

Пусть $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ первую и вторую производные.

Тогда, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то точка $x = x_0$ является точкой минимума. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то точка $x = x_0$ является точкой максимума.

1.5. Выпуклость вверх и вниз. Точки перегиба функции.

Рассмотрим точку x_0, для которой существует $f'(x_0)$. Построим в этой точке касательную к кривой $y = f(x)$. (рис.1)

На рисунке 1 в окрестности точки $x = x_0$ справа, кривая $y = f(x)$ расположена ниже построенной касательной. В таком случае говорят, что кривая $y = f(x)$ ***выпукла вверх***.

На том же рисунке в окрестности точки $x = x_0$ слева, кривая $y = f(x)$ расположена выше построенной касательной и тогда говорят, что кривая $y = f(x)$ ***выпукла вниз***.

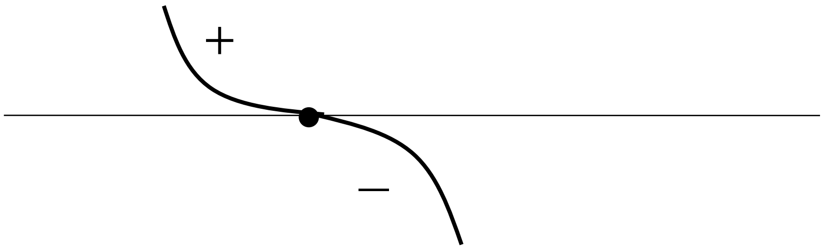


Рис.1. Выпуклость функции вверх и вниз.

Сформулируем важное утверждение, которое характеризует выпуклость функции.

Пусть $y = f(x)$ имеет производную $f''(x_0)$. Тогда:

1) если $y = f''(x_0) < 0$, то кривая $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ выпукла вверх.

2) если $y = f''(x_0) > 0$, то кривая $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ выпукла вниз.

Эти условия являются достаточными условиями выпуклости вниз и вверх.

Снова рассмотрим точку x_0 на рисунке 1. Пусть $f''(x_0) = 0$. Если в окрестности точки $x = x_0$ кривая $y = f(x)$, например при $x < x_0$, расположена по одну сторону от касательной, а при $x > x_0$ - по другую ее сторону, то точка $x = x_0$ называется ***точкой перегиба*** (на рис. 1 точка перегиба выделена).

1.6. Общий план полного исследование функции с помощью первой и второй производной с последующим построением ее графика.

Подытожим сказанное выше. Исследование функции для построения графика следует проводить в следующей последовательности:

1) найти область определения функции;

2) проверить функцию на четность или нечетность;

3) проверить функцию на периодичность;

4) найти нули функции, т.е. найти корни уравнения $f(x)=0$;

5) найти асимптоты;

6) вычислив производную функции $f'(x)$, найти максимумы и минимумы функции $y=f(x)$, а также промежутки ее возрастания и убывания;

7) вычислив вторую производную $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх и вниз.

8) используя пункты 1-7, построить график функции $y=f(x)$.

Часть 2. Примеры построения графиков функций с использованием системы компьютерной алгебры «MATHEMATICA».

В части 1 сформулирован общий план полного исследования функции. Применим этот план на конкретных примерах. При рассмотрении сохраним принятую в пункте 6 части 1 нумерацию.

I. Провести полное исследование и построить график функции $y = \ln\cos x$. (В остальных примерах задание аналогичное примеру I, поэтому мы будем опускать его формулировку).

1) Для нахождения ООФ решим неравенство $\cos x > 0$. Графически это неравенство решено на рисунке 2. Решение указанного неравенства может быть записано в виде совокупности интервалов $x \in (-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k), k \in Z$.

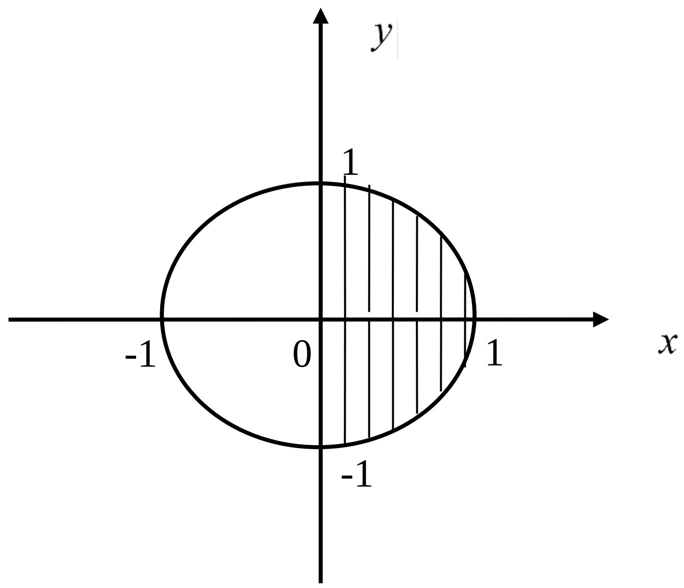


Рис.2. Решение неравенства $\cos x > 0$.

2) Указанная функция является четной функцией, так как $f(-x) = \ln(\cos(-x)) = \ln(\cos x) = f(x)$

3) Функция является периодической с периодом 2π, так как $f(x)=\ln(\cos x)=\ln(\cos(x+2\pi))=f(x+2\pi)$, и значение $T=2\pi$ является минимальным возможным значением периода.

4) Найдем нули функции, $\ln(\cos x)=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=2\pi k,\ k\in Z$.

5) Определим асимптоты данного графика.

Найдем вертикальные асимптоты. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0+0}(\ln x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pi/2-0}(\ln\cos x)=-\infty$. Это означает, что в окрестности точки $x=\pi/2$ слева (то есть $x\to\pi/2-0$) рассматриваемая функция стремится к бесконечности. Следовательно, левой вертикальной асимптотой являются прямая $x=\pi/2$. Из периодичности функции следует, что левыми асимптотами функции являются прямые $x=\pi/2+2\pi k, k\in Z$. Из четности функции и симметрии ее графика относительно оси Oy можно сделать вывод, что правыми асимптотами являются прямые $x=-\pi/2+2\pi k, k\in Z$.

Перейдем к поиску наклонной асимптоты $y=kx+b$.

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$. Но такой предел не существует, так как $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln\cos x)$ не определен в связи с тем, что $\cos x$ при $x\to\infty$ может принимать любые значения между -1 и 1. Поэтому данная функция не имеет наклонных асимптот.

6) Вычислим первую производную: $y'=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$. Стационарные точки, удовлетворяющие уравнению $y'=0=-\operatorname{tg} x \Rightarrow x=\pi k,\ k\in Z$. Отметим знаки первой производной на числовой прямой при $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ (см. рис. 3).

