Лекция 5

Замена переменных и интегрирование по частям. Геометрические приложения.

Замена переменной в определённом интеграле

- **Теорема**. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и удовлетворяет условиям $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

  Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Примеры

- 1. $$\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx$$
- 2. $$\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Интегрирование чётных и нечётных функций

- Если функция $f(x)$ ***чётна***, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

- Если функция $f(x)$ ***нечётна***, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Интегрирование по частям в определённом интеграле

- **Теорема**. Если функции $\mathbf{u(x), v(x)}$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{u(x)dv(x) = u(x)v(x)}\Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v(x)du(x)}.$$

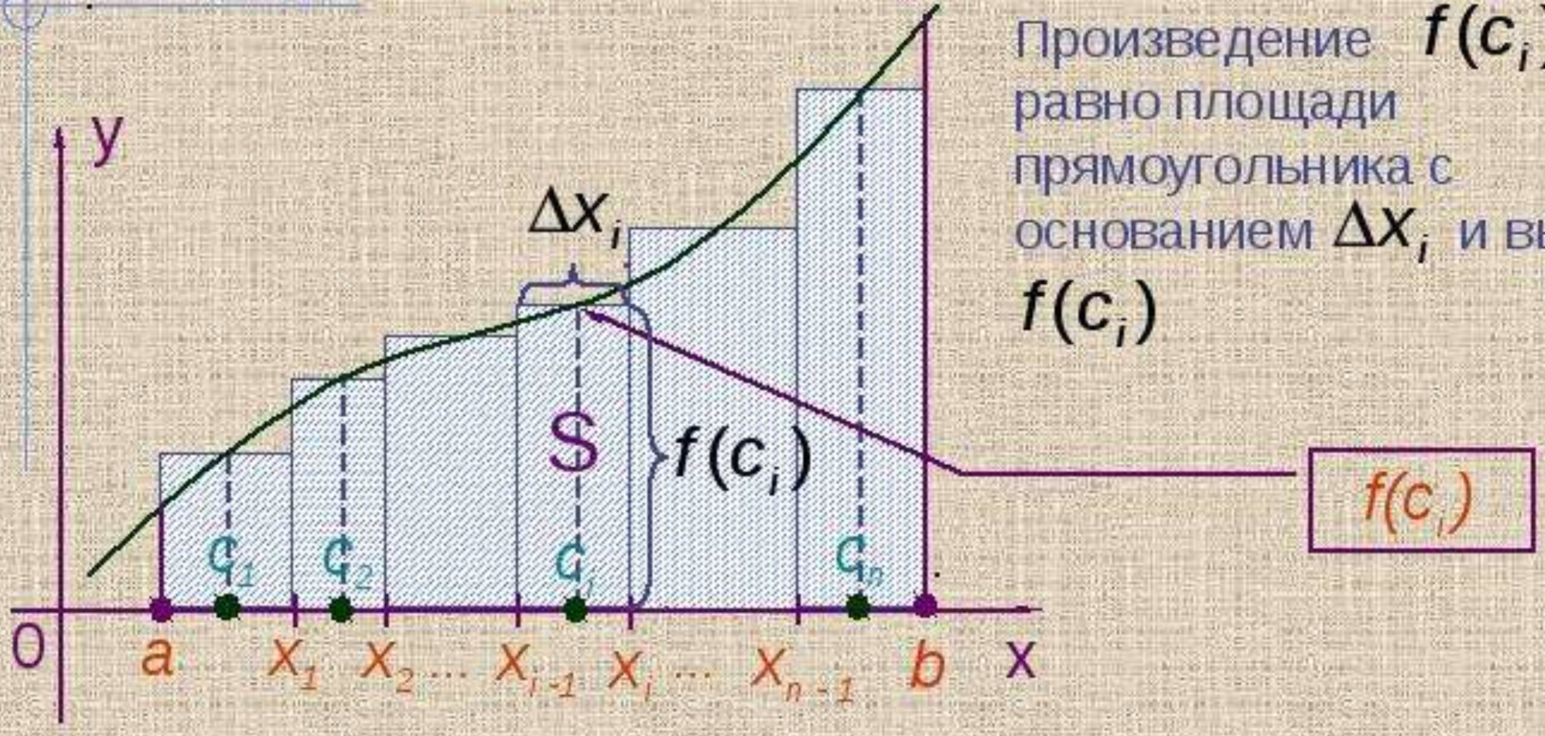
Примеры

- 1. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$
- 2. $\int\limits_{0}^{1} \ln(1+x)\,dx$
- 3. $\int\limits_{0}^{2} x^3 e^{x^2}\,dx$

