Замена переменных в двойных интегралах

Замена переменных (общий случай)

- Пусть функции $\mathbf{x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ (u,v) \in D_{uv}}$ взаимно однозначно отображают область $\mathbf{D_{uv}}$ на область $\mathbf{D_{xy}}$, и имеют непрерывные частные производные, тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|I(u,v)\right|dudv,$$

где функция $$I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ называется **якобианом.**

- Известно, что якобиан отличен нуля в $\mathbf{D_{uv}}$.

Переход к полярным координатам

- Для перехода к полярным координатам заменим

$$\mathbf{x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.}$$

- Показать, что имеет место равенство

$$\mathbf{I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r.}$$

Формула перехода в двойном интеграле к полярным координатам

- Из общей формулы замены переменных следует

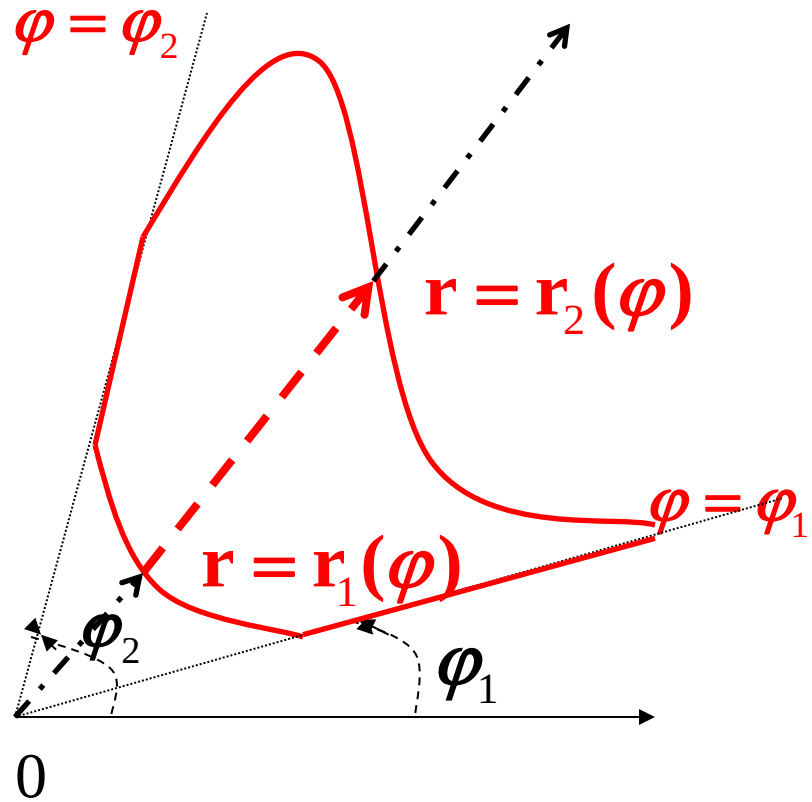
$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi.$$

Переход к повторному интегралу в полярных координатах.

