Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

- Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна **вдоль гладкой кривой,** заданной параметрически

$$\mathbf{L}: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{t}), \alpha \le \mathbf{t} \le \beta,$$

то *криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)* –

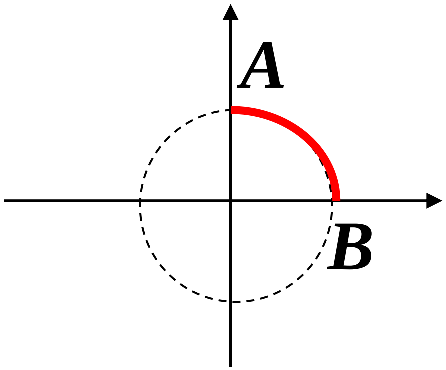
$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Замечание. Криволинейный интеграл первого рода от неотрицательной функции $\rho = f(x,y)$ можно истолковать как массу кривой **L** .

Пример

- Вычислить интеграл

$$\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dl,$$

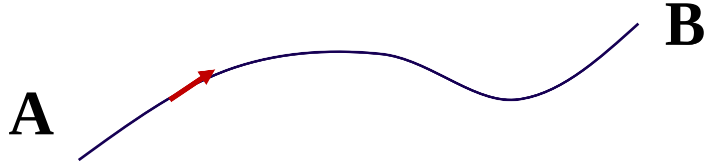


- где L дуга AB окружности $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в первой четверти.

Криволинейный интеграл второго рода

Ориентация кривой

- Кривая L_{AB} называется ***ориентированной кривой,*** если на ней задан порядок следования точек от точки $\mathbf{A}$ к точке $\mathbf{B}$.



- Кривая L_{BA} называется ***противоположно*** ориентированной кривой к кривой L_{AB}.

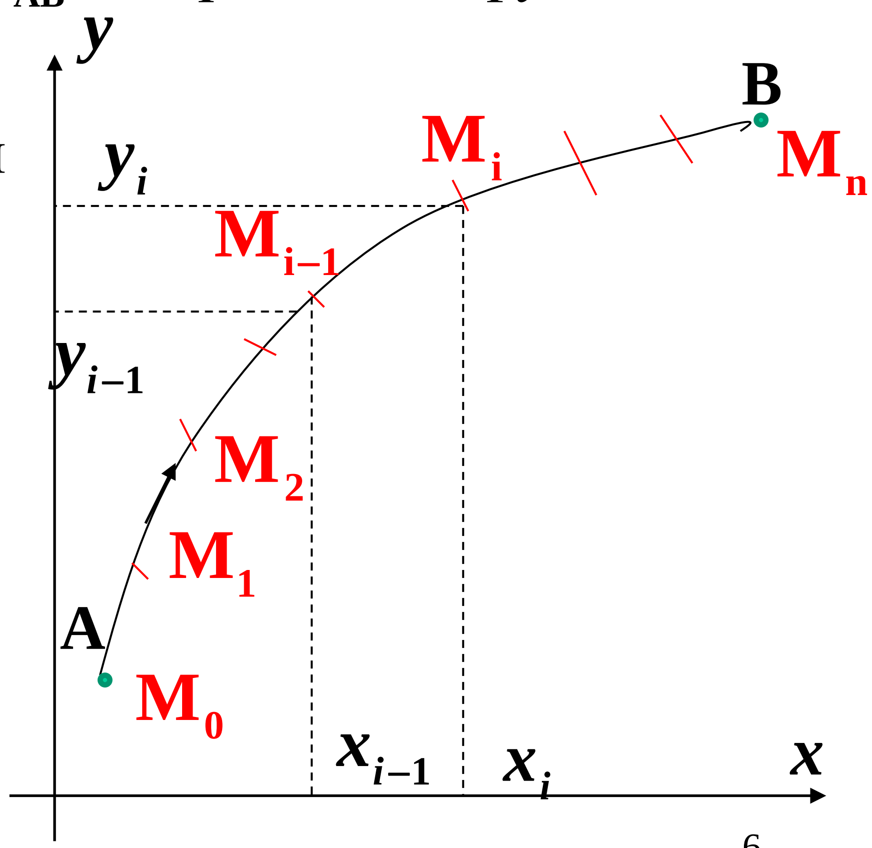
Конструкция криволинейного интеграла 2-го рода