Геометрические приложения определённого интеграла

Лекция 5

Геометрический смысл определенного интеграла



Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$

Сумма таких произведений: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$

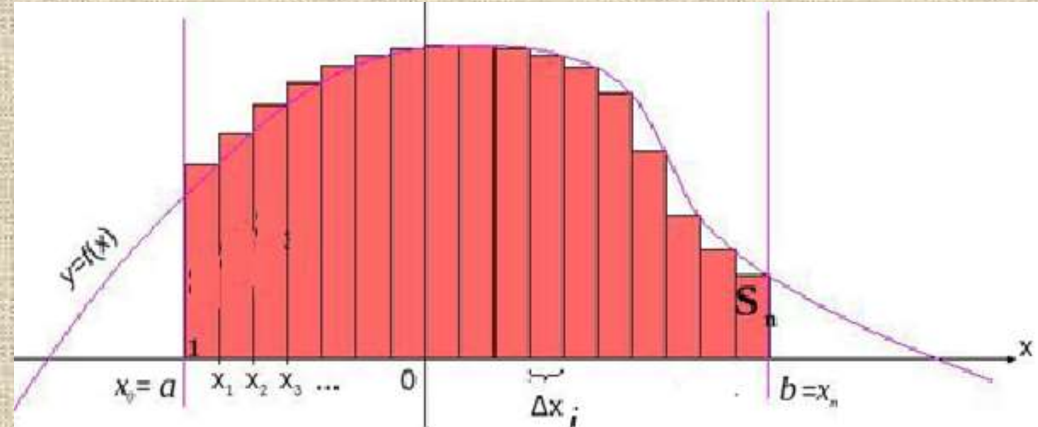
(интегральная сумма) равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади криволинейной трапеции: $S \approx S_n$

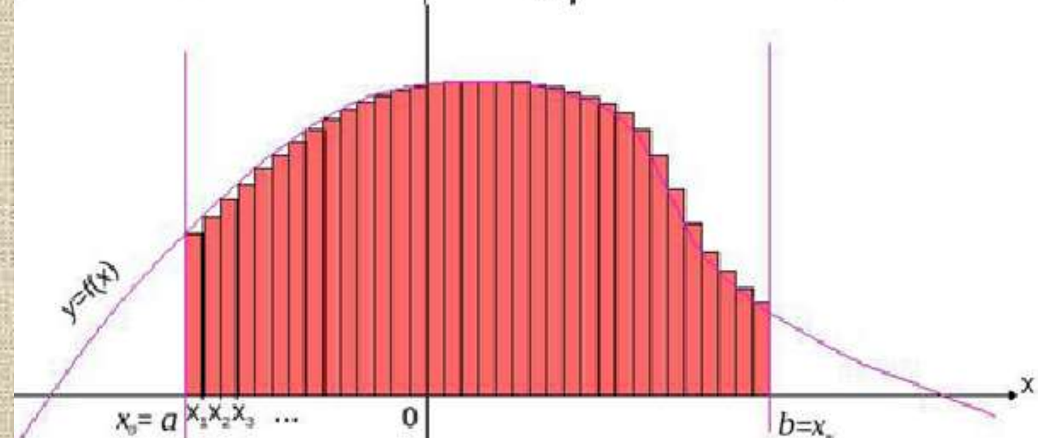
С уменьшением величин Δx_i точность формулы $S_n \approx S$ увеличивается.

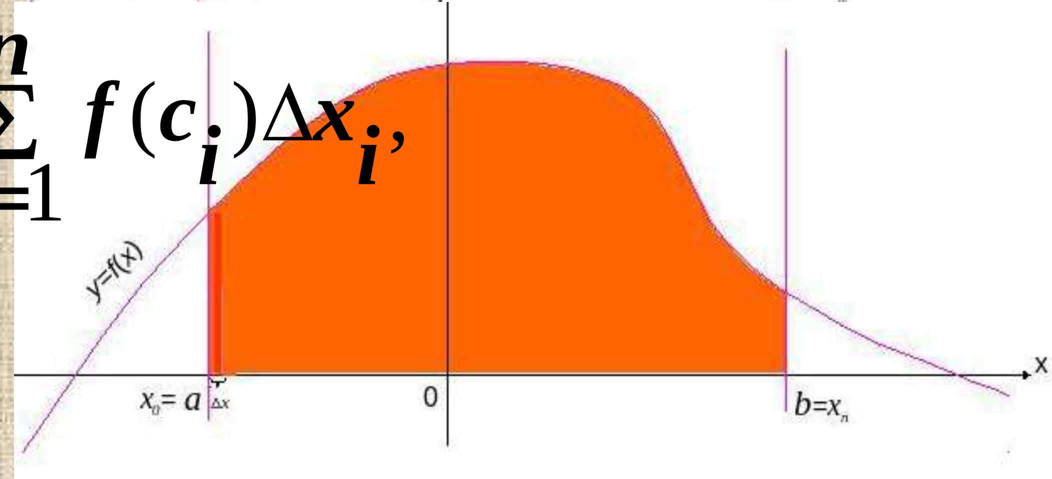
Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда Δx_i

