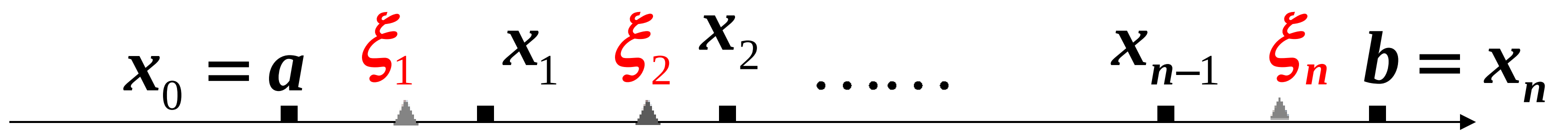
Определённый интеграл. Конструкция. Свойства.

Лекция 3-4

Шаг 1. Разбиение отрезка.

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьём этот отрезок на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b.$$



- Обозначим полученное разбиение τ_n .
- Выберем на каждом отрезке разбиения ***произвольную точку*** $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots n.$

Шаг 2. Интегральные суммы

- Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$ длину отрезка разбиения . Построим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

- ***которая называется интегральной суммой.***

- *Более точное обозначение интегральной суммы не* S_n *, а* S_{τ_n} *. (Почему?)*

Шаг 3. Предельный переход

- Величина $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ называется диаметром разбиения τ_n
- *Если* ***для любой последовательности*** *раз*биений при неограниченном измельчении разбиений существует предел интегральных сумм

$$I = \lim_{d_n \to 0} S_n = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

- *не зависящий от выбора точек* ξ_i , то этот предел называется ***определённым интегралом.***

Интегрируемые функции

- Если указанный предел существует , то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a,b]$, а определённый интеграл обозначается символом

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

- ***Теорема 1. (***Достаточное условие интегрируемости**).** *Если функция* $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a,b]$ *, то она интегрируема на этом отрезке.*

Замечания

- Построенный определённый интеграл называется также ***интегралом Римана***.
- Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\mathfrak{A})d\mathfrak{A}.$$

- Будем полагать **по определению** $\int_a^a f(x)dx = 0$

Необходимое условие интегрируемости.

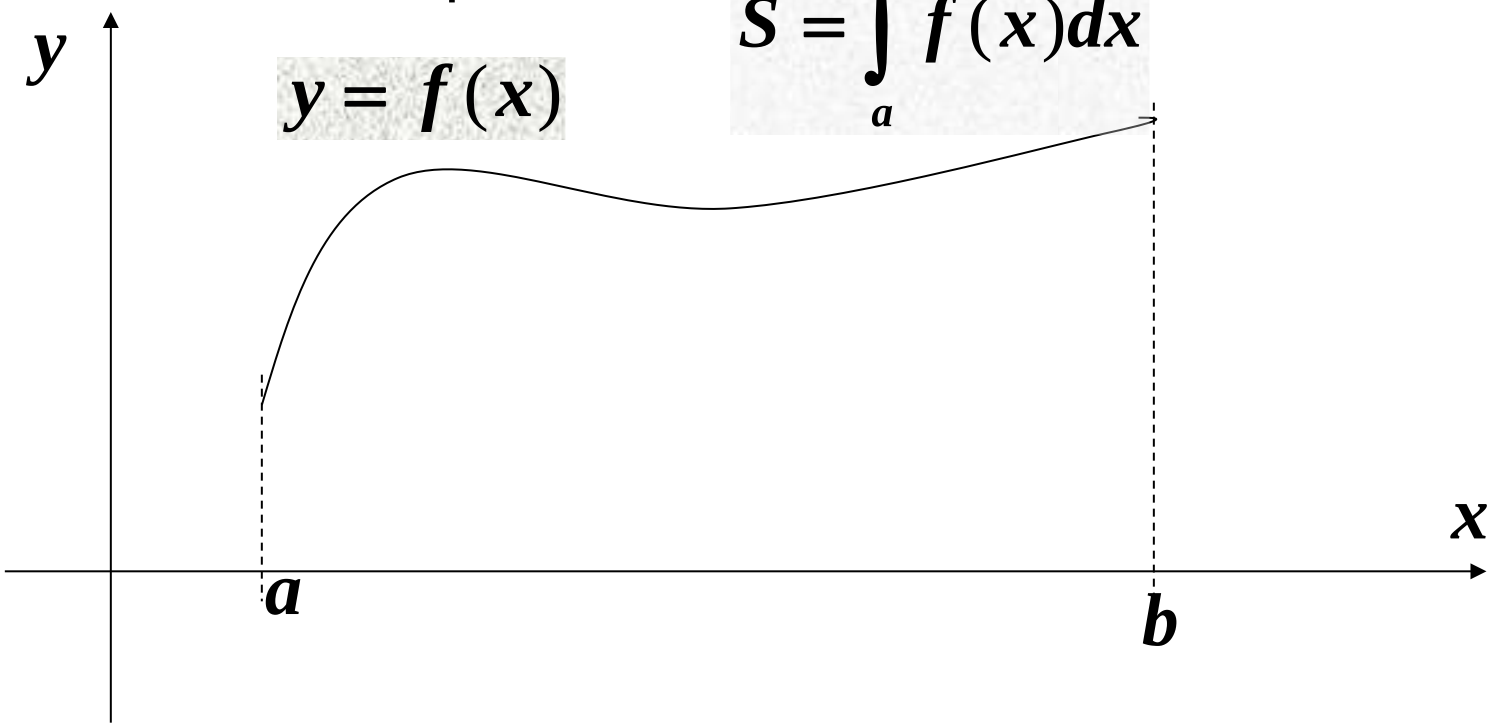
- ***Теорема 2.*** Если функция $y = f(x)$ ***интегрируема на отрезке*** $[a,b]$ ***, то она ограничена*** на этом отрезке, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$|f(x)| \le M,\ x \in [a,b].$$

