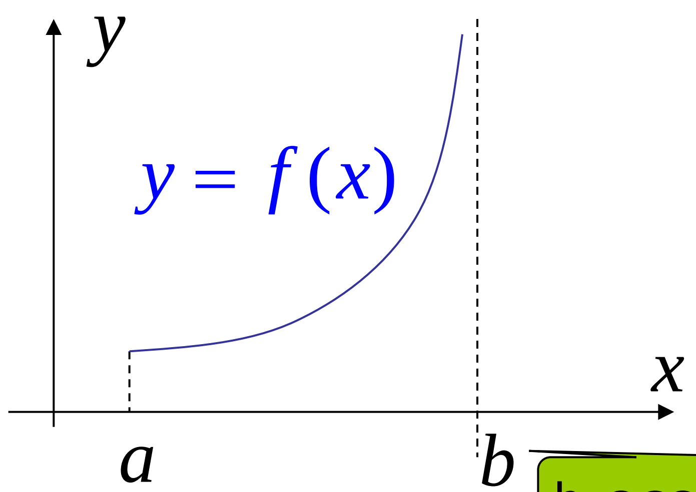
Несобственные интегралы

Лекция 6

Несобственные интегралы от неограниченных функций (особенность на правом конце отрезка)

- Из необходимого условия интегрируемости функции следует ограниченность интегрируемой функции. Расширим понятие интеграла.
- Пусть функция $y = f(x)$ ***не ограничена*** на $[a,b)$, и интегрируема на любом отрезке $[a,b-\varepsilon], \varepsilon > 0$. Если существует предел ,
-

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

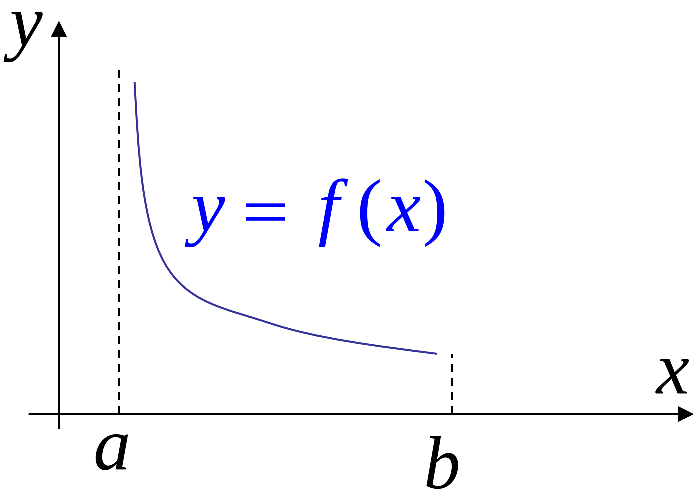


то этот предел называется несобственным интегралом **второго рода** $\int_a^b f(x)dx$

b-**особая точка**

Несобственные интегралы от неограниченных функций (особенность на левом конце отрезка)

- Аналогично определяется интеграл от функции, неограниченной на левом конце отрезка $[a,b]$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Точка a - ***особая точка*** интеграла.

Будем говорить также, что несобственные интегралы ***сходятся***, если указанные пределы существуют и ***расходятся*** в противном случае.

Пример.

- Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

- ***сходится***, если $\alpha < 1$,
- **расходится** , если $\alpha \geq 1.$

Несобственные интегралы с особенностью в нескольких точках

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b) за исключением конечного числа точек, в окрестности которых функция не ограничена. Для определения несобственного интеграла от такой функции надо разбить (a,b) точками
$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$$
так, чтобы интегралы $$\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx \quad (*)$$
- имели особенность на одном конце. Тогда если сходятся ***все интегралы*** (*), то сходится исходный интеграл и по определению

полагаем $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx.$$

- Пример.

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

- Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируем на любом конечном промежутке $[a, A]$, для любого $A > a$.
- Несобственным интегралом (1-го рода) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется предел

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx.$$

- Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл ***сходится***, в противном случае **–** ***расходится***.

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

- Аналогично определяется интеграл по $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx.$$

- Если сходятся интегралы $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

то интеграл по всей оси $(-\infty, +\infty)$ определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пример

- **Интеграл**

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

- **сходится при** $p > 1$,
- **расходится при** $p \le 1$.

Свойства несобственных интегралов

- 1. Интегралы и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $\int_c^{+\infty} f(x)dx,\quad c > a$

сходятся и расходятся одновременно.

- 2. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится
- интеграл $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ (с –константа), и справедливо
- равенство $$\int_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Свойства несобственных интегралов

- 3. Если сходятся интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$
- то интеграл суммы $f(x)+g(x)$
- сходится, и справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

- **Замечание**. Свойства 1-3 несобственных интегралов
- справедливы также для несобственных интегралов (2-го
- рода) от неограниченных функций.

Признаки сходимости несобственных интегралов от положительных функций

- ***Теорема 1(непредельный признак сравнения).*** **Если для неотрицательных на** $[a,+\infty)$ **функций** $f(x), g(x)$ **выполняется неравенство**

$$f(x) \le g(x), \quad x \ge a,$$

- **то из сходимости интеграла** $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ **следует**
- **сходимость** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **, а из расходимости**
- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **следует расходимость** $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ **.**

Предельный признак сравнения

- ***Теорема 2.*** **Пусть для неотрицательных на $[a,+\infty)$ функций существует предел**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

- **Тогда, если** $$k<\infty,\ k\neq 0,$$
- **то интегралы** $$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\quad \int_a^{+\infty} g(x)dx$$
- **сходятся и расходятся одновременно.**

Примеры. Исследовать на сходимость.

- **1.** $$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$
- **2.** $$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$$
- **3.** $$\int_{0}^{\infty} \sqrt{1+5x^3}\,dx$$

Замечание

- **Доказанные свойства и признаки сходимости для интегралов по промежутку** $[a,+\infty)$ **справедливы с соответствующими изменениями для интегралов по** $(-\infty,a]$ **, а также для несобственных интегралов от неограниченных неотрицательных функций.**
- **Пример. Исследовать сходимость**

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx.$$

Сходимость несобственных интегралов в общем случае

- Рассмотрим для определённости несобственные интегралы с бесконечным пределом интегрирования.
- Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно
- сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$
- Теорема. Если интеграл сходится абсолютно, то он просто сходится.

Пример

- **Исследовать сходимость**

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$