стремится к нулю:

$$S = \lim_{d_n \to 0} S_n = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$







Площадь фигуры, ограниченной кривой , заданной параметрическими уравнениями

- Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), (y(t) \geq 0), \ t_1 \leq t \leq t_2,$$

- осью абцисс и прямыми

$$x = a, \quad x = b,$$

- причём $x'(t) \geq 0, \ \ a = x(t_1), \ \ b = x(t_2).$ Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t))x'(t)dt$$

Замечание

- В общем случае площадь криволинейной трапеции, ограниченной параметрически заданной кривой, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left| y(t))\, x'(t) \right| dt$$

Пример

- Найти площадь, ограниченную осью абсцисс и аркой циклоиды

$$x = R(t - \sin t),\; y = R(1 - \cos t)$$

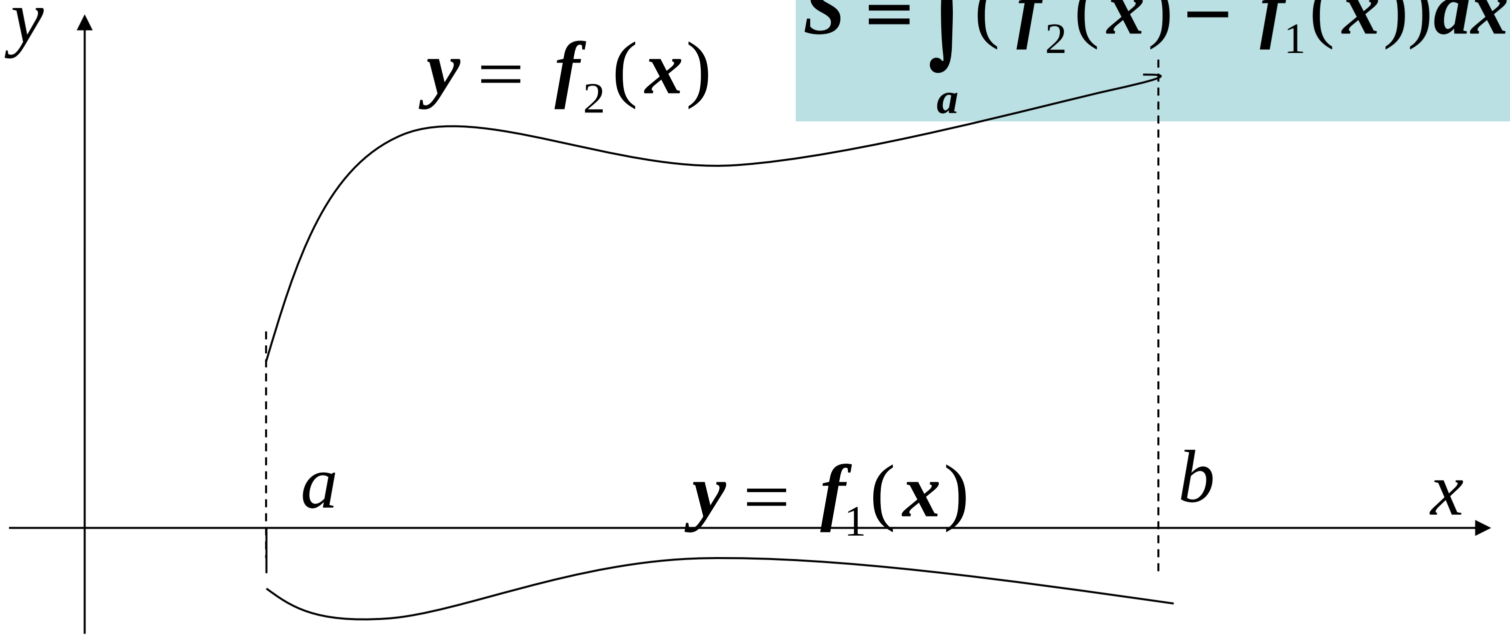
Площадь криволинейной трапеции общего вида