Геометрическое истолкование определённого интеграла

- Если интегрируемая функция $f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$, то определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

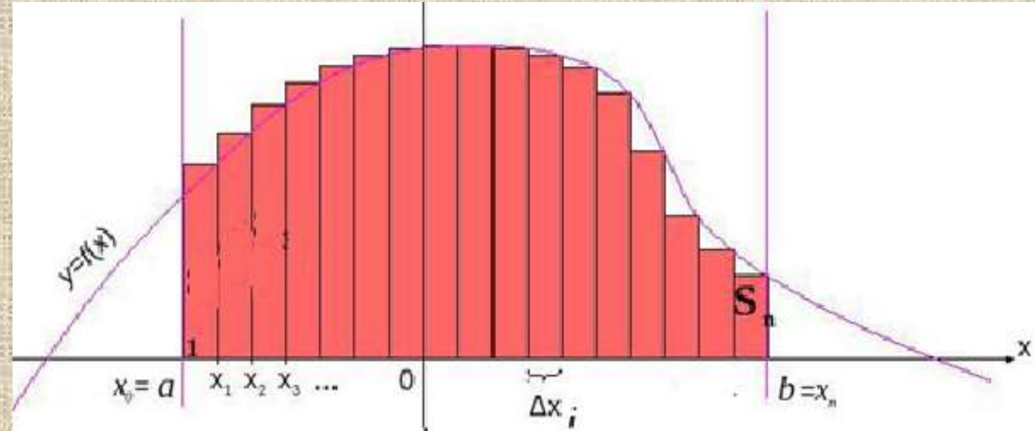


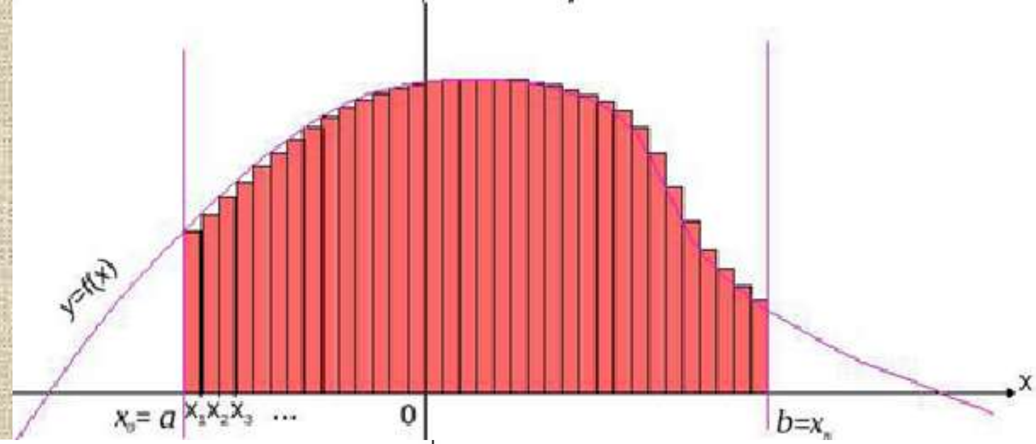
С уменьшением величин Δx_i точность формулы $S_n \approx S$ увеличивается.