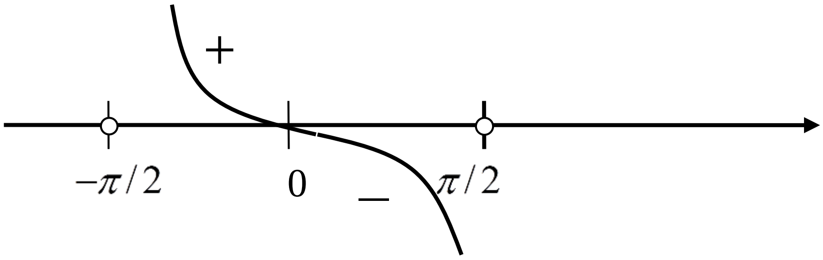


Рис.3. Поведение функции $y' = -\operatorname{tg} x$.

Заметим, что при $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ и $-3\pi/2 \le x \le -\pi/2$, производная не определена, так как в эти промежутки не входят в ООФ. Таким образом, функция растет при $-\pi/2 < x < 0$, и убывает при $0 < x < \pi/2$. Значение $x = 0$ является точкой максимума. Так как функция является 2π-периодической, то точками максимума являются значения $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

7) Вычислим вторую производную: $y'' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Анализ полученной формулы показывает, что $y'' < 0$ при любых x, принадлежащих области определения. Следовательно, график является выпуклым вверх на всей ООФ и не имеет точек перегиба.

Построим график изученной функции, как и все последующие за ним, с помощью системы ***Mathematica*** (см. рис.4).

- **`Plot[(Log[Cos[x]]},{x,-5Pi/2,5Pi/2}]`**

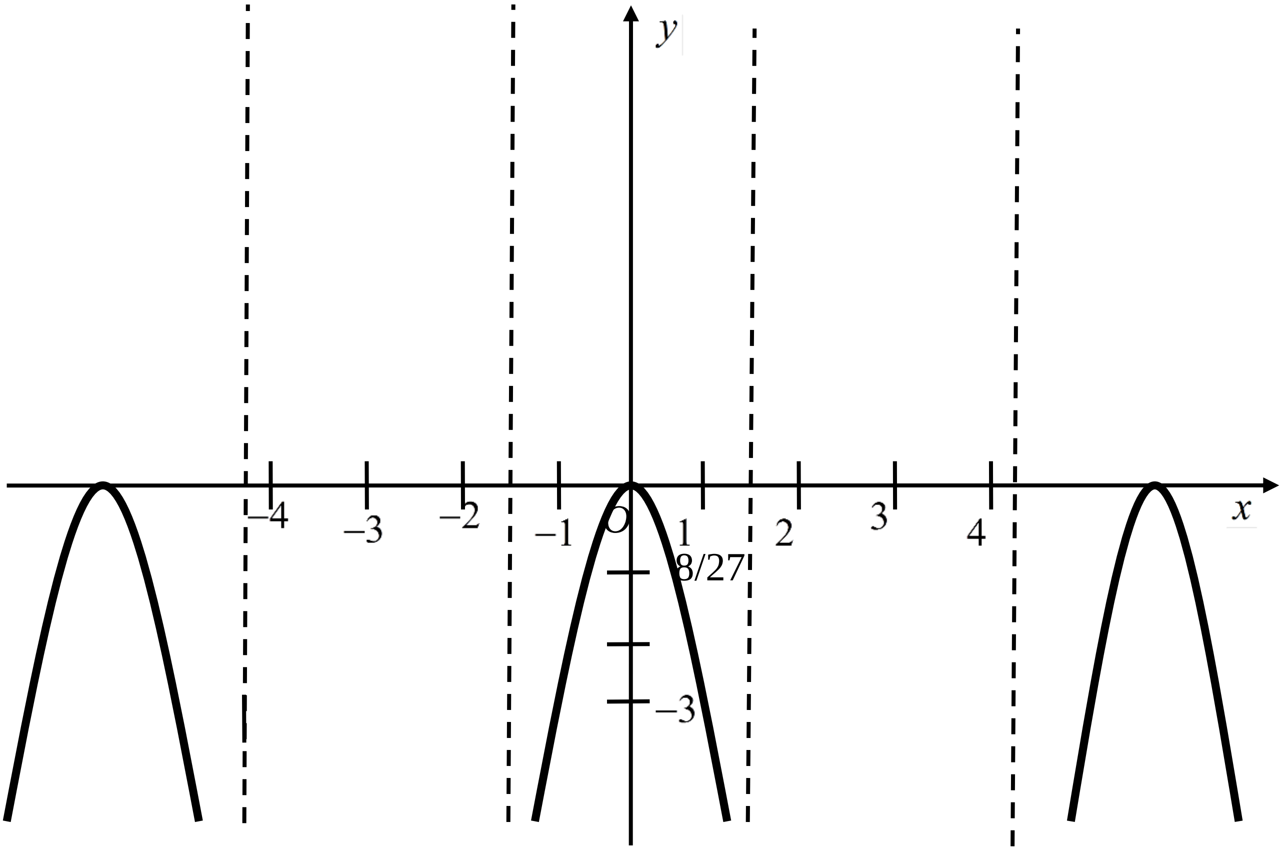


Рис.4. График функции $y = \ln\cos x$.

Определив промежуток по оси Ox в пределах $x \in (-5\pi/2, 5\pi/2)$, получаем картинку, изображающую три из бесконечного числа частей графика периодической функции.

Пример II поможет нам научиться строить наклонные асимптоты и более тщательно проанализировать поведение второй производной.

II. $y = \dfrac{(x+1)^3}{3x^2 + 6x + 2}$.

1) Область определения этой функции – вся числовая прямая, за исключением двух значений, обнуляющих знаменатель: $x_1 \neq -1 + \sqrt{3}/3$, $x_2 \neq -1 - \sqrt{3}/3$.

2) Указанная функция является функцией общего вида, так как $f(-x) \neq -f(x)$

3) Функция не является периодической.

4) Нуль у функции один, $x=-1$.

5) Определим асимптоты данного графика. Так как $\lim\limits_{x\to x_1} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2} y=\infty$, то имеем две вертикальные асимптоты $x_1=-1+\sqrt{3}/3$, $x_2=-1-\sqrt{3}/3$. Найдем наклонную асимптоту.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^3}{x(3x^2+6x+2)}=\frac{1}{3}=k,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{3x^2+6x+2}-\frac{1}{3}\cdot x\right)=\frac{1}{3}=b.$$

Прямая $y=(x+1)/3$ является асимптотой графика функции при $x\to\pm\infty$.

6) Вычислим первую производную: $y'=\dfrac{(x+1)^2x(x+2)}{(3x^2+6x+2)^2}$ (получите этот результат сами!). Стационарные точки: $x_1=-2,\ x_2=-1, x_3=0$. Отметим знаки первой производной на числовой прямой (см. рис. 5).

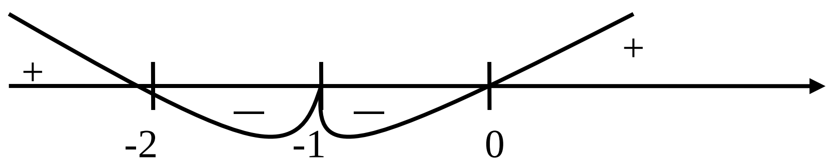


Рис.5. Поведение производной функции $y=\dfrac{(x+1)^3}{3x^2+6x+2}$.