- Площадь фигуры, заданной неравенствами

$$f_1(x) \le y \le f_1(x), a \le x \le b,$$

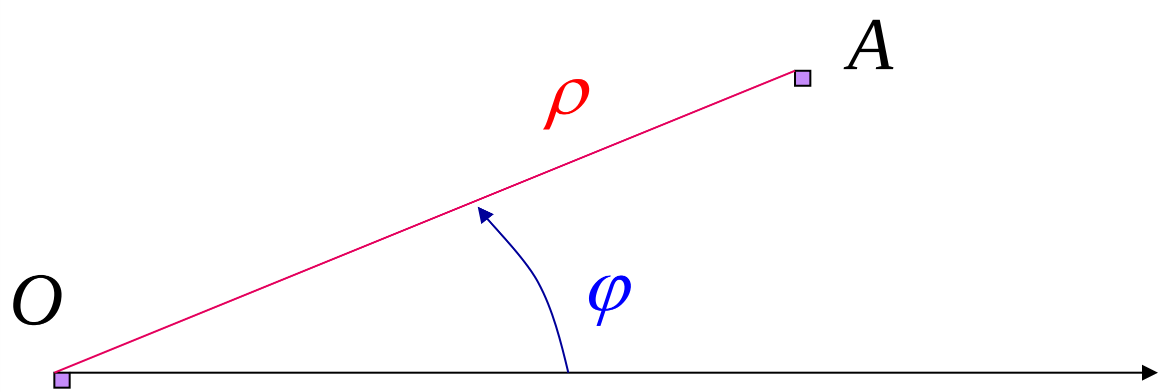
- определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$



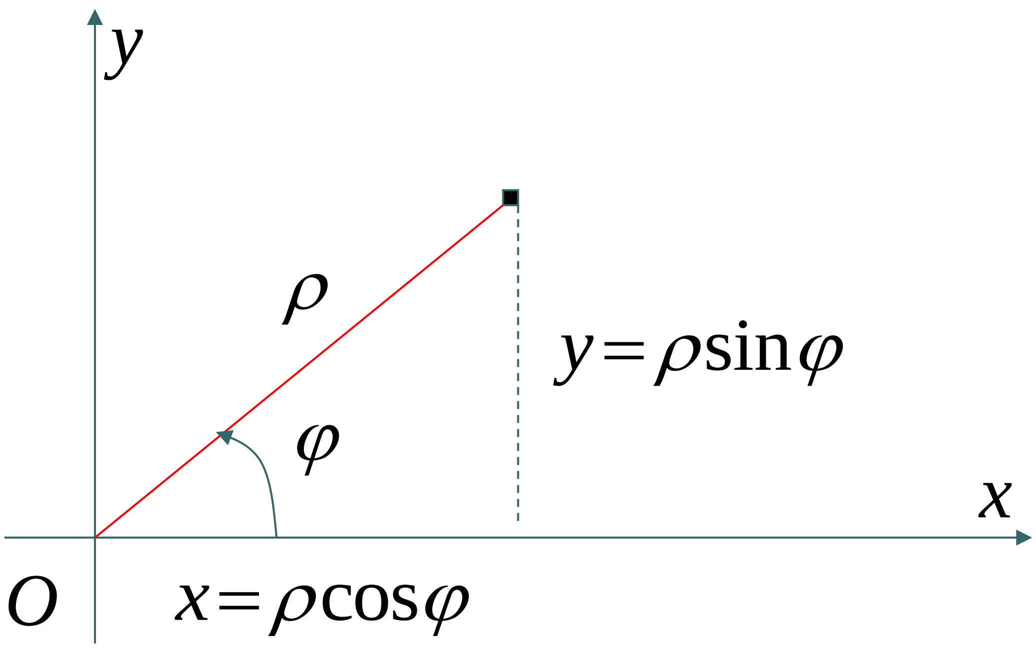
Полярная система координат

- Рассмотрим следующую криволинейную систему координат: О – ***полюс***, OL - ***полярная ось***. Полярные координаты точки $A(\rho,\varphi),\ \rho\geq 0,$ угол φ отсчитывается против часовой стрелки.



Связь между декартовыми и полярными координатами

- Справедливы формулы преобразования полярных координат (ρ, φ) в декартовы (x, y).



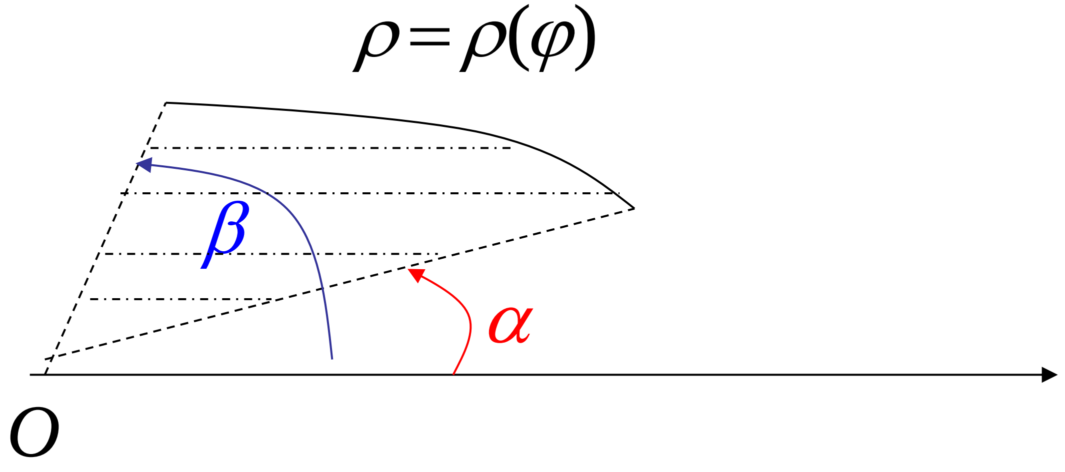
Вычисление площади криволинейного сектора