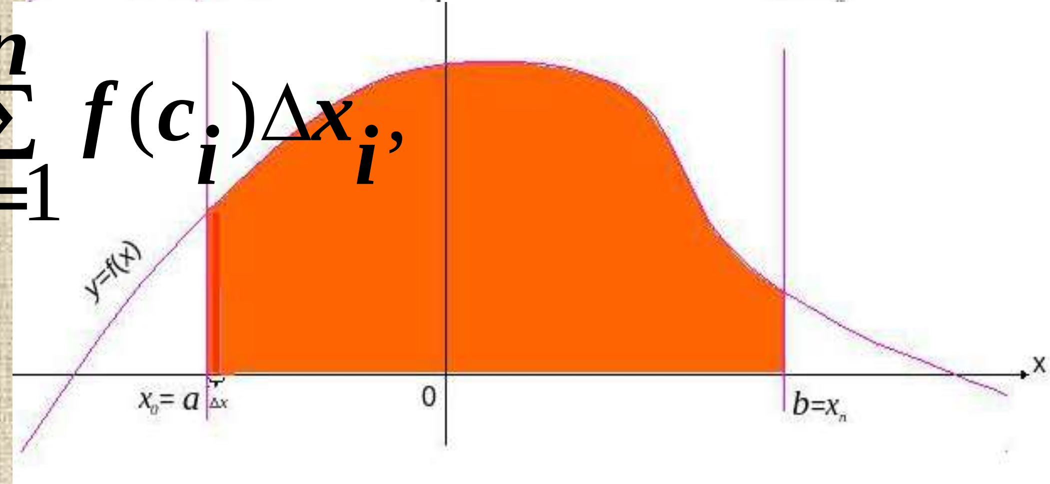
Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда Δx_i

стремится к нулю:

$$S = \lim_{d_n \to 0} S_n = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$







Свойства определённого интеграла

- **Свойство 1 (нормировки).**

$$\int_a^b dx = b - a.$$

- **Свойство 2 (линейности).**

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha \in R.$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Свойства определённого интеграла

- ***Свойство 3 (аддитивности).*** Пусть $a < c < b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (\mathrm{A})$$

- Замечание. Определим для $a > b$ интеграл $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$ Тогда формула (A) справедлива для любых $a, c, b.$

Свойства определённого интеграла

- ***Свойство 4 (позитивности)***. Если функция

$$f(x) \geq 0,\ x \in [a, b],$$

то $$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Следствие (монотонность интеграла). Если

$$f(x) \geq g(x),\ x \in [a, b],$$

то $$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

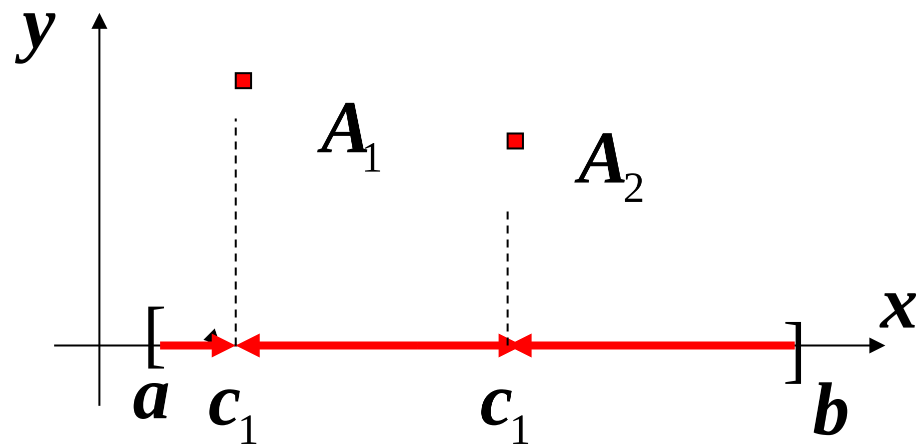
Свойства определённого интеграла

- ***Свойство 5 (сглаживания).*** Если в конечном числе точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$ отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ отлична от нуля , т.е.
- $f(c_i) = A_i \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots n$ и

$$f(x) = 0, \; x \neq c_i, \; i = 1, 2, \ldots n$$

- то

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$



Следствие свойства 5

- Если интегрируемую на отрезке функцию $f(x)$ изменить в конечном числе точек отрезка, то для полученной функции $\tilde{f}(x)$ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