- Пусть на гладкой кривой $\mathbf{L}_{\mathbf{AB}}$ определены функции

  $P(x, y), \quad Q(x, y).$

- Разобьём $\mathbf{L}_{\mathbf{AB}}$ на n частей так, чтобы $\mathbf{M}_0 = \mathbf{A}, \mathbf{M}_n = \mathbf{B}.$
- Обозначим (x_i, y_i) координаты точки $\mathbf{M}_i$, и

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$



- Составим интегральные суммы

$$S_n(P) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

$$S_n(Q) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i ,$$

где (ξ_i, η_i) - **произвольная** точка дуги $\cup \mathbf{M_{i-1}M_i}$

- Если существуют пределы интегральных сумм, не зависящие от разбиения и выбора точек на дугах:

$$(1)\ \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i = \int\limits_{L_{AB}} P(x, y)\,dx$$

$$(2)\ \lim_{\max\limits_i \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i = \int\limits_{L_{AB}} Q(x, y)\,dy,$$

то эти пределы называются ***криволинейными интегралами второго рода*** или интегралами по ***ориентированной кривой*** $\mathbf{L}_{\mathbf{AB}}$.

- Сумма интегралов (1) и (2) называется криволинейным интегралом 2-го рода общего вида и обозначается

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

- В случае ***пространственной ориентированной кривой*** $\mathbf{L_{AB}}$ и заданной на кривой функциях

$$P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)$$

аналогично вводится интеграл

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Существование и вычисление криволинейного интеграла.

- **Теорема.** Если функция $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны вдоль гладкой кривой $\mathrm{L_{AB}}$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

существует.

- Если гладкая ориентированная кривая $\mathrm{L_{AB}}$, задана параметрическими уравнениями

$$\mathrm{L_{AB}}: \quad \mathrm{x = x(t),\ y = y(t)}, \alpha \le \mathrm{t} \le \beta.$$

причём, при *изменении параметра* t *от* α *к* β *соответствующая точка на кривой пробегает кривую от* **A** *к* **B,**

- то справедливы формулы

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t))x'(t)dt,$$

$$\int_{L_{AB}} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

Вычисление криволинейного интеграла (частный случай)

- Рассмотрим гладкую ориентированную кривую $\mathbf{L_{AB}}$, заданную уравнением

$$\mathbf{y = y(x),\ x \in [a, b],}$$

причём, при изменении переменой $\mathbf{x}$ от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ соответствующая точка на кривой пробегает кривую от $\mathbf{A}$ к $\mathbf{B}$.

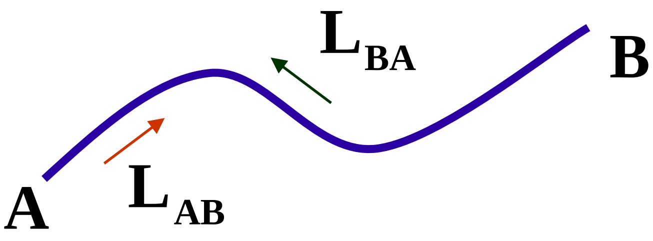
- Справедливы формулы

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)\,dx = \int\limits_a^b P(x, y(x))\,dx,$$