Таким образом, функция растет при $x<-2$ и $x>0$, и убывает при $-2<x<-1$ и $-1<x<0$. Значение $x=-2$ является точкой минимума, значение $x=0$ - точкой максимума.

7) Вычислим вторую производную:

$$y''=\frac{54(x+1)(x^2+2x+2)}{(3x^2+6x+2)^3}=\frac{54(x+1)((x+1)^2+1)}{(3x^2+6x+2)^2(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})}.$$

Анализ полученной формулы показывает, что $y''>0$ при $x\in(-\infty,-1-\sqrt{3}/3)\cup(-1,-1+\sqrt{3}/3)$, и график является выпуклым вверх. Также $y''>0$ при $x\in(-1-\sqrt{3}/3,-1)\cup(-1+\sqrt{3}/3,\infty)$, и график является выпуклым вниз, а точка $x=-1$ является точкой перегиба.

Построим график изученной функции с помощью системы ***Mathematica*** (см.рис.6).

- **`Plot[(x+1)^3/{3x^2+6x+2},{x,-3,3},PlotRange → {{-3,3},{-1,1}}]`**

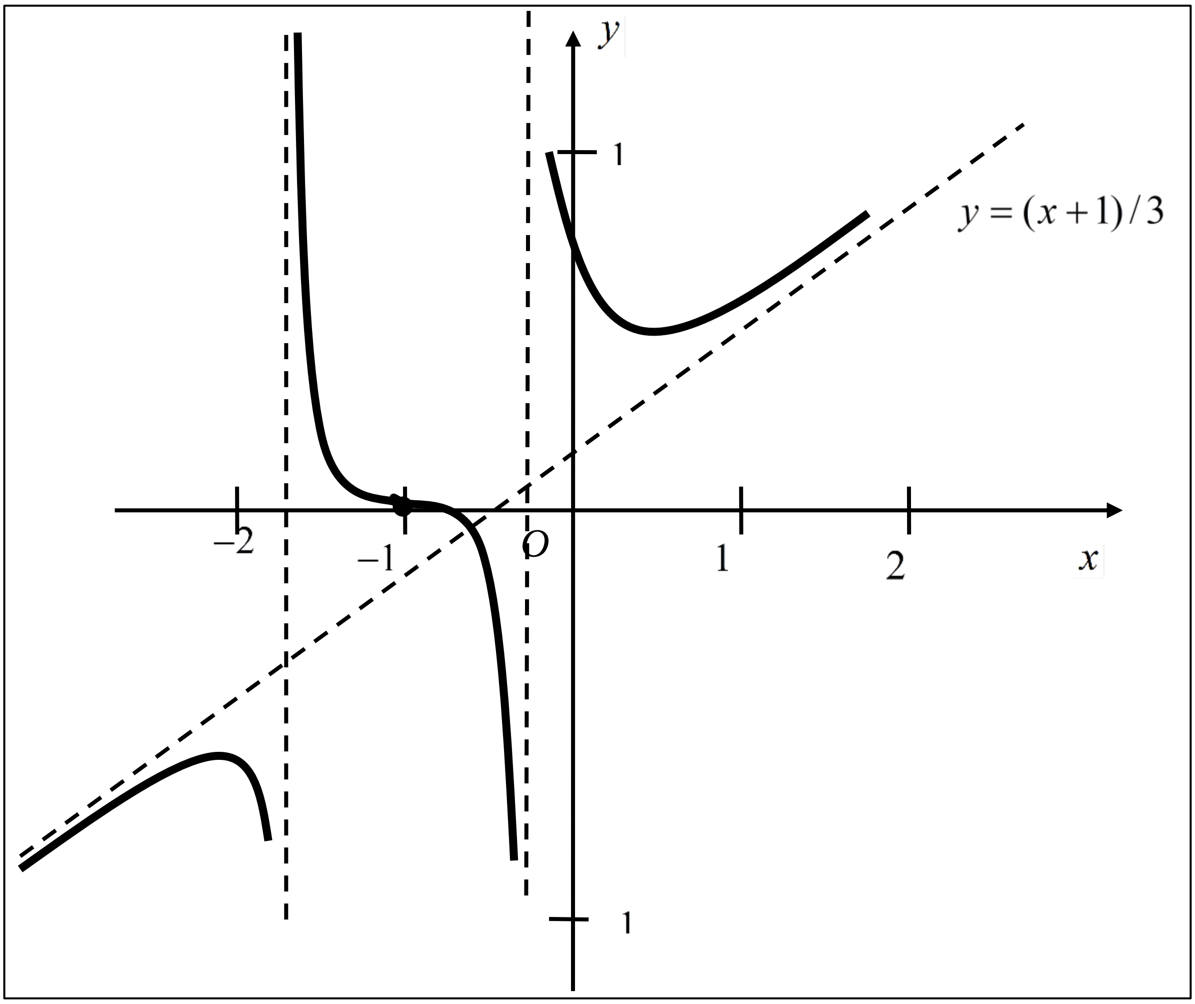


Рис.6. График функции $y=(x+1)^3/(3x^2+6x+2)$.

Удобный масштаб, достигнутый с помощью команды **`PlotRange,`** помогает понять поведение функции при $-1\le y\le 1$.

Пример III поучителен с точки зрения изучения поведения первой производной.

III. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

1) Область определения этой функции – вся числовая прямая.

2) Указанная функция является функцией общего вида, так как $f(-x)\neq -f(x)$.

3) Функция не является периодической.

4) Нулями функции являются $x_1=0,\ x_2=1$.

5) Определим асимптоты данного графика. Вертикальных асимптот нет. Осуществим поиск наклонной асимптоты.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=-1=k,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-x+1\cdot x\right)\to\infty$$

Этот результат означает, что наклонных асимптот также нет.

6) Вычислим первую производную $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-1$. Найдем единственную стационарную точку: $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x}=2/3\Rightarrow x=8/27$. Заметим, что при $x=0$ производная не существует. Отметим знаки первой производной на числовой прямой (см. рис. 7).

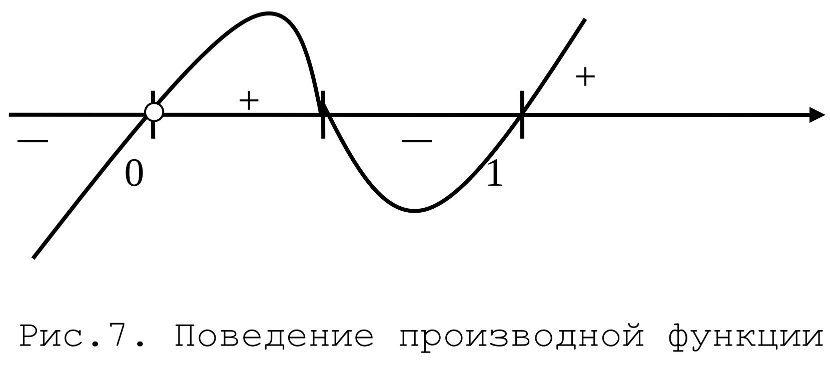
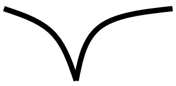


Рис.7. Поведение производной функции $y=\sqrt[3]{x^2}-x$

Так как в окрестности точки $x = 0$ производная функции $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ принимает значения различные по знаку, а в точке $x = 0$ имеем $\lim\limits_{x \to 0-0} y' \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} y' \to +\infty$, то в этом случае поведение функции $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ в окрестности точки $x = 0$ изображается следующим образом  . В литературе такое поведение функции называется «ласточкин хвост».

