

Экзаменационные теоретические вопросы по курсу «Интегралы и ряды» для студентов 1-го курса потока –ТН-17-1-8 (проект)

Интегралы

1. Дать определение первообразной. Сформулировать и доказать теоремы о структуре первообразных.
2. Дать определение неопределённого интеграла. Чему равен интеграл $\int F'(x)dx$?
Обосновать.
3. Таблица интегралов.
4. Теорема о замене переменных в неопределённом интеграле.
5. Как связаны интегралы $\int u dv$ и $\int v du$? Обосновать.
7. Что такое элементарные дроби? Привести пример разложения рациональной функции на элементарные дроби.
8. Как интегрируются элементарные дроби?
9. Как привести интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ к интегралу от рациональной функции?
Обосновать.
10. Как можно избавиться от иррациональности в интегралах:
 $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$? Обосновать.
11. Как строится интегральная сумма? Как называется предел интегральных сумм?
12. Как можно вычислить площадь криволинейной трапеции? Обосновать.
13. Чему равен определённый интеграл от 1? Обосновать, пользуясь определением интеграла.
14. Что такое аддитивность определённого интеграла? Обосновать геометрически.
15. Интеграл $\int_a^b f(x)dx = ?$, если $f(x) = 0, x \neq c \in [a, b]$ и $f(c) = A \neq 0$.
16. Что Вам известно о связи интегрального среднего $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ и значений функции $f(x)$ на $[a, b]$? Сформулировать теорему. Обосновать геометрически.
17. Чему равна производная $\left(\int_a^x f(t)dt \right)'$? Сформулировать и доказать теорему.
18. Если $F(x)$ первообразная $f(x)$, то чему равен интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Доказать.
19. Привести и доказать формулу замены $x = g(t)$ в интеграле $\int_a^b f(x)dx$.
20. Как связаны интегралы $\int_a^b u dv$ и $\int_a^b v du$? Обосновать.

21. Если $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ - уравнение кривой, ограничивающей криволинейный сектор, то чему равен интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi) d\varphi$? Обосновать.

22. Как вычислить объём тела, если известна площадь поперечного сечения $S = S(x)$. Обосновать.

23. Привести формулу объёма тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox .

25. Если $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ - уравнение кривой, то чему равен интеграл

$$\int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx ?$$

26. Как определяется и когда сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} dx$? Обосновать.

27. Как определяется и когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} dx$? Обосновать.

Ряды

1. Дать определение последовательности частичных сумм ряда, сходимости и расходимости ряда, суммы ряда. Привести примеры исследования сходимости рядов, исходя из определения сходимости.
2. Что такое остаток ряда? Если остаток сходится, то что можно сказать о сходимости ряда?
3. Если ряд сходится, то, что известно о пределе общего члена ряда? Сформулировать теорему и доказать.
4. Какова связь между сходимостью положительных рядов и соответствующих несобственных интегралов? Сформулировать теорему.
5. Как оценить остаток ряда с помощью интеграла? Привести пример.
6. Гармонический и обобщенный гармонический ряды. Сходимость этих рядов?
8. Сформулировать неопределённый и предельный признаки сравнения. Привести примеры использования этих признаков.
9. Сформулировать признак Даламбера. Какие признаки и как используются при доказательстве условия расходимости признака Даламбера? Обосновать.
10. Сформулировать радикальный признак Коши.
11. Дать определение абсолютной и условной сходимости рядов.
12. Что известно о сходимости знакопередающегося ряда. Сформулировать теорему. Обосновать оценку остатка такого ряда.
13. Что называется областью сходимости функционального ряда. Какова область сходимости суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем равным x ?
14. Какой ряд называется правильно сходящимся (имеющим сходящуюся мажоранту)? Что можно сказать о характере сходимости такого ряда?
15. Сформулировать теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании рядов.

16. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то, что известно о сходимости ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Сформулировать теорему и доказать.

17. Что называется радиусом сходимости степенного ряда? Как вычислить радиус сходимости, используя признак Даламбера.

18. Дать определение ряда Тейлора, ряда Маклорена.

19. Разложение в ряд Тейлора элементарных функций. Обосновать разложение одной из них.

20. Что известно об изменении радиуса сходимости степенного ряда при дифференцировании и интегрировании такого ряда?

21. Сколько производных имеет сумма степенного ряда? Обосновать.

22. Если функция представима степенным рядом по степеням $x - x_0$, то, что можно сказать о представлении другим степенным рядом по степеням $x - x_0$. Обосновать.

23. Сформулировать достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.