$$\int\limits_{L_{AB}} Q(x, y)\,dy = \int\limits_a^b Q(x, y(x))\,y'(x)\,dx.$$

Свойства криволинейного интеграла
Изменение ориентации кривой

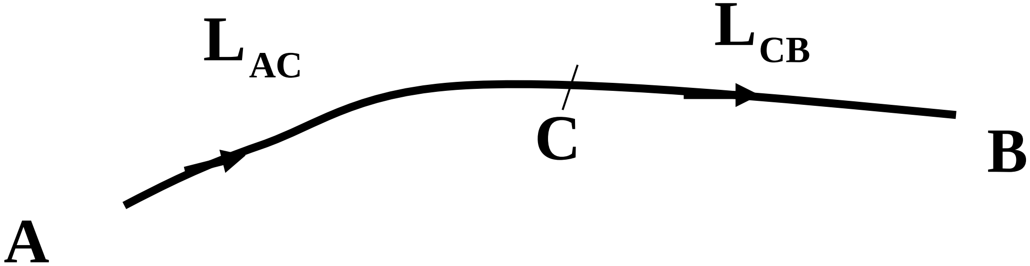
- При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак на противоположный:



$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{L_{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Свойство аддитивности

- Если ориентированная кривая $\mathbf{L_{AB}}$ разрезана на две соответственно ориентированно кривые $\mathbf{L_{AC}}$ $\mathbf{L_{CB}}$,



то $$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$\int\limits_{L_{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{L_{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Замечание

- Если кривая $\mathbf{L_{AB}}$ является ***кусочно - гладкой*** кривой, то криволинейный интеграл по этой кривой определяется как **сумма интегралов по гладким кускам** кривой.

Пример

- Вычислить интеграл

$$\int\limits_{L_{AB}} ydx + xdy$$

- 1) L_{AB} – ломаная, соединяющая точки

$$A(1,0), C(1,1), B(1,0)\ .$$

- 2) L_{AB} – дуга окружности единичного радиуса.

Физическое истолкование криволинейного интеграла 2-го рода

- Если материальная точка движется вдоль кривой L из точки A_1 в точку A_2 под действием силы

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

- то работа вычисляется по формуле

$$W = \int\limits_{L_{A_1A_2}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

[redacted]

- Криволинейный интеграл второго рода можно записать в **векторном виде**

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

где

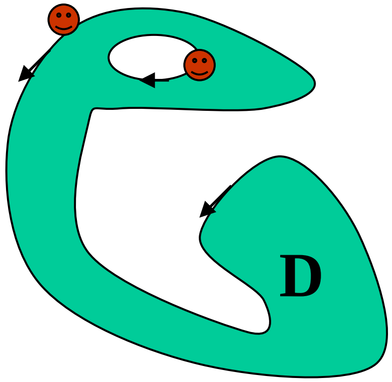
$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}, \quad L_{AB} = AB$$

•Если **L** - замкнутая кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, то можно определить **криволинейный интеграл по замкнутой кривой**

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Пусть L - замкнутая гладкая кривая без точек самопересечения , входящая в границу области D. **Положительной ориентацией кривой** L **относительно области** D называется такая ориентация кривой, что при движении по L ближайшие точки области ***остаются слева*** .



Формула Грина

- Пусть граница Γ области D состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких самонепересекающихся кривых. Если функции $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны в замыкании $\overline{D}$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x},$ то справедливо равенство

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Граница Γ ориентирована в положительном направлении.

▪Примеры

1. Вычислить, используя формулу Грина, криволинейный интеграл.

$$\oint_L ydx + xdy,$$

где L - замкнутая ломаная, соединяющая точки.

$$A(1,0),\ C(1,1),\ B(0,1)\ .$$

2. Вычислить, используя формулу Грина, криволинейный интеграл.

