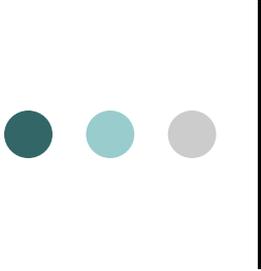




Числовые ряды

Лекции 6-7



Понятие числового ряда

- Аналитическое выражение вида

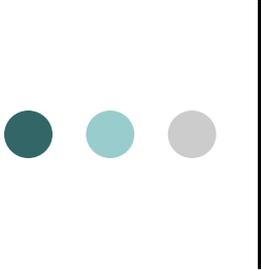
$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

- где $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ последовательность чисел – членов ряда, выражение a_n - называется *общим членом* ряда.

- Последовательность

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \cdots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \cdots$$

- называется **последовательностью частичных сумм**.



Сходимость числового ряда

- Если последовательность частичных сумм S_n ряда **имеет конечный предел**, то ряд называется **сходящимся**, в противном случае расходящимся.
- Если ряд сходится, то предел частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называется **суммой ряда**. Будем записывать в этом случае

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$



Пример

- 1. $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

- 2. Геометрическая прогрессия

$$b_0 + b_0q + b_0q^2 + \dots$$

Свойства сходящихся рядов

- 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$

для любого числа c также сходится и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Свойство остатка сходящегося ряда

- Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n -м остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- 3. Всякий ряд сходится одновременно со своим остатком.
- Если $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -сумма ряда, а $r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ -сумма m -го остатка, то справедливо равенство

$$S = S_m + r_m.$$

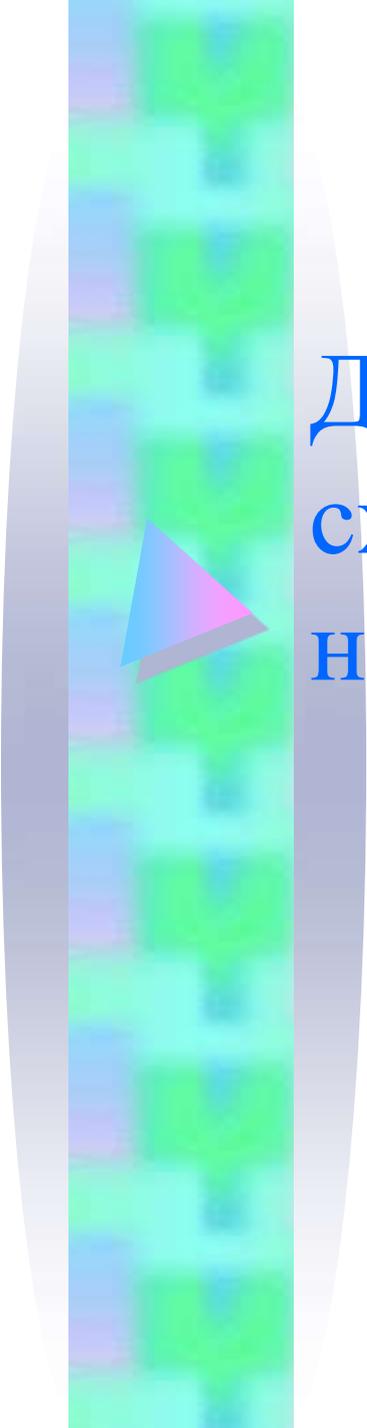
Необходимый признак сходимости рядов

- *Теорема.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий

член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- *Примеры.* Исследовать сходимость рядов

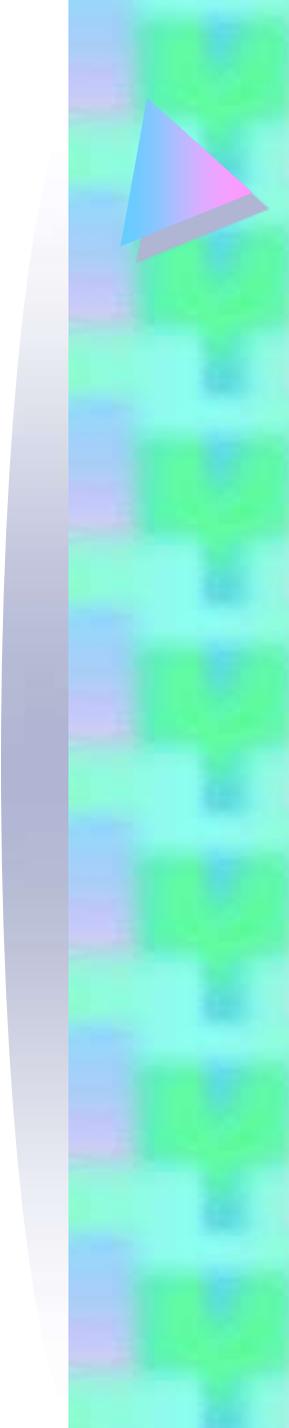
$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{100n^2 + 1} \cdot \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1} \right]^n$$



Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Интегральный признак сходимости рядов

- **Теорема.** Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ можно подобрать такую функцию $f(x)$, что $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$ и $f(n) = a_n, n = 1, 2, \dots$
- Если функция $f(x)$ убывает при $x \geq 1$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.



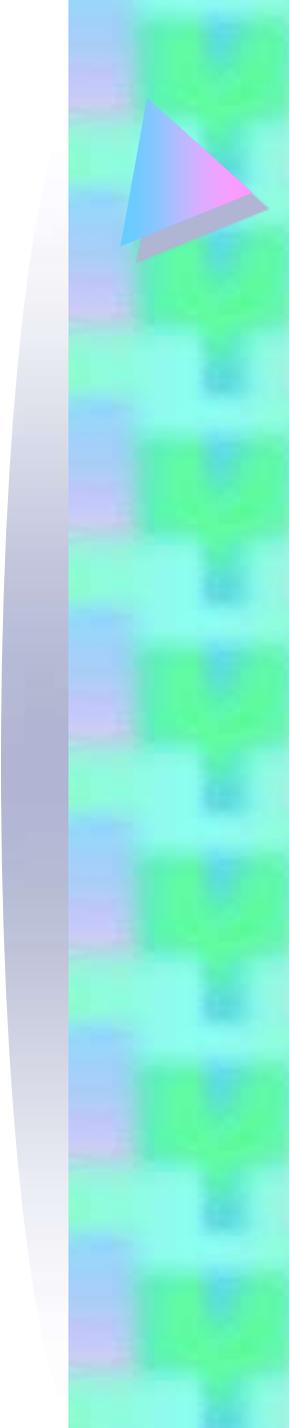
Оценка остатка ряда с помощью сравнения с интегралом

- **Задача.** Оценить остаток r_m ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, если функция

$$f(x), f(n) = a_n, n = 1, 2, \dots$$

- удовлетворяет условиям интегрального признака.

- **Пример.** Оценить остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



Примеры

- Исследовать сходимость рядов
- 1. Обобщённый гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Признак сравнения (непредельный)

- **Теорема 1. Пусть**

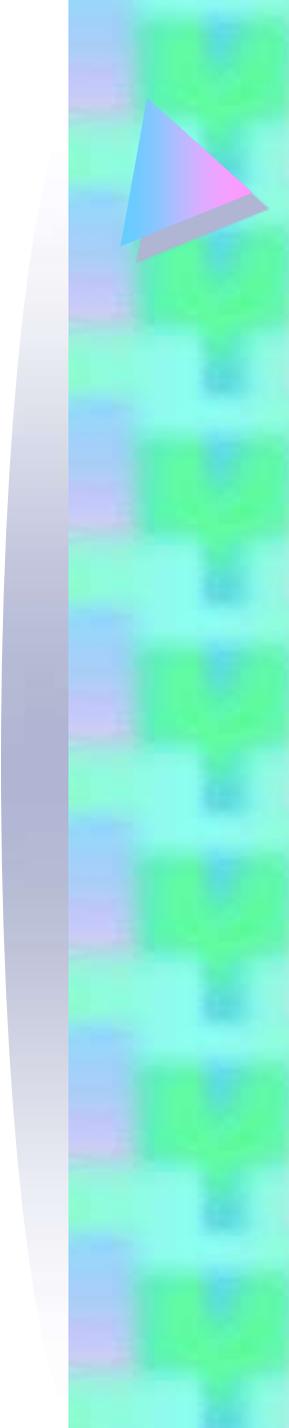
$$a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

- **Если $a_n \leq b_n, n = 1, 2, \dots$, то из сходимости**

- **ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,**

- **а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$



Признак сравнения (предельный)