- Область интегрирования надо задать в виде неравенств

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$$

$$\mathbf{r}_1(\varphi) \le \mathbf{r} \le \mathbf{r}_2(\varphi).$$



Повторный интеграл в полярных координатах

- Имеет место равенство

$$\iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

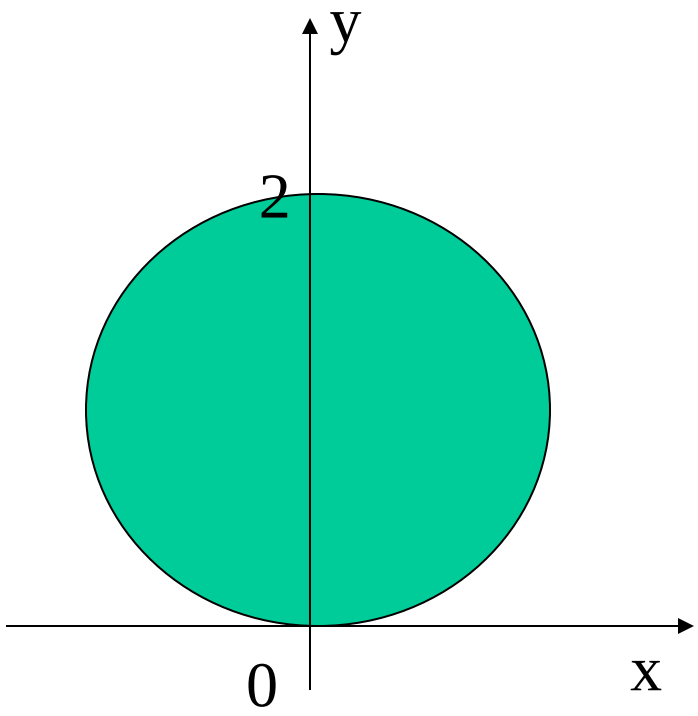
Пример 1.

- Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy,$$

- где **D** область, ограниченная окружностью

$$x^2 + y^2 = 2y.$$



Перейдём к полярным координатам

$$\mathbf{x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi}$$

- Уравнение окружности преобразуется к виду

$$\mathbf{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\sin\varphi}$$

$$\mathbf{r^2 = 2r\sin\varphi}$$

$$\mathbf{r = 2\sin\varphi.}$$

- Поэтому область интегрирования задаётся неравенствами

$$0 \le \mathbf{r} \le 2\mathbf{\sin\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

- Получаем

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}}\,\mathbf{dxdy} = \iint\limits_{\mathbf{D}_{\mathbf{r}\varphi}} \mathbf{r\,r\,drd}\varphi = \int\limits_0^{\pi} \mathbf{d}\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \mathbf{r^2dr.}$$

Пример 2.

- Вычислить площадь области, ограниченной линиями

$$\mathbf{r = \sin\varphi,\ r = 1 + \cos\varphi,}$$

вне окружности.

- По свойству двойных интегралов

$$\mathbf{S(D) = \iint\limits_{D} dxdy.}$$

- После перехода к полярным координатам получаем

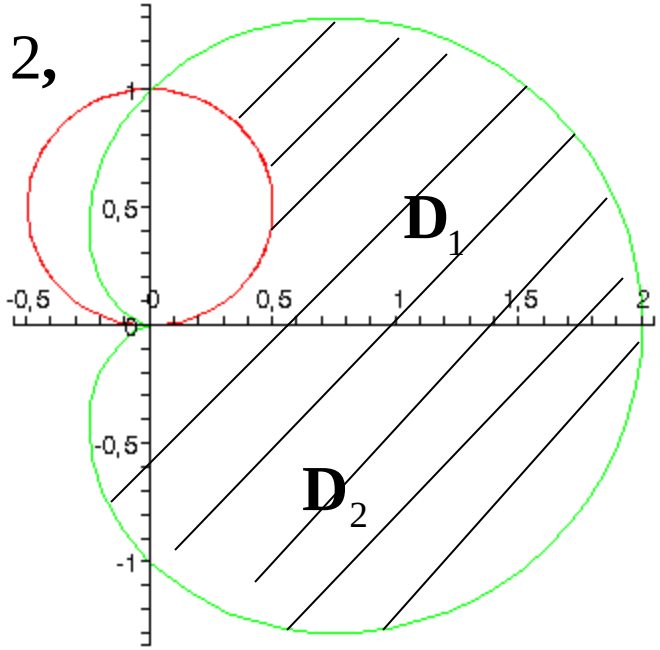
$$\mathbf{S(D) = \iint\limits_{D} r\,dr\,d\varphi.}$$

Переход к повторному интегралу

- Разобьём область на две части:

$$\mathbf{D}_1 : \sin\varphi \le \mathbf{r} \le 1+\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2,$$

$$\mathbf{D}_2 : 0 \le \mathbf{r} \le 1+\cos\varphi, \quad -\pi \le \varphi \le 0.$$