7) Вычислим вторую производную:

$y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0$, для любых $x \neq 0$. Таким образом, функция $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ выпукла вверх при всех $x \neq 0$, и точек перегиба нет.

Построим график функции с помощью системы ***Mathematica.***

- `Plot[x^{2/3}-x,{x,-2,2}]`

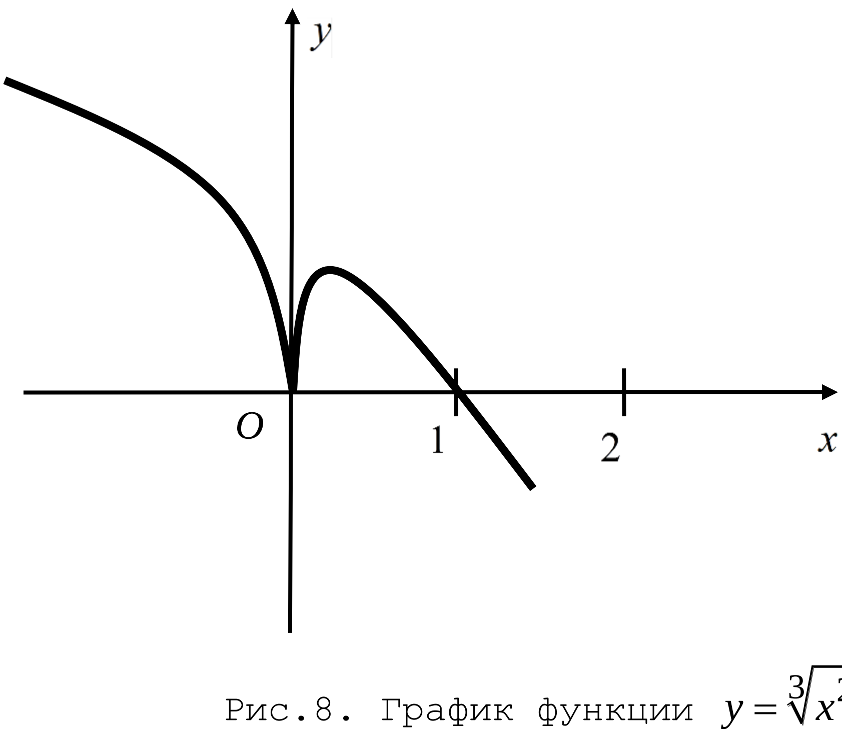


Рис.8. График функции $y = \sqrt[3]{x^2} - x$

Пример IV помогает понять не рассмотренные ранее особенности поведения вертикальной асимптоты и второй производной.

IV. $y = 2^{1/x}$.

1) Область определения этой функции $x \neq 0,\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2) Указанная функция является функцией общего вида, так как

$f(-x) = 2^{-1/x} \neq -f(x) = -2^{1/x}$

3) Функция не является периодической.

4) Нулей у функции нет, так как уравнение $2^{1/x} = 0$ не имеет решений.

5) Определим асимптоты данного графика.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2^{1/x}}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 = k,\ \lim_{x \to \pm\infty} (2^{1/x} - 0 \cdot x) = 1 = b.$$

Прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to \pm\infty$. Заметим также, что $\lim\limits_{x \to 0-0} (2^{1/x}) = 0,\ \lim\limits_{x \to 0+0} (2^{1/x}) = \infty$. Вычисленные пределы означают, что график функции в окрестности точки 0 справа имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

6) Вычислим первую производную: $y' = -\dfrac{2^{1/x} \cdot \ln 2}{x^2} < 0$. Следовательно, функция убывает при $x < 0$ и $x > 0$. Попробуем, не вычисляя вторую производную, построить график функции (см. рис. 9).

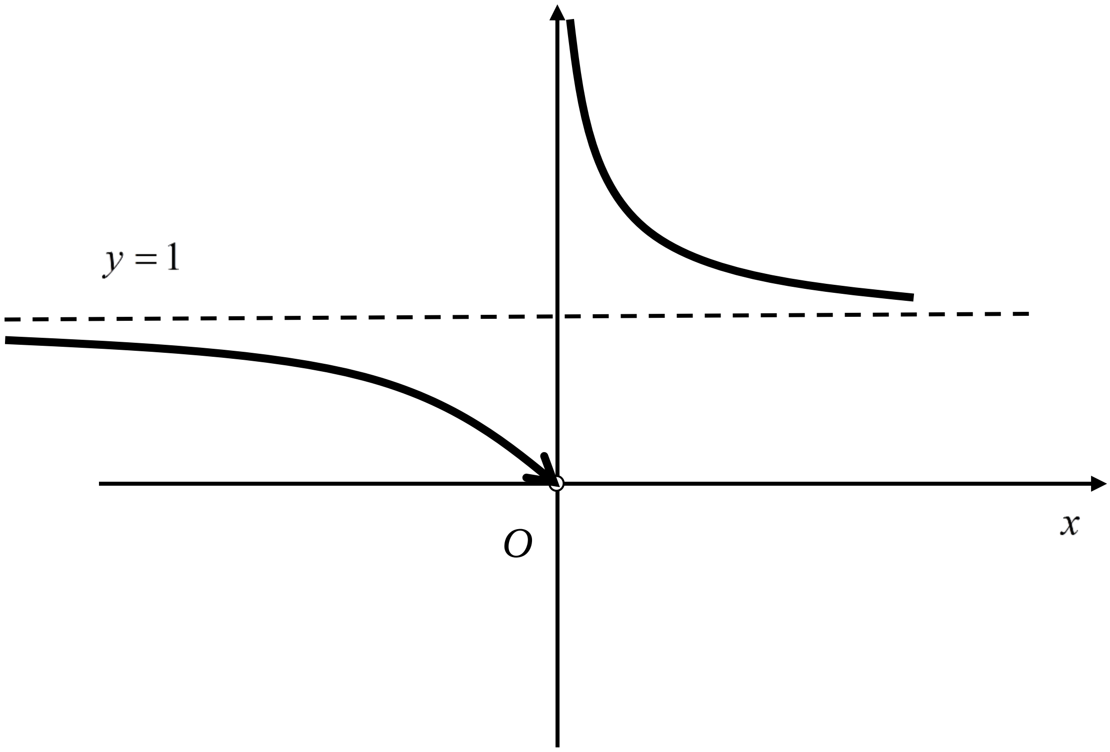


Рис.9. Эскиз графика функции $y = 2^{1/x}$.

