Функциональные ряды

Лекции 7- 8

Область сходимости

- Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

где ***функции*** $u_n(x)$ определены на некотором промежутке, называется ***функциональным*** рядом.

- Множество ***всех*** точек, в которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости*** ряда.

Пример

- Ряд $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$
  являющийся суммой членов геометрической прогрессии, сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Таким образом, ***областью сходимости*** этого ряда является ***интервал*** $(-1, 1)$. Суммой ряда является функция
  $$S(x) = \frac{1}{1-x},$$
  определенная на интервале $(-1, 1)$.

Правильно сходящиеся ряды. Свойства.

- Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***правильно сходящимся*** ***(мажорируемым)*** в области D рядом, если существует **сходящийся** числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (***мажоранта***)

  такой, что $|u_n(x)| \le b_n,\ x \in D,\ n = 1, 2, \dots$

- ***Теорема 1***. Если ряд из ***непрерывных*** функций правильно сходится на (a,b) , то сумма ряда является непрерывной на (a,b) функцией.

Доказательство теоремы 1

- Представим сумму ряда $S(x)$ в виде
$$S(x) = S_N(x) + R_N(x).$$
- Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $N > 0$, а затем $\delta > 0$ такие, что
$$\left|R_N(x)\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D \quad \left|S_N(x) - S_N(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$
- $\left|x - x_0\right| < \delta.$ Далее
$$\left|S(x) - S(x_0)\right| = \left|S_N(x) + R_N(x) - S_N(x_0) - R_N(x_0)\right| \le$$
$$\le \left|S_N(x) - S_N(x_0)\right| + \left|R_N(x)\right| + \left|R_N(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Контрпример

- Члены ряда

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots,$$

- Образуют при $x \neq 0$ геометрическую прогрессию со знаменателем прогрессии.

$$q=\frac{1}{1+x^2}<1$$

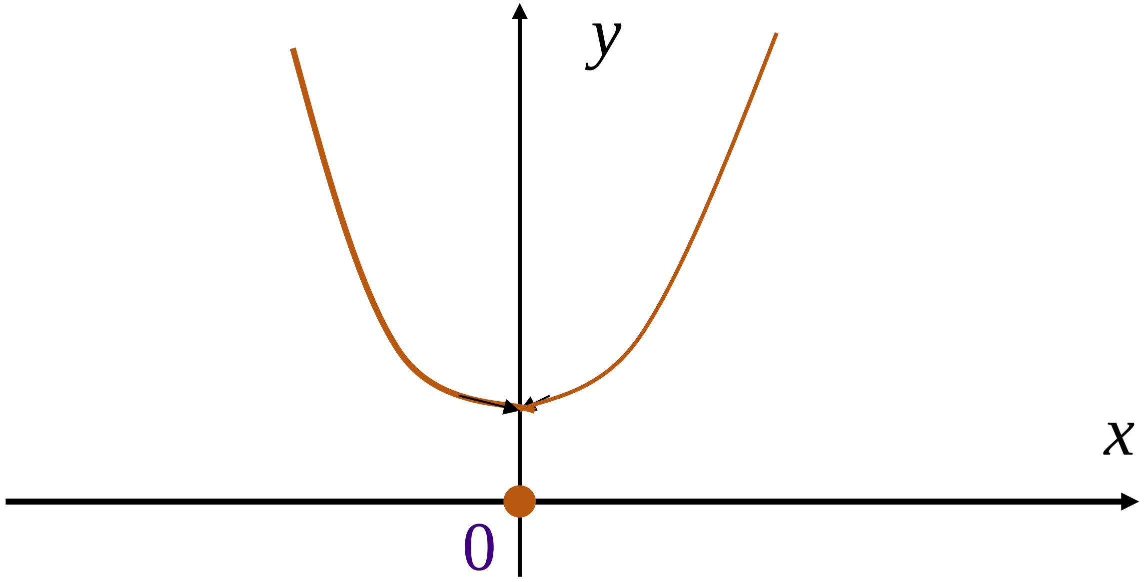
Пример 3 (продолжение)

- Поэтому при любом $x \neq 0$ сумма ряда равна

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 + 1.$$

Продолжение примера 3

- Так как $S(0)=0$, то **сумма ряда является разрывной функцией**, в то время как члены ряда являются **непрерывными на всей оси функциями!**



Интегрирование и дифференцирование мажорируемых рядов

- ***Теорема 2.*** Если ряд из ***непрерывных*** функций ***правильно сходится*** на $[a,b]$, то для любого $c \in (a,b]$

$$\int_a^c \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x)dx$$

- ***Теорема 3***. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на (a,b) , а ***ряд из производных*** $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ ***правильно*** *сходится* на (a,b) , то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Степенные ряды

Определение

- Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$ и точка x_0 - заданные числа, называется ***степенным рядом***.