$$\oint_L (1 - x^2)ydx + (1 + y^2)xdy,$$

где $L : x^2 + y^2 = 2y.$

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

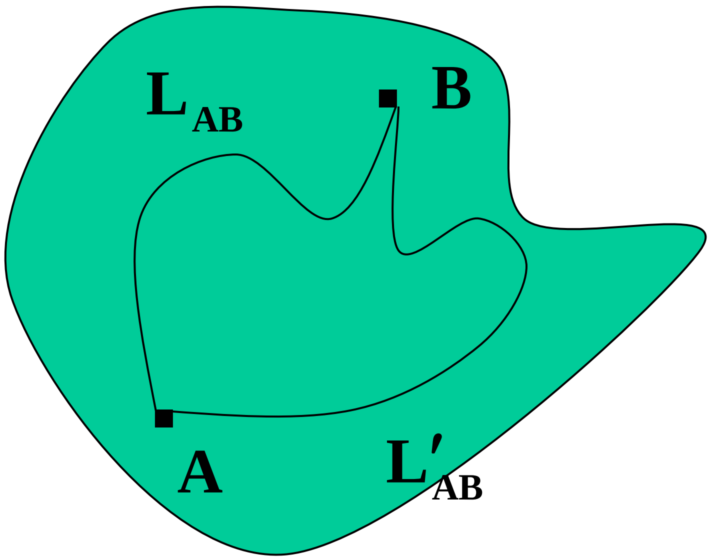
- В дальнейшем под термином область будем понимать **связное множество** точек на плоскости, **граница которого не принадлежит самому множеству.**
- Пусть функции $\mathbf{P(x,y), Q(x,y)}$ непрерывны в области $\mathbf{D}$. Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \mathbf{(1)}$$

для произвольных фиксированных точек $\mathbf{A \in D, B \in D}$

не зависит от кривой $\mathbf{L_{AB}}$ **, соединяющей эти точки**.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.



- **Теорема 1.** Условие **независимости** криволинейного интеграла от пути интегрирования равносильно **равенству нулю интеграла по любому замкнутому контуру лежащему в D .**

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования .Теорема 2

- **Теорема 2.** Для того чтобы криволинейный интеграл (1) не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно,чтобы выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

являлось полным дифференциалом некоторой функции, определённой в области **D,**

т.е. существует $\mathbf{U(x,y)}$ такая, что

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Теорема 2 (продолжение)

- При выполнении этого условия для любых точек **A** и **B,** принадлежащих **D,** и любой кривой **AB**, соединяющей эти точки в **D,** справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A).$$

- ***Замечание 1.*** Полученное равенство является обобщением формулы Ньютона- Лейбница для криволинейных интегралов.

Замечание 2.

Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

не зависящий от пути интегрирования, обозначается также в виде

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ координаты точек A, B.

Векторное поле

- Если в каждой точке $(x, y) \in D$ задан вектор

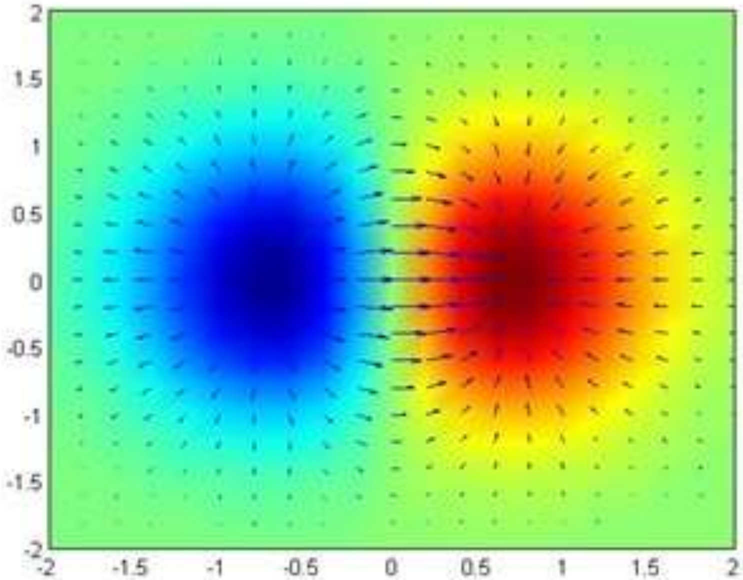
$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