- Площадь криволинейного сектора:

$$0 \le \rho \le \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

- Вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$



Пример

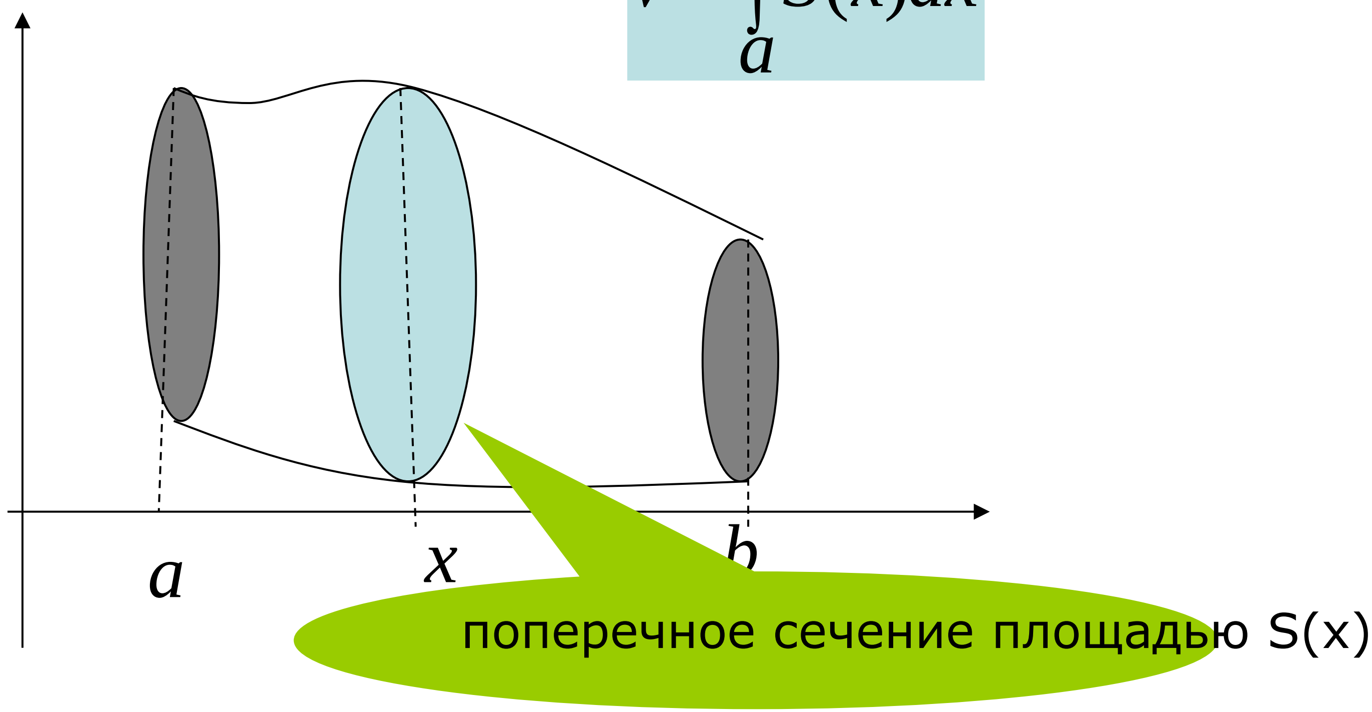
- Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

Объём тела по известной площади поперечного сечения

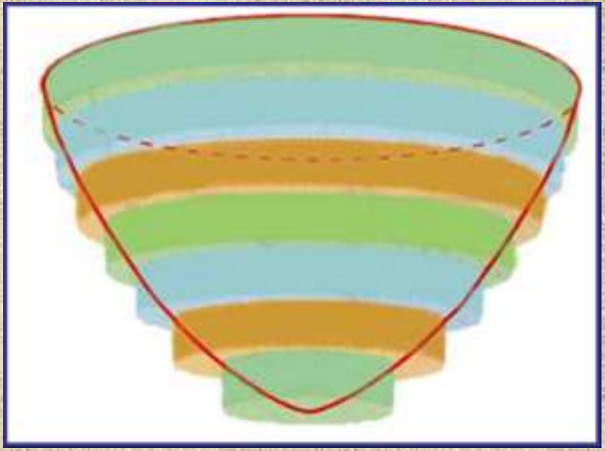
- Пусть $S(x), a \leq x \leq b$ известная площадь поперечного сечения тела. Тогда объём тела V вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