- В частности, степенной ряд при $x_0 = 0$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Теорема Абеля

Абель Нильс
1802-1829

- Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом **абсолютно** для любых x таких, что

$$|x| < |x_0|.$$

Структура области сходимости степенного ряда

- ***Следствие***. Если степенной ряд расходится при $x = x_0 \neq 0$, то он расходится и при $|x| > |x_0|$.
- ***Вывод***: Область сходимости степенного ряда может быть либо точка $x = x_0 \neq 0$, либо интервал $(-R, R)$,

$0 < R \leq \infty,$ включая, может быть, концы интервала.

Радиус сходимости.

- Неотрицательное число $0 < R \leq \infty$ такое, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$ называется ***радиусом сходимости степенного ряда***

Замечание. Для степенного ряда по степеням $(x - x_0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

радиусом сходимости называется число $0 < R \leq \infty$ такое, что ряд сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$.

Примеры

Найти область сходимости и радиус сходимости рядов.

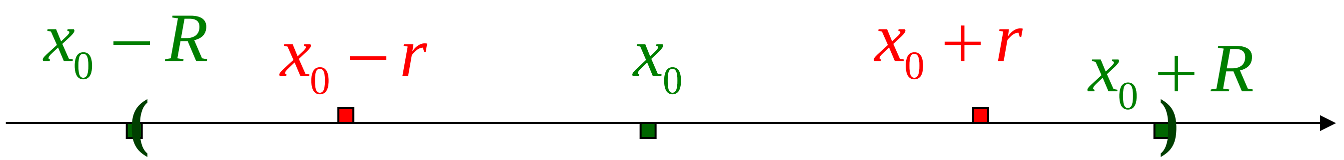
- 1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$
- 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-2)^n}{4^{2n+1}}$

Правильная сходимость степенных рядов

- **Теорема**. Если $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

- то на любом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r], 0 < r < R$ степенной ряд имеет сходящуюся мажоранту.



Свойства радиуса сходимости степенных рядов

- ***Теорема.*** Если $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

- то степенные ряды, полученные почленным дифференцированием

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots,$$

- и интегрированием в пределах от x_0 до x

$$a_0(x - x_0) + a_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + a_n\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

- имеют тот же радиус сходимости R.

Дифференцирование и интегрирование функций, разложимых в степенные ряды

- **Теорема.** Пусть функция $y = f(x)$ разложима в степенной ряд
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
- радиуса сходимости $0 < R \leq \infty$, тогда
- 1) Функция $y = f(x)$ имеет производные всех порядков на интервале $(x_0 - R,\ x_0 + R),$ и они находятся почленным дифференцированием ряда.
- 2) Для любого $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$, а $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$

можно найти почленным интегрированием.

Ряды Тейлора

Разложение функций в степенные ряды

Определение ряда Тейлора

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = x_0$ и **имеет в этой точке *производные любого порядка***. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

- называется ***рядом Тейлора функции*** $y = f(x)$ ***по степеням*** $x - x_0$.

Ряд Маклорена (Тейлора – Маклорена)

- В частном случае, когда $x_0 = 0$, ряд Тейлора называется рядом ***Маклорена*** или ***Тейлора – Маклорена***, т.е. это степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Единственность разложения в ряд Тейлора

- **Теорема 1**. Если функция $y = f(x)$ представима в окрестности точки x_0 степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- с положительным радиусом сходимости $R > 0$, то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

- т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Замечание

- Наличие бесконечного числа производных $f^{(n)}(x_0)$ функции ***не является достаточным условием разложения функции в ряд Тейлора.***
- Действительно, функция
- $$y = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{(α)}$$
- непрерывна и бесконечно дифференцируема, т.к.

Вывод

- Аналогично

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

- Таким образом, ряд Тейлора функции **(α)** имеет вид

$$0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \cdots,$$

- ***И не сходится к функции*** $f(x)$ в точках $x \neq 0.$

Разложение функции в ряд Тейлора и формула Тейлора

- **Теорема 2**. Функция $y = f(x)$ в точке x ***представима рядом Тейлора*** тогда и только тогда, когда ***остаточный член*** $R_N(x)$ ***формулы Тейлора***

- $$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x) \qquad \text{(FT)}$$

стремится к нулю при $N \to \infty$.