Теорема о среднем

- Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

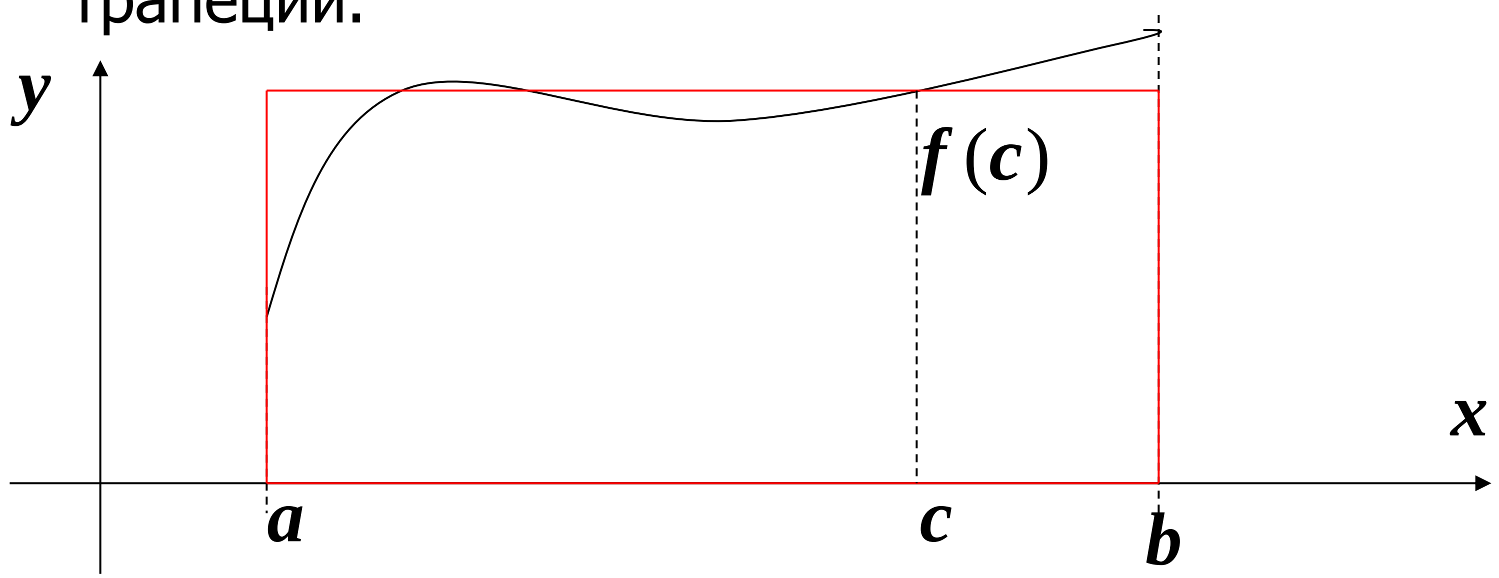
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

- ***Замечание***. Можно доказать более точное условие для точки c : а именно

$$c \in (a,b).$$

Геометрическое истолкование теоремы о среднем

- Если функция $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b],$ то теорема о среднем означает, что существует прямоугольник равновеликий криволинейной трапеции.



Определённый интеграл с переменным верхним пределом

- Пусть функция $f(t)$ интегрируема на любом отрезке $[a, x], a \le x \le b$. Рассмотрим функцию
- $\Phi(x)$, заданную определённым интегралом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

- Функция $\Phi(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

Дифференцирование интеграла с переменным верхним пределом

- **Теорема. Если подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом**

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

- **дифференцируем на $[a,b]$, и справедливо равенство**

$$\Phi'(x) = f(x), \; x \in [a,b].$$

Формула Ньютона- Лейбница

- **Теорема (основная теорема интегрального исчисления).** Пусть *функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *. Если функция* $F(x)$ *является* ***произвольной её первообразной,*** *то справедлива формула Ньютона – Лейбница.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Примеры

- **1.** $\int_0^1 x^2 dx$
- **2.** $\int_0^1 x e^{x^2} dx$