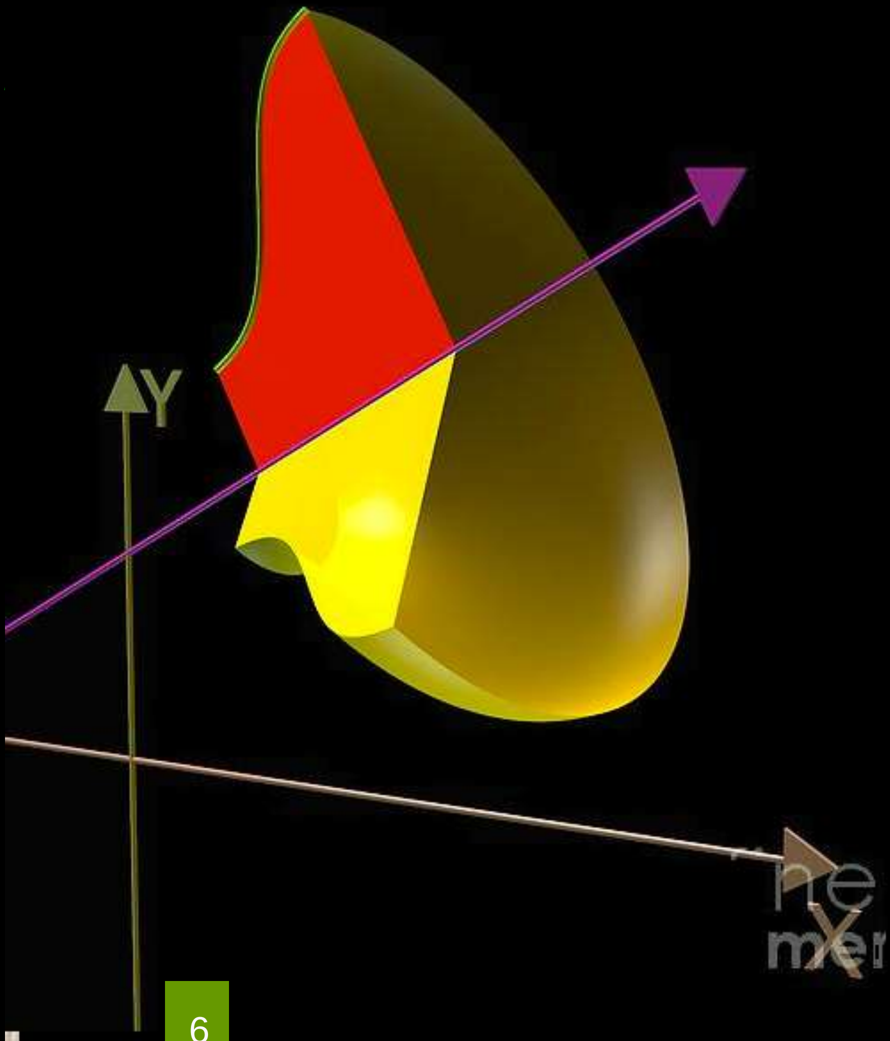


Замечание

- *Идея разрезания на полоски, или слои, принадлежит древнегреческому ученому Архимеду и применялась им для вычисления объёма и поверхности шара, объёма и поверхности других тел.*



Объём тела вращения

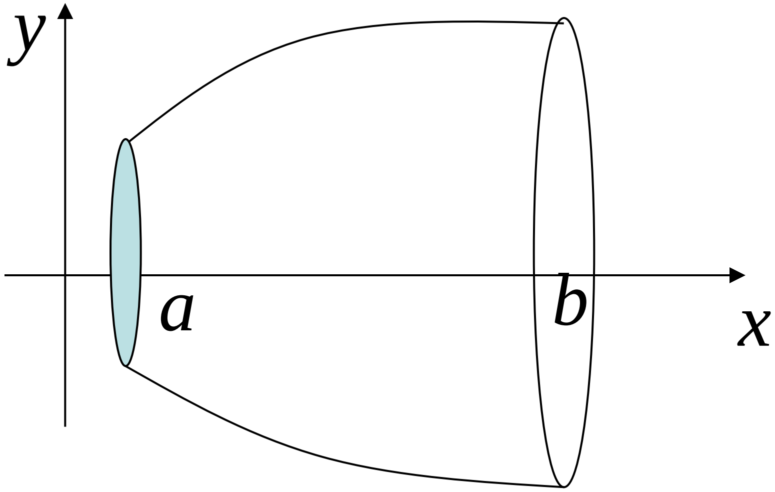


Объём тела вращения

- Пусть непрерывная кривая

$$y = f(x), a \le x \le b, (f(x) \ge 0)$$

- вращается вокруг **оси Ох**, тогда объём тела вращения вычисляется по формуле



$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

Объём тела вращения вокруг **оси Оу**

- Пусть непрерывная кривая

$$y = f(x),\ a \le x \le b, (f(x) \ge 0)$$

- вращается вокруг **оси Оу**, тогда объём тела вращения вычисляется по формуле

$$\boxed{V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.}$$

Вращение вокруг оси OY.