Доказательство

- Действительно, частичная сумма

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ряда Тейлора является ***многочленом Тейлора***, т.е. первым слагаемым формулы Тейлора (FT). Из формулы (FT) и определения суммы ряда следует, что

- $$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x)\Leftrightarrow\lim_{N\to\infty}R_N(x)=0.$$

Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора

- ***Теорема 3.*** Пусть функция $y = f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности $(x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ и ***все её производные ограничены в совокупности*** на этой окрестности, т.е. существует такая константа $M > 0$, что

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M, \quad n = 0, 1, \dots$$

- тогда справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \; x \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Лемма

- Справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, a>0.$$

- Действительно, применим признак Даламбера к ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$. Имеем: $\lim_{N\to\infty}\frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!a^n}=\lim_{N\to\infty}\frac{a}{n+1}=0.$

- Ряд сходится, и по необходимому признаку общий член стремится к нулю.

Доказательство теоремы

- Для доказательства теоремы проверим, что

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0.$$

- Используем формулу остатка в форме Лагранжа

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

- Имеем, $\left|R_N(x)\right| \le \frac{M}{(N+1)!}\left|x - x_0\right|^{N+1} \to 0$ при $N \to \infty$.

Разложение в ряд Тейлора элементарных функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \; x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty, +\infty);$$

Разложение в ряд Тейлора элементарных функций

- Геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1;$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1].$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1];$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

Обоснование формул. Коэффициенты Тейлора- Маклорена экспоненты

Найдём коэфф. Тейлора – Маклорена функции e^x :

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x, n = 0,1,\ldots \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}, n = 0,1,2,\ldots$$

- Отсюда ряд Маклорена функции e^x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Обоснование сходимости

- Применим теорему 3. Для любого числа $h > 0$ имеем

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|e^{x}\right| \le e^{h} = M,\ |x| \le h,\ n = 0,1,\ldots$$

- По теореме 3 ряд Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n}$$

- сходится к e^{x} на интервале $(-h,h)$, а в силу произвольности $h > 0$ в любой точке $(-\infty,+\infty)$.

Обоснование формулы разложения в ряд функции $\ln(1+x), -1<x<1$

- Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+\cdots -1<x<1;$$

- Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x dx-\int_0^x x\,dx+\int_0^x x^2 dx\cdots+\int_0^x (-1)^n x^n dx+\cdots;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},$$

$$-1<x<1$$

Сходимость ряда к логарифму при $x=1$

- Остаток $R_n(x)$ ряда

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}x^{n+1}\cdots$$

имеет вид $R_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$. Интегрируя от 0 до1

- получаем

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}dx.$$

- Отсюда

$$\left|\int_0^1 R_n(x)dx\right|\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx\le\int_0^1 x^{n+1}dx\le\frac{1}{n+2}\to 0,\ n\to\infty.$$

Разложение арктангенса

- Аналогично интегрированием разложения

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots -1 < x < 1;$$

- Доказывается формула разложения функции

$$y = arctgx.$$

Пример 1

- 2. Разложить в ряд и вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx,$$

- взяв 2 члена разложения , оценить погрешность.

Решение примера 1

- Подставляя в разложение функции e^x вместо x переменную $-x^2$, получаем

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots$$

- Интегрируем

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx + \cdots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx + \cdots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5 \cdot 2!}\Big|_0^1 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Big|_0^1 + \cdots$$

Решение примера 1

- Итак, $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} + \cdots$

- Получено представление интеграла знакочередующимся рядом. Если оставить 2 члена этого ряда: $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3}$,

- то погрешность равная остатку ряда, по признаку Лейбница оценивается первым членом $R_2 \le \frac{1}{5\cdot 2!}$.

Пример 2

- Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.
- Решение.

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$x=A(x-2)+B(x-1)\Rightarrow A=-1,\, B=2$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}$$

Продолжение решения примера 2

- Преобразуем так, чтобы использовать формулу для суммы ряда геометрической прогрессии

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2(1-\frac{x}{2})}$$

$$=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)+$$

$$+(1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\cdots+(\frac{x}{2})^n+\cdots=$$

$$=2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}x^2+\ldots+(1+\frac{1}{2^n})x^n+\ldots$$

Вывод

- Полученный степенной ряд сходится к функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

на пересечении интервалов $(-1;1)$ и $(-2;2)$

т.е. на интервале $(-1;1)$

Примеры

- 1. Разложить по степеням x функцию $\ln(1-3x)$ и найти интервал сходимости ряда.

- Разложить по степеням $x-2$ функцию $\ln x$ и найти интервал сходимости ряда.

Примеры

- 1. Разложить по степеням x функцию $\ln(1-3x)$ и найти интервал сходимости ряда.

- 2. Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx,$$

- взяв 2 члена разложения подынтегральной функции и оценить погрешность.
- Разложить по степеням $x-2$ функцию $\ln x$ и найти интервал сходимости ряда.