С помощью использования всего двух команд системы компьютерной алгебры ***Mathematica*** получаем график кривой, изображенный на рис.10.

- **Plot[2^{1/x},{x,-1/2,2},PlotRange→{{-1/2,2},{0,3}}]**

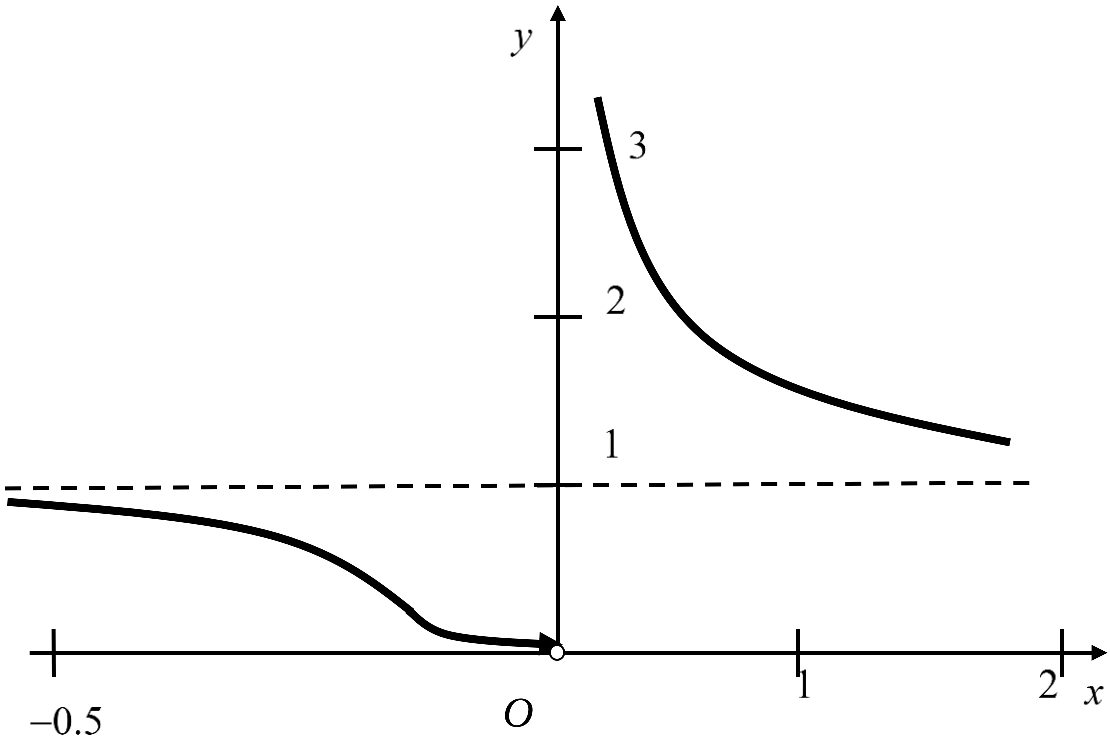


Рис.10. График функции $y = 2^{1/x}$.

Мы видим, что график на рис.10, построенный в системе ***Mathematica***, отличается от графика на рис.9. Это связано с тем, что мы решили не вычислять вторую производную и потому допустили ошибку в построении графика.

$$y'' = \left(\frac{-\ln 2 \cdot 2^{1/x}}{x^2} \right)' = \frac{\ln 2 \cdot 2^{1/x}(\ln 2 + 2x)}{x^4}$$

Итак, $y'' > 0$, если $x > -\dfrac{\ln 2}{2}$ и $x \neq 0$, и график функции является выпуклым вниз, если $y'' < 0$, если $x < -\dfrac{\ln 2}{2}$, и график функции выпукл вверх. Таким образом, точка $x = -\dfrac{\ln 2}{2}$ является точкой перегиба. Если мы желаем внимательно рассмотреть поведение кривой в окрестности точки перегиба, будем строить график в отсутствии оси Ox, воспользовавшись командой **`Axes`** (см. рис.11).

• **Plot[2^(1/x),{x,-1,0},Axes→{False, True}]**

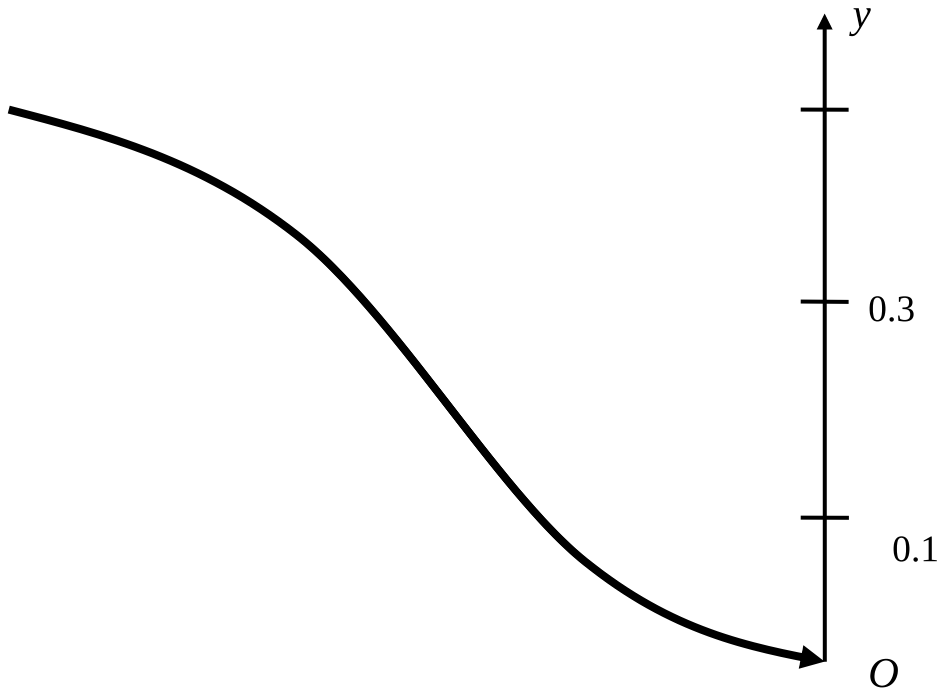


Рис.11. График функции $y = 2^{1/x}$.

Эта картинка прекрасно иллюстрирует выпуклость и вогнутость функции.

У студентов часто возникают трудности с построением графиков обратных тригонометрических функций. Пример V помогает вспомнить важные свойства этих функций, а также обратить внимание на нюансы анализа поведения первой и второй производной.

V. $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1) Найдем область определения. Так как $a = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $-\pi/2 \le \arcsin a \le \pi/2$ и $-1 \le a \le 1$, то $-1 \le \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$ и легко проверить, что данное двойное неравенство выполнено при любых x.

2) Функция является нечетной, так как выполнено равенство: $f(-x)=\arcsin\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)=-f(x)=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

3) Функция не является периодической.

4) Найдем нули рассматриваемой функции. Используя $\arcsin 0=0$, решаем уравнение $\frac{2x}{1+x^2}=0$. Единственный корень этого уравнения $x=0$ и других корней нет.