Пусть криволинейная трапеция, описанная выше, вращается вокруг оси OY.

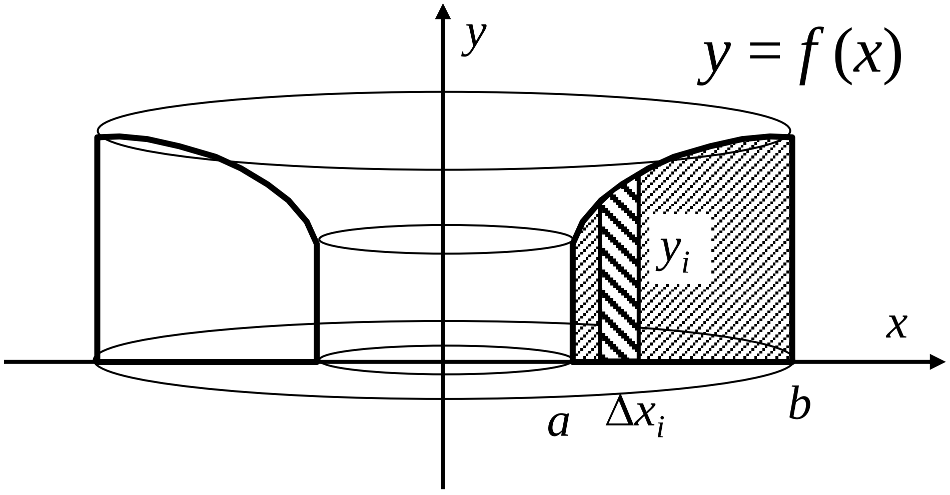
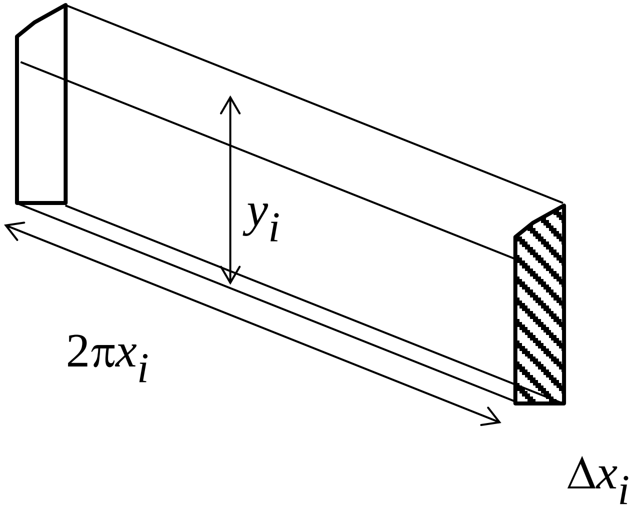


Схема вывода формулы:

Выделим элементарную трапецию, расположенную над отрезком Δx_i оси OX. При ее вращении вокруг оси OY возникает кольцо радиуса x_i с криволинейным верхним краем. Разрежем его по плоскости OXY и выпрямим. В результате получается пластина. Отрезав у пластины верхний криволинейный край, превращаем ее в параллелепипед.



При малой величине Δx_i объем исходного элементарного кольца приблизительно равен объему полученного параллелепипеда:

$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i y_i \Delta x_i$$

Объем тела вращения равен сумме объемов всех элементарных колец:

$$V_y = \sum_i \Delta V_i \approx 2\pi \sum_i x_i y_i \Delta x_i$$

Проведём предельный переход при $\Delta x_i \to 0$, $n \to \infty$. В результате получим формулу для объёма тела вращения вокруг оси *OY*:

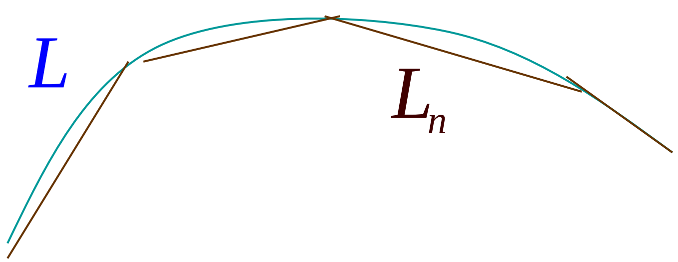
$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x y \, dx,}$$ где $y = f(x)$

