Числовые ряды

Лекции 6-7

Понятие числового ряда

- Аналитическое выражение вида

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots \quad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

- где $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ последовательность чисел – *членов ряда*, выражение a_n - называется *общим членом* ряда.
- Последовательность

$$S_1 = a_1\,, S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \ \cdots$$

называется ***последовательностью частичных сумм***.

Сходимость числового ряда

- Если последовательность частичных сумм S_n ряда ***имеет конечный предел***, то ряд называется ***сходящимся***, в противном случае расходящимся.
- Если ряд сходится, то предел частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется ***суммой ряда***. Будем записывать в этом случае

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Пример

- 1. $1-1+1-1+\cdots$

- 2. Геометрическая прогрессия

$$b_0+b_0q+b_0q^2+\cdots$$

Свойства сходящихся рядов

- 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$

  для любого числа c также сходится и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится

  ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Свойство остатка сходящегося ряда

- Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n -м остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- 3. Всякий ряд сходится одновременно со своим остатком.
- Если $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$ -сумма ряда, а $r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ –сумма
- m-го остатка, то справедливо равенство

$$S = S_m + r_m.$$

Необходимый признак сходимости рядов

- *Теорема.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$
- Примеры. Исследовать сходимость рядов

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{100n^2+1}. \quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1}\right]^n$$

Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Интегральный признак сходимости рядов

- **Теорема.** Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$ можно подобрать такую функцию $f(x)$, что $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$ и $f(n) = a_n, n = 1, 2, \cdots$
- Если функция $f(x)$ убывает при $x \geq 1$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *тогда и только тогда,* когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx.$

Оценка остатка ряда с помощью сравнения с интегралом

- **Задача. Оценить остаток** r_m **ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \ge 0,$ **если функция**

$$f(x),\ f(n) = a_n, n = 1, 2, \cdots$$

- **удовлетворяет условиям интегрального признака.**

- **Пример. Оценить остаток ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Примеры

- **Исследовать сходимость рядов**
- **1. Обобщённый гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- **2.** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Признак сравнения (непредельный)

- **Теорема 1. Пусть**

$$a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$$

- **Если** $a_n \leq b_n, n = 1, 2, \cdots$ **, то из сходимости**
- **ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **следует сходимость ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **,**
- **а из расходимости ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **следует расходимость ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Признак сравнения (предельный)

- **Теорема 2. Пусть**

$$a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$$

- **Если**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

- **то оба ряда сходятся и расходятся одновременно.**
- **В частности, если** $a_n \sim b_n \geq 0, n \to \infty$ **, то ряды ведут себя одинаково.**

Примеры.

- **1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$
- **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln(\frac{n+1}{n+2})$
- **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+\sqrt{n^2+1}}$

Признак Даламбера (Д'Аламбер)

- **Теорема. Пусть дан ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0,$ **и существует предел**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

- **Если** $\boldsymbol{l < 1}$, **то ряд сходится; если** $\boldsymbol{l > 1}$, **то ряд расходится.**
- **При** $l = 1$ **о сходимости ряда ничего сказать нельзя.**

Замечание

- При доказательстве признака Даламбера было получено, что при $l > 1$, ряд расходится, так как **общий член ряда не стремится к нулю**!

Примеры.

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$
- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

Вопрос

- Что можно сказать о сходимости положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0,$, если 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ сходится ,
- 2) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$?

Радикальный признак Коши

- **Теорема. Пусть дан ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0,$ **и существует предел**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

- **Если** $\boldsymbol{l < 1}$, **то ряд сходится; если** $\boldsymbol{l > 1}$, **то ряд расходится и** $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$

- **При** $l = 1$ **о сходимости ряда ничего сказать нельзя**

Примеры

- **1.** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(n+3)^n}$$

- **2.** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{n}+1)^{n^2}}{3^n}$$

Сходимость знакопеременных рядов

Сходимость знакопеременных рядов

- Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное число членов **разных** знаков. Такие ряды называются **знакопеременными.** Будем рассматривать также ряды, составленные из **абсолютных** величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$
- **Теорема 1.** Если ряд из ***абсолютных*** величин *сходится*, то *сходится и исходный* ***знакопеременный*** ряд.
- **Пример.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$

Абсолютная и условная сходимость рядов

- Если ряд из **абсолютных величин** $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

  сходится, то исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***.

- Если **знакопеременный ряд сходится, а ряд из абсолютных величин** ***расходится***, то говорят, что знакопеременный ряд ***сходится условно***.
- Ряд, члены которого **поочерёдно** принимают разные знаки, называется ***знакочередующимся.***

Признак Лейбница

- ***Теорема***. Пусть дан *знакочередующийся* ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\ a_n>0.$$

- Если $a_n \geq a_{n+1},\ n=1,2,\cdots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = 0,$ то знакочередующийся ряд сходится.
- При этом абсолютная величина остатка

$$\boldsymbol{r_m} = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}+1}^{\infty}(-1)^{\boldsymbol{k}+1}\boldsymbol{a_k}$$

- не превышает абсолютной величины его первого члена $\boldsymbol{a_{m+1}}:\ \ |\boldsymbol{r_m}| \leq \boldsymbol{a_{m+1}}.$

Примеры

- Исследовать сходимость рядов:
- 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+15}$
- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{n!}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$
- 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{(n+1)^n}$

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов

- Рассмотрим произвольный ряд
- $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1) \qquad \text{и ряд} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*, \qquad (2)$$
- составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке.

Теорема. Если ряд (1) сходится абсолютно, то ряд (2) также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, т.е. от перестановки местами членов абсолютно сходящегося ряда сходимость и сумма не меняются.

Теорема Римана

Замечание. Для условно сходящихся рядов переместительное свойство не выполняется.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Теорема. Если ряд (1) сходится условно, то ***каково бы ни было число*** A , можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равной A .