5) Нахождение асимптот сводится к рассмотрению следующих пределов: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\arcsin\frac{2}{1/x+x}}{x}=\frac{1}{\infty}=0=k,$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-0\cdot x)=0=b$$

Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to\pm\infty$. Так как областью определения является вся числовая прямая, то вертикальных асимптот нет.

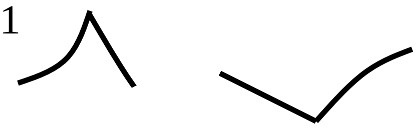
6) Вычислим первую производную (вычислите эту производную сами, приведя ее к указанному ниже результату!):

$$y'=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2(1+x^2)(1-x^2)}{|x-1|\cdot|x+1|}=\frac{2(1+x^2)(1-x^2)}{\left|1-x^2\right|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}2(1+x^2),\text{ при } |x|<1\\ -2(1+x^2),\text{ при } |x|>1\end{cases}$$

Заметим, что $x\neq 1,-1$ и производная в окрестности этих точек имеет разный знак: $\lim\limits_{|x|\to 1-0}y'\to 4,\ \lim\limits_{|x|\to 1+0}y'\to -4,\ \lim\limits_{|x|\to -1-0}y'\to 4,\ \lim\limits_{|x|\to -1+0}y'\to -4,$.

Поведение функции в окрестности точек $x=1,-1$ изображается следующим образом:



Уравнение $y' = \dfrac{2(1+x^2)(1-x^2)}{\left|1-x^2\right|} = 0$ не имеет решений. Отметим знаки первой производной на числовой прямой (см. рис.12).

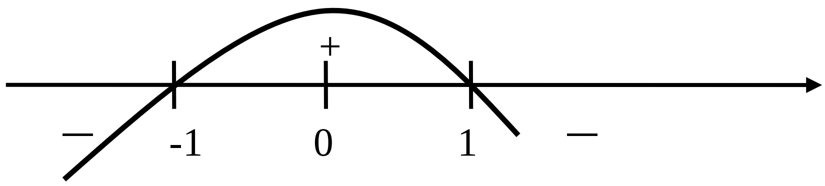


Рис.12. Поведение производной функции $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

7) Вычислим вторую производную:

$$y'' = \begin{cases} 4x, \text{ при } |x| < 1 \\ -4x, \text{ при } |x| > 1 \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ выпукла вверх при $-1 < x < 0$ и при $x > 1$, выпукла вниз – при $x < -1$ и при $0 < x < 1$. Точкой перегиба является $x = 0$.

С помощью системы ***Mathematica*** построим график функции, отражающий все нюансы проведенного исследования (см. рис. 13).

- **Plot[ArcSin[2x/{1+x^2}],{x,-2,2},PlotRange →{{-2,2},{-2,2}}]**

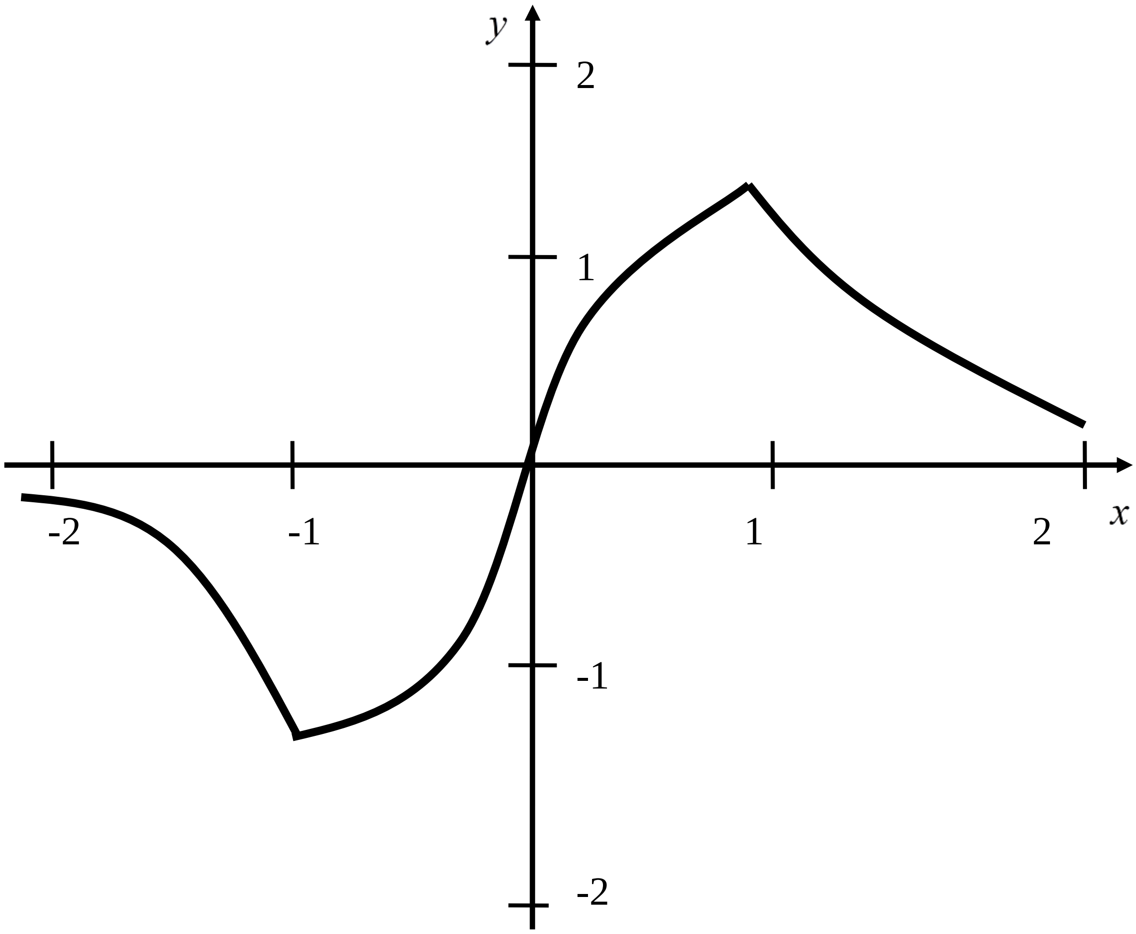


Рис.13. График функции $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Итак, мы привели примеры полного исследования пяти различных функций, и с помощью системы ***Mathematica*** построили их достоверные графики.

Рассмотрим функцию, полное исследование которой несколько отличается от предыдущих в связи с особенностями ее поведения в окрестности одной точки. Этому случаю посвящен пример VI.

VI. $y = \cos\dfrac{1}{x}$.

1) Область определения этой функции $x \neq 0, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2) Функция является четной, так как выполнено равенство: $f(-x) = \cos\left(-\dfrac{1}{x}\right) = f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$. Поэтому далее исследуем только $x > 0$.

3) Функция не является периодической, так как нет такого $T>0$, что выполнено $\cos\frac{1}{x+T}=\cos\frac{1}{x}$.

4) Рассмотрим нули функции.