- то говорят, что в области D задано векторное поле $\vec{F}(\vec{r})$,
- где $\vec{r} = (x, y)$ - радиус вектор в точку $M(x, y)$.
- Примером векторного поля является поле градиента

$$grad\, U(M).$$

Поле градиента

$$grad\, u(x,y)$$



Физическое истолкование теоремы 2

- С физической точки зрения независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования означает независимости работы в векторном поле

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

от кривой перемещения.

- Функция $U(x,y)$ такая, что

$$dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = gradU(M)$$

называется **потенциалом поля**. Из теоремы 2

- следует, что работа равна разности потенциалов

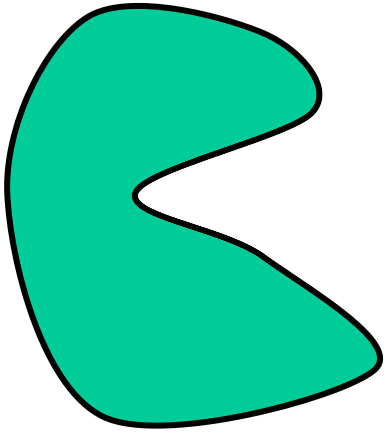
$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A)$$

Следствие

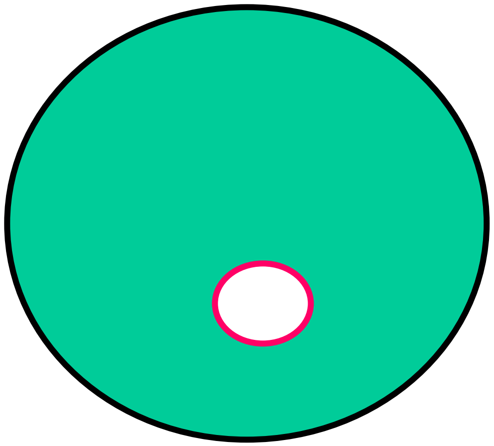
- Поле градиента $\vec{a} = grad\,U(M)$ является потенциальным полем

Односвязные области

- **Определение.** Область называется односвязной, если она ограничена **одной** замкнутой кусочно гладкой кривой без точек самопересечения.



Односвязная область



Неодносвязная область

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Теорема 3

- **Теорема 3.** Пусть функции $\mathbf{P(x,y), Q(x,y)}$ **непрерывны** вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}}$$

в **односвязной** области $\mathbf{D}$. Для того, чтобы криволинейный интеграл

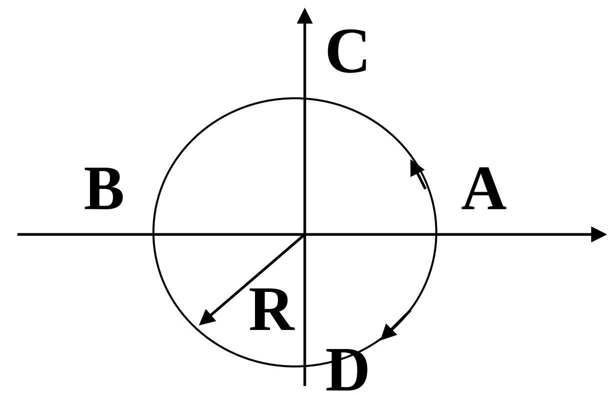
$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в области $\mathbf{D}$ выполнялось условие

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}}}.$$

Контрпример

- Рассмотрим интеграл



$$\int\limits_{AB} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

а в качестве контуров интегрирования рассмотрим верхнюю ACB и нижнюю полуокружности ADB, соединяющие точки

$$A(1,0),\, B(-1,0).$$

- **Вопрос**. Почему интегралы по верхней и нижней полуокружностям неравны?