- В соответствии с разбиением имеем

$$\mathbf{S(D)} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{d}\varphi \int_{\sin\varphi}^{1+\cos\varphi} \mathbf{r\,dr} + \int_{-\pi}^{0} \mathbf{d}\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} \mathbf{r\,dr}$$

Криволинейные координаты

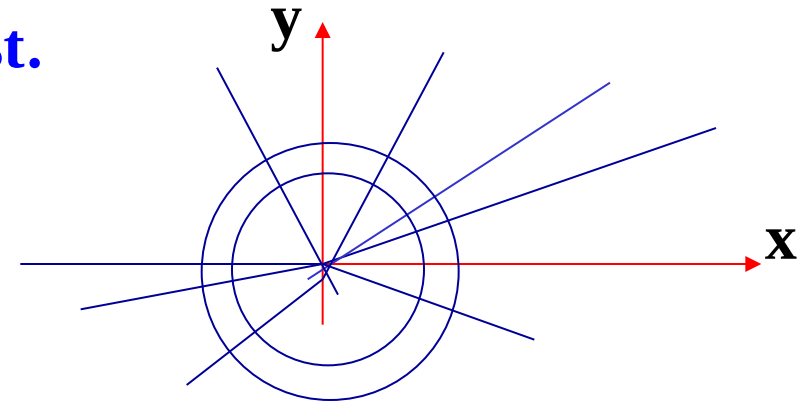
- Функции $\mathbf{x = x(u, v), y = y(u, v)}$ с якобианом отличным от нуля можно разрешить относительно $\mathbf{u, v}$. Линии

$$\mathbf{u(x, y) = const, v(x, y) = const}$$

называются **криволинейной координатной сеткой** на плоскости $\mathbf{xOy}$.

Пример. При переходе к полярным координатам криволинейной координатной сеткой будут линии

$\mathbf{r = const, \varphi = const.}$

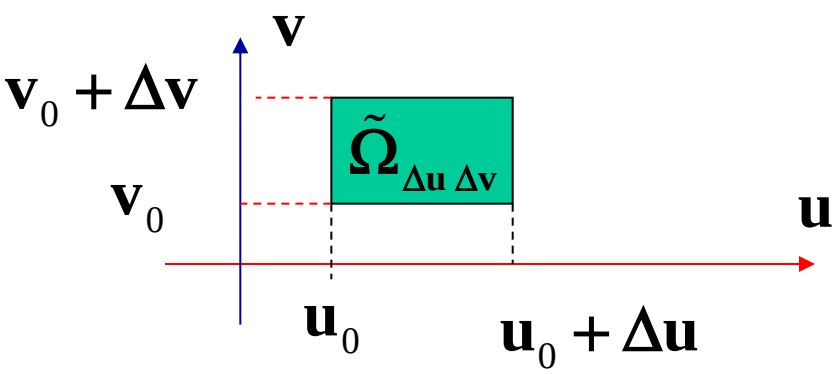


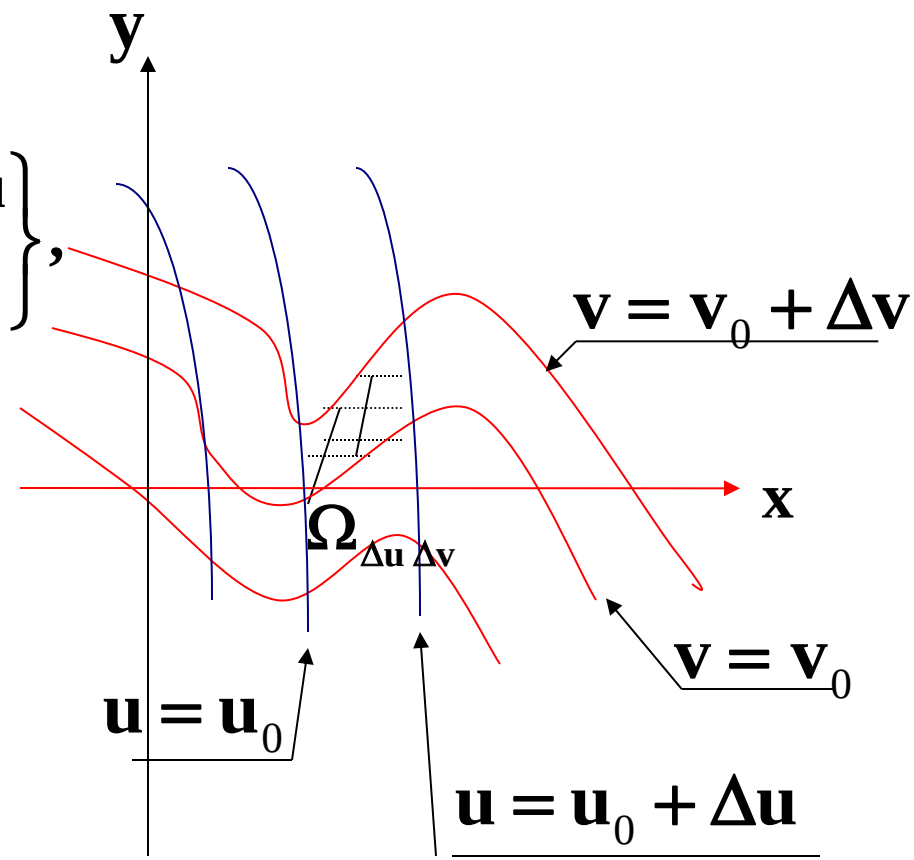
Геометрическое истолкование якобиана

- Вычислим на плоскости xOy площадь ячейки

$$\Omega_{\Delta u\,\Delta v} = \left\{ \begin{array}{l} (u,v): u_0 \le u \le u_0 + \Delta u \\ v_0 \le v \le v_0 + \Delta v \end{array} \right\},$$

образованной криволинейными координатными линиями.





Покажем, что модуль якобиан является коэффициентом искажения меры ячейки при переходе к криволинейным координатам

Определим меру $\Omega_{\Delta u\,\Delta v}$ в криволинейных координатах u.v -

$$S_{uv}(\Omega_{\Delta u\,\Delta v}) = S(\tilde{\Omega}_{\Delta u\,\Delta v}) = \Delta u\,\Delta v$$

- Мера $\Omega_{\Delta u\,\Delta v}$ в декартовых координатах x,y равна

$$S_{xy}(\Omega_{\Delta u\,\Delta v}) = \iint\limits_{\Omega_{\Delta u\,\Delta v}} dxdy = \iint\limits_{\tilde{\Omega}_{\Delta u\,\Delta v}} |I(u,v)|dudv.$$

- По теореме о среднем $\iint\limits_{\tilde{\Omega}_{\Delta u\,\Delta v}} |I(u,v)|dudv = |I(M)|S_{uv}(\tilde{\Omega}_{\Delta u\,\Delta v}).$

- Т.е. $\boxed{S_{xy}(\Omega_{\Delta u\,\Delta v}) = |I(M)|\Delta u\,\Delta v \Rightarrow |I(M)| = \dfrac{S_{xy}(\Omega_{\Delta u\,\Delta v})}{\Delta u\,\Delta v}}$

Пример. Найти площадь, ограниченную линиями

$$xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 3x.$$

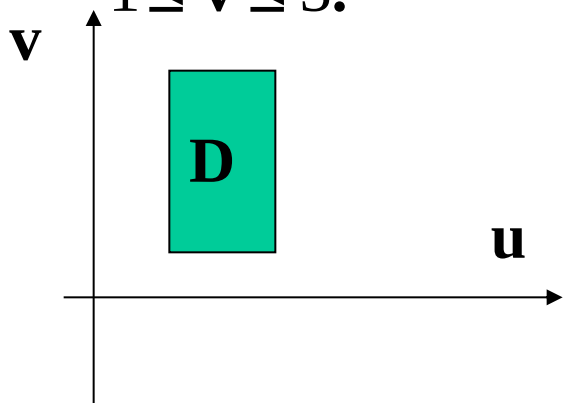
- Введём новые координаты