$\cos\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x=\frac{2}{\pi(1+2k)}, k\in Z$. Таким образом, эти точки образуют последовательность точек, монотонно стремящихся при $k\to\infty$ к точке $x=0$. Отметим, что при $k=0$ нулями функции являются точки $x=\pm\frac{2}{\pi}$.

5) В поиске асимптот данного графика получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-0\cdot x\right)=1$, поэтому $y=1$ – горизонтальная асимптота при $x\to\pm\infty$. Так как $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$, то вертикальных асимптот нет.

6) Вычислим первую производную: $y'=-\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$. Отсюда, видно, что y' не определен при $x=0$. Уравнение $y'=0$ имеет бесконечно много решений $x=\frac{1}{\pi k}, k\in Z, k\neq 0$, причем заметим, что эти решения образуют последовательность, сходящуюся к точке $x=0$. Как мы видим на рис. 14, при приближении к точке $x=0$, длина отрезка возрастания и убывания уменьшает свою длину. Такая функция называется ***быстроосциллирующий.***

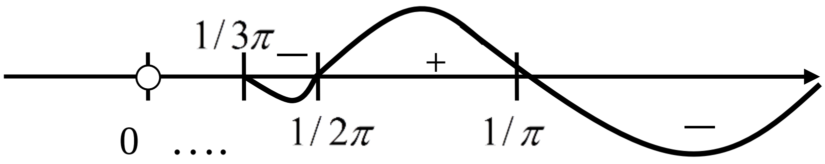


Рис.14. Поведение производной функции $y=\cos\frac{1}{x}$.

7) Вычислим вторую производную: $y''=\dfrac{-2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{x^4}=-\dfrac{\cos\frac{1}{x}\left(2x\,\mathrm{tg}\frac{1}{x}+1\right)}{x^4}$. Решая уравнение $y''=0$, заметим, что точками перегиба являются нули функции $x=\dfrac{2}{\pi(1+2k)},k\in Z$.

Оценим самое большое по модулю значение $x=\dfrac{2}{\pi}$ при $k=0$.

- **N[2/Pi]**
- 0.63662

Заметим также, что при $x>\dfrac{2}{\pi}$ имеем $2x\,\mathrm{tg}\frac{1}{x}+1>0, \cos\frac{1}{x}>0$ и $y''<0$, откуда следует, что функция выпукла вверх. Нам требуется решить трансцендентное уравнение $2x\,\mathrm{tg}\frac{1}{x}+1=0$. Решим это уравнение графически. Нарисуем графики этих функций (выполните это сами!):

- **Plot[{Tan[1/x],-1/(2x)},{x,0,1}]**

На графиках видно, что у функций нет точек пересечения при $x>0.45$. Это означает, что уравнение $2x\,\mathrm{tg}\frac{1}{x}+1>0$ при $x>0.45$ и знак второй производной при указанных x определяется знаком функции $-\dfrac{1}{\cos x}$.

Наконец, построим график функции $y=\cos\dfrac{1}{x}$ (см.рис.15).

- **`Plot[Cos[1/x}],{x,-2,1},PlotRange →{{-2,2},{-2,1}}]`**

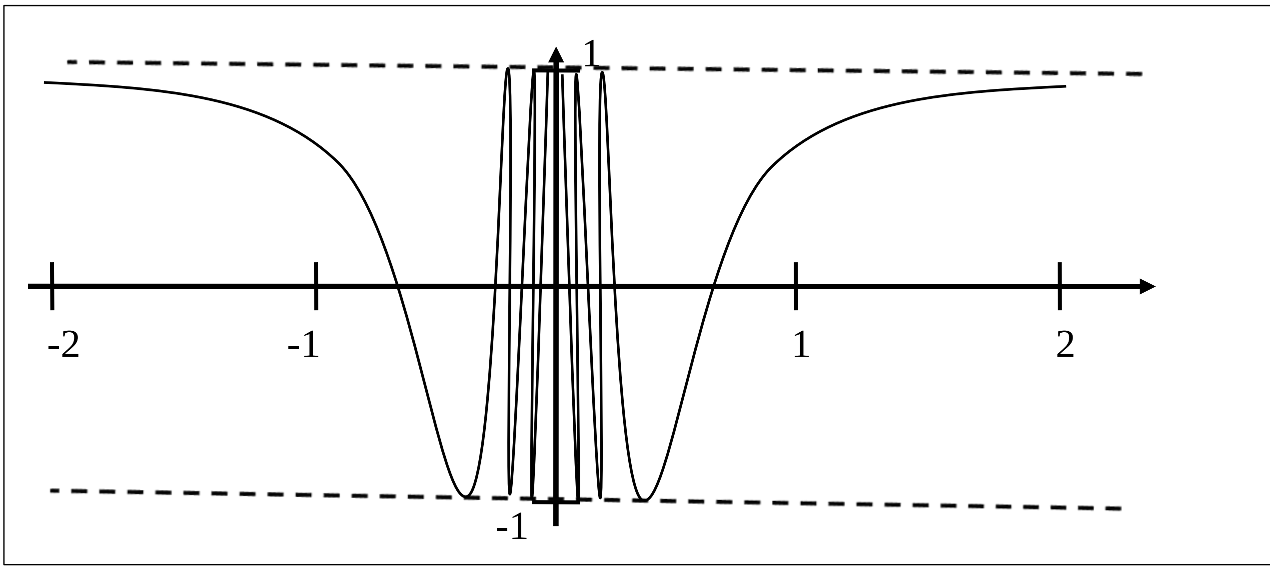


Рис.15. График функции $y=\cos(1/x)$.

Итак, мы провели полное исследование шести функций, рассмотрев различные нюансы этой задачи. Далее, в части 3, используя знания и навыки, приобретенные при прочтении части 2, студенту предлагается выполнить расчетно-графическую работу «Полное исследование функции».

Часть 3. Расчетно-графическая работа по теме «Полное исследование функций» с использованием одной из системы компьютерной алгебры.

§3.1. Порядок выполнения работы.

Студенту предлагается провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график как на миллиметровой бумаге от руки, так и с помощью одной из систем компьютерной алгебры. Вот порядок выполнения работы.

1) Найти область определения функции $y = f(x)$.

2) Проверить является ли данная функция четной, нечетной, общего вида.

3) Проверить является ли данная функция периодической.

4) Найти нули функции, т.е. решить уравнение $f(x) = 0$.

5) Определить есть ли асимптоты (вертикальные, наклонные, горизонтальные) у графика рассматриваемой функции.

6) Вычислив первую производную, найти стационарные точки, промежутки монотонности и исследовать точки, в которых производной не существует.

7) Вычислив вторую производную, исследовать промежутки выпуклости и найти точки перегиба.

8) На миллиметровой бумаге построить график исследованной функции, выбирая масштаб длины отрезков осей декартовой системы координат из соображений адекватного построения графика.

9) Построить график функции $y = f(x)$ с помощью системы компьютерной алгебры.

10) Распечатать полученной график вместе с управляющей строкой, необходимой для его построения.

В каждом варианте предлагается исследовать две функции.