Пример

- Вычислить работу по перемещению материальной точки под действием силы

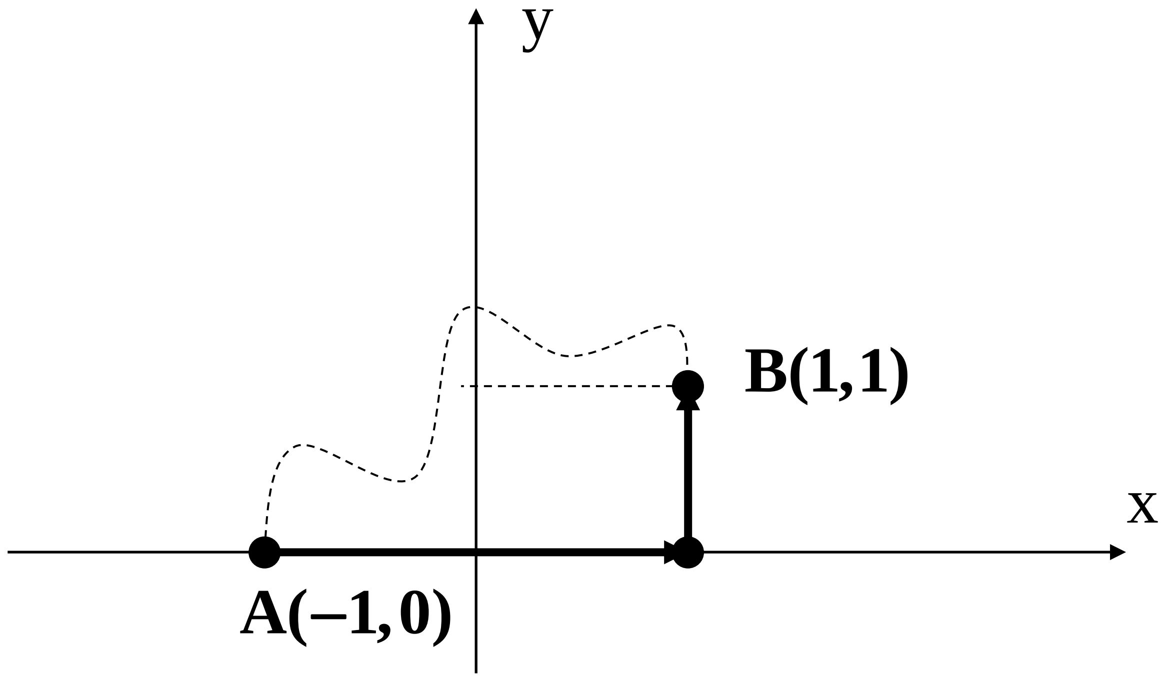
$$\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$$

- от точки **A(–1,0)** до точки **B(1,1).** . Зависит ли эта работа от линии перемещения?

Решение. $W = \int\limits_{AB} ydx + xdy.$ Проверим независимость работы от пути перемещения:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{1}, \qquad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{1}}$$

- Выбор пути перемещения.



Пример

- Вычислить $U(-1,1)$, если

$$dU = 2(xy - x)dx + x^2 dy, U(0,-1) = 1$$

Пространственный случай

- **Замечание**. Теоремы 1 и 2 имеют для криволинейных интегралов

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

- по пространственным кривым.

Пространственный случай

- **Ротором или вихрем** векторного поля

$$\vec{F}(\vec{r}) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

- называется вектор, который в каждой точке области D определяется формулой

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Критерий потенциальности

- **Теорема 4.** Пусть функции **непрерывны** вместе со своими частными производными

$$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$$

в области D. Для того, чтобы векторное поле $\vec{F}(\vec{r})$, ***было потенциальным***, необходимо, чтобы в области D выполнялось условие

$$rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

В случае дополнительных условий связности области D (поверхностная связность) условие $rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ является достаточным