Длина дуги кривой

- Пусть кривая L задана параметрическими уравнениям. Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками

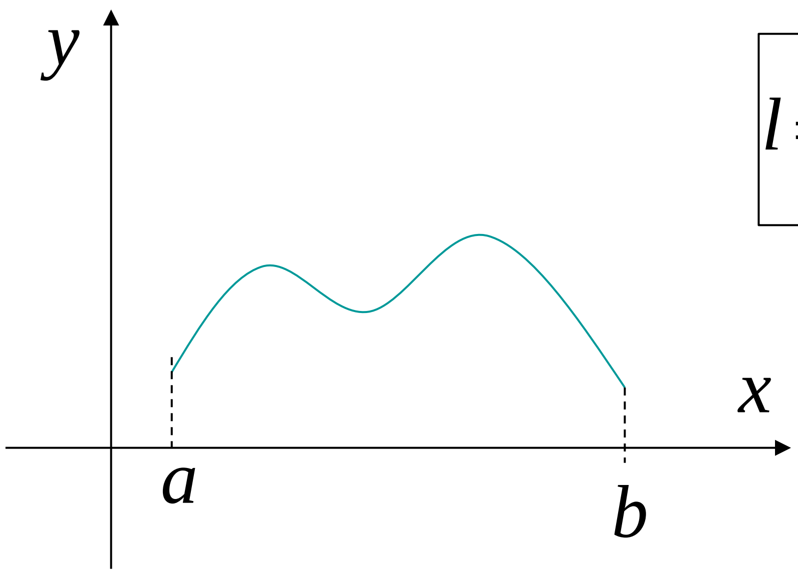
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots t_{n-1} < t_n = \beta.$$

- Длину соответствующей ломаной обозначим L_n. Предел длины ломаной L_n , когда
- $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0$ называется длиной кривой L
- . а кривая L называется
- **_спрямляемой_** кривой.



Вычисление длины дуги кривой

- ***Теорема.*** Пусть кривая L является графиком функции $y = f(x), a \le x \le b,$ имеющей непрерывную производную на $[a,b]$, тогда кривая L спрямляема и её длина l вычисляется по формуле



$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.}$$

Гладкие кривые

- Пусть кривая L задана параметрическими уравнениям

$$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta.$$

- Если функции $x=x(t), y=y(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$, то кривая L называется непрерывной кривой. Если функции $x=x(t), y=y(t)$ имеют ***непрерывные производные*** на $[\alpha,\beta]$ ***одновременно в нуль не обращающиеся***, то L называется гладкой кривой .

Длина дуги гладкой кривой

- Пусть гладкая кривая L задана параметрическими уравнениям $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$ тогда длина кривой вычисляется
- по формуле

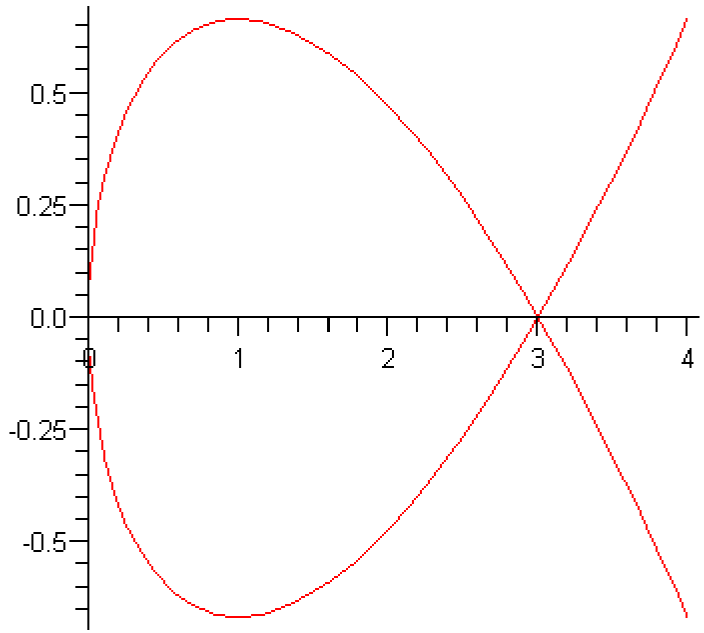
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Пример

- Вычислить длину петли кривой

$$L: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3}, \end{cases}$$

График кривой L



Длина кривой в полярных координатах

- Пусть кривая L задана уравнением в полярных координатах $L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ и функция
- $\rho = \rho(\varphi)$ имеет непрерывную на отрезке $[\alpha, \beta]$ производную, тогда длина кривой вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.}$$

Пример

- Найти длину кардиоиды

$$\rho = a(1+\cos\varphi)$$