§3.2. Варианты расчетно-графической работы. *)

Вариант 1. $y=\dfrac{2x-1}{x^2}$, $\quad y=\sin\dfrac{1}{x}$

Вариант 2. $y=\operatorname{tg}x+\sin x$, $\quad y=\arcsin\dfrac{1}{x}$

Вариант 3. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $\quad y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

Вариант 4. $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$, $\quad y=2^{\operatorname{ctg}x}$

Вариант 5. $y=\dfrac{8}{4+x^2}$, $\quad y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$

Вариант 6. $y=\dfrac{2}{x^2+2x+3}$, $\quad y=2^{\cos x}$

Вариант 7. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$, $\quad y=\dfrac{1}{\arccos x}$

Вариант 8. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, $\quad y=2^{\operatorname{tg}x}$

Вариант 9. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}$, $\quad y=\log_2\sin x$

Вариант 10. $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$, $\quad y=(x-2)e^{-1/x}$

Вариант 11. $y=e^{1/(x-1)}-1$, $\quad y=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

Вариант 12. $y=\arccos\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\quad y=\sqrt[3]{x-x^2}$

Вариант 13. $y=x\sin x$, $\quad y=\dfrac{1}{\ln x}$

Вариант 14. $y = x\cos x$, $y = x + 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$

Вариант 15. $y = \dfrac{1}{\ln(x+1)} + 1$, $y = -\dfrac{x^3}{x^2+1}$

Вариант 16. $y = (x^2 - 2x)\cdot e^x$, $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$

Вариант 17. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $y = \dfrac{x^2-4}{2x+5}$

Вариант 18. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$

Вариант 19. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

Вариант 20. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$, $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

Вариант 21 $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$, $y = \ln(x + \sqrt{x^2+9})$

Вариант 22. $y = x\ln^2 x$, $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Вариант 23. $y = \dfrac{-2}{e^{2x}+1} + 1$, $y = \dfrac{27}{9+x^2}$

Вариант 24. $y = \operatorname{ctg} x + \sin x$, $y = (x^2 - x)\cdot e^{-x}$

Вариант 25. $y = \sqrt{-\ln(1-x^2)}$, $y = (x+1)\operatorname{arctg}(x+1)$

Вариант 26. $y = 2^{\operatorname{arctg} x}$, $y = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$

Вариант 27. $y = \sqrt{3}x - 2\sin x$, $y = -\ln(e^x - 1)$

Вариант 28. $y = 1 + \dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$, $\qquad y = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$

Вариант 29. $y = 2\cos x - \sqrt{3}x$, $\qquad y = 1 + \sqrt[3]{7 - x^2 + 2x}$

Вариант 30. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$, $\qquad y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$

Вариант 31. $y = \dfrac{3x+2}{4x^2}$, $\qquad y = \sin\left(\dfrac{3}{-2x}\right)$

Вариант 32. $y = \mathrm{tg}\,2x + \sin 2x$, $\qquad y = \arcsin\left(\dfrac{3}{-x}\right)$

Вариант 33. $y = \dfrac{4x^2+1}{4x^2-1}$ $\qquad y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{3}{-2x}\right)$

Вариант 34. $y = \dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$, $\qquad y = 3^{\mathrm{ctg}\,2x}$

Вариант 35. $y = \dfrac{x^2+5}{x^2+1}$, $\qquad y = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{3}{-x}\right)$

Вариант 36. $y = \dfrac{x^2+2x+5}{x^2+2x+3}$, $\qquad y = 3^{\mathrm{tg}\,2x}$

Вариант 37. $y = \dfrac{2x^2-20}{x^2-16}$, $\qquad y = \dfrac{1}{\arccos x}$

Вариант 38. $y = \sqrt{1 - e^{-4x^2}}$, $\qquad y = 5^{-\mathrm{tg}\,2x}$

Вариант 39. $y = \dfrac{x^2(x-4)}{(x-2)^2}$, $\qquad y = \log_3(\sin 2x)$

Вариант 40. $y = \sqrt[3]{9x^2 - x^3}$, $\qquad y = (x-3)e^{-\frac{2}{x-1}}$

Вариант 41. $y = e^{1/(x-1)} - 1$, $\qquad y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$

Вариант 42. $y = \arccos\frac{4x}{4x^2+1}$, $y = \sqrt[3]{8x-8x^2}$

Вариант 43. $y = 2x\sin 2x$, $y = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$

Вариант 44. $y = 2x\cos 2x$, $y = x + 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

Вариант 45. $y = \frac{\ln(x+2)+2}{\ln(x+2)}$, $y = \frac{8x^3}{4x^2+1}$

Вариант 46. $y = (3x - x^2)\cdot e^{-x}$, $y = -3x^2 - x^3 - x + 5$

Вариант 47. $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$, $y = \frac{x^2-4}{6-2x}$

Вариант 48. $y = -\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$, $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

Вариант 49. $y = -\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$, $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Вариант 50. $y = 2 - \sqrt[3]{x^2-2x}$, $y = \frac{16x^4}{8x^3-1}$

Вариант 51. $y = -\frac{x^2-x}{x^2+3x-2}$, $y = \ln(\sqrt{x^2+4} - x)$

Вариант 52. $y = 1 - x\ln^2(-x)$, $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{-1-x}\right)$

Вариант 53. $y = \frac{2}{e^{-2x+2}+1}$, $y = -\frac{4}{16+x^2}$

Вариант 54. $y = \operatorname{tg} x + \cos x$, $y = (x - x^2)e^x + 1$

Вариант 55. $y = 1 - \sqrt{\ln(9-x^2)}$, $y = (2-x)\operatorname{arctg}(2-x)$

Вариант 56. $y = 3^{\operatorname{arctg} 2x}$, $\qquad y = -\dfrac{9}{x\sqrt{x^2 - 9}}$

Вариант 57. $y = \sqrt{3}\sin x + 2\cos x$, $y = 1 + \ln(e^{-x-1} - 1)$

Вариант 58. $y = 2 + \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$, $\qquad y = \sqrt{-x} - \sqrt{9+x}$

Вариант 59. $y = 2\sin x - \sqrt{3}$, $\qquad y = -1 + \sqrt[3]{7 - x^2 - 2x}$

Вариант 60. $y = -\dfrac{16x}{16 + x^2}$, $\qquad y = -x + 1 - \dfrac{x}{x^2 - 1}$

*) - уравнение $y' = 0$ может оказаться трансцендентным, которое не решается аналитически. Для этого следует качественно проанализировать уравнение и найти приближенно его корни (если они есть), используя систему компьютерной алгебры (см. пример 6 из части 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. . Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. – М.: Наука, Физматлит, 1985. –432 с.
2. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики. – М.: Наука, 1965. –97 с.
3. Воробьев Е.М. Введение в систему «Математика». – М.: Финансы и статистика, 1997 –262 с.
4. Белоцерковский Д.Л. Стандартные задачи математического анализа и линейной алгебры на базе пакета MATHEMATICA . – М.: РГУ нефти и газа им. Губкина И.М., 2009. – 23с.