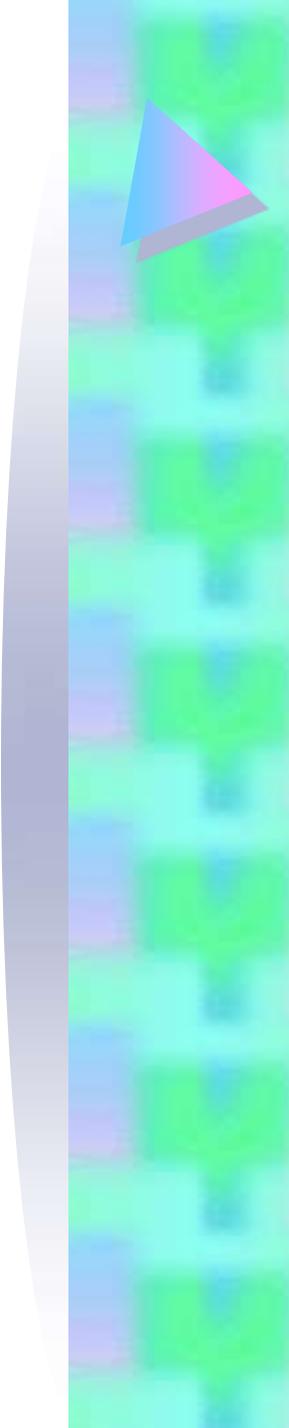
- **Теорема 2. Пусть**

$$a_n \geq 0, \quad b_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

- **Если**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

- **то оба ряда сходятся и расходятся одновременно.**
- **В частности, если $a_n \sim b_n \geq 0, n \rightarrow \infty$, то ряды ведут себя одинаково.**

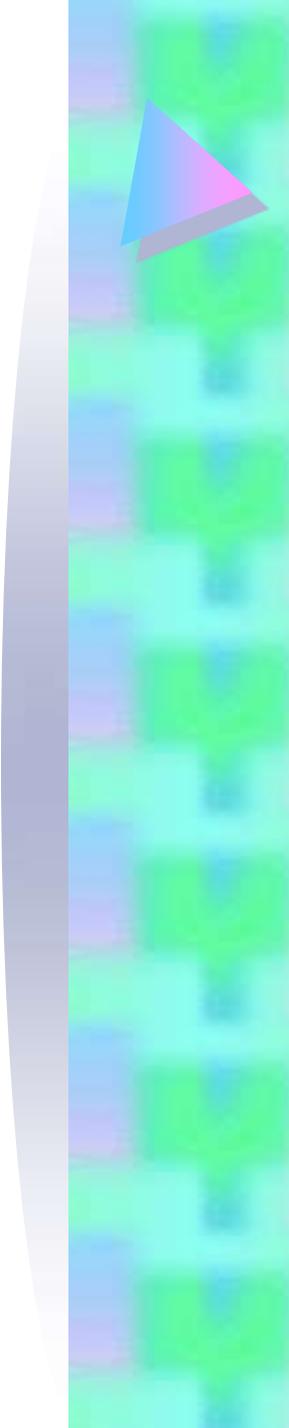


Примеры.

- 1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$$

- 2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

- 3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + \sqrt{n^2+1}}$$



Признак Даламбера (Д'Аламбер)

- Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

- Если $l < 1$, то ряд сходится; если $l > 1$, то ряд расходится.
- При $l = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Замечание

- При доказательстве признака Даламбера было получено, что при $l > 1$, ряд расходится, так как **общий член ряда не стремится к нулю!**

Примеры.

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

Вопрос

- Что можно сказать о сходимости положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0,$, если 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ сходится ,
- 2) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$?

Радикальный признак Коши

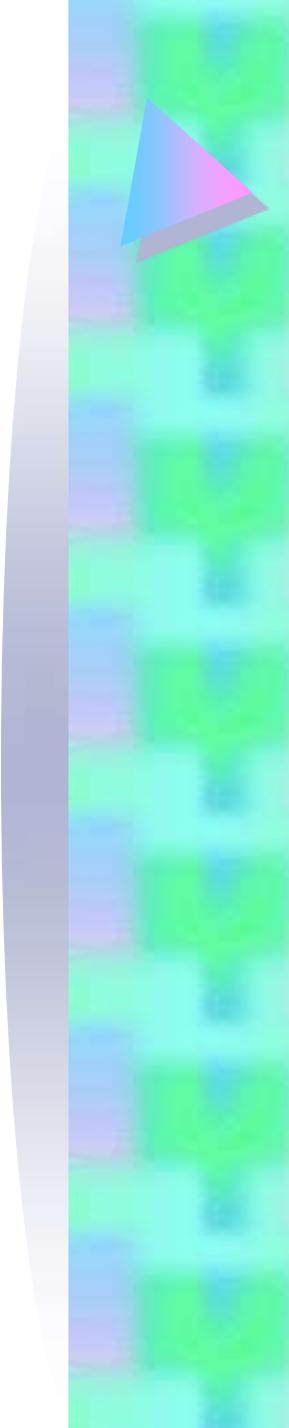
- Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

- Если $l < 1$, то ряд сходится; если $l > 1$, то ряд расходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

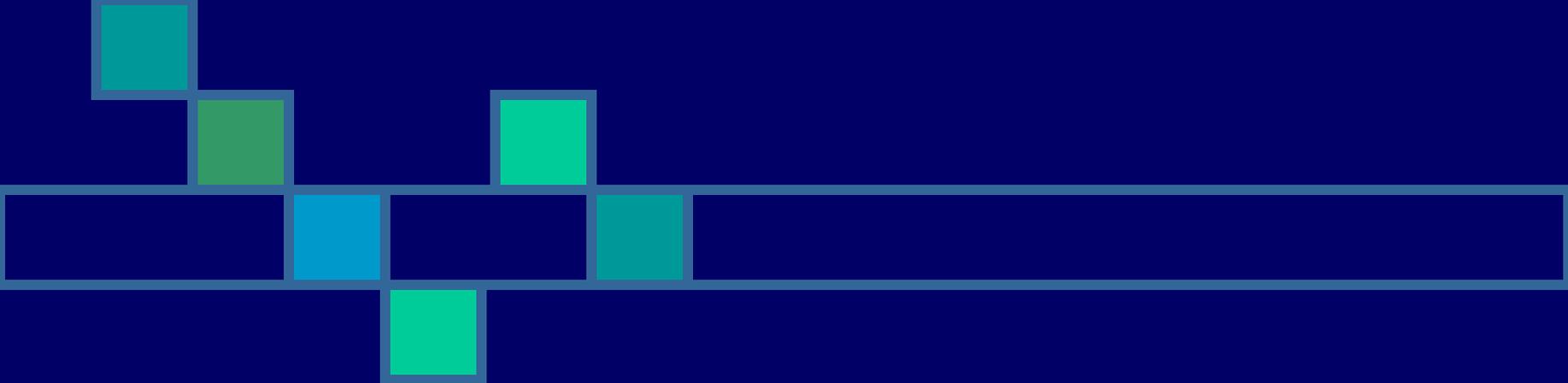
- При $l = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя



Примеры

- 1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+3)^n}$$

- 2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n^2}}{3^n}$$



Сходимость знакопеременных рядов



Сходимость знакопеременных рядов

- Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное число членов **разных** знаков. Такие ряды называются **знакопеременными**. Будем рассматривать также ряды, составленные из **абсолютных** величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$
- **Теорема 1.** Если ряд из **абсолютных** величин *сходится*, то *сходится и исходный* **знакопеременный** ряд.
- **Пример.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$

Абсолютная и условная сходимость рядов

- Если ряд из **абсолютных величин** $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ **сходится**, то исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**.
- Если **знакопеременный ряд** сходится, а **ряд из абсолютных величин** **расходится**, то говорят, что знакопеременный ряд **сходится условно**.
- Ряд, члены которого **поочерёдно** принимают разные знаки, называется **знакопеременяющимся**.

Признак Лейбница

- **Теорема.** Пусть дан знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, a_n > 0.$$

- Если $a_n \geq a_{n+1}, n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то знакочередующийся ряд сходится.

- При этом абсолютная величина остатка

$$r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

- не превышает абсолютной величины его первого члена a_{m+1} : $|r_m| \leq a_{m+1}$.

Примеры

- Исследовать сходимость рядов:

- 1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- 2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+15}$$

- 3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{n!}$$

- 4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$$

- 5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{(n+1)^n}$$

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов

- Рассмотрим произвольный ряд
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$, (2)
- составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке.

Теорема. Если ряд (1) сходится абсолютно, то ряд (2) также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, т.е. от перестановки местами членов абсолютно сходящегося ряда сходимость и сумма не меняются.

Теорема Римана

Замечание. Для условно сходящихся рядов переместительное свойство не выполняется.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Теорема. Если ряд (1) сходится условно, то **каково бы ни было число A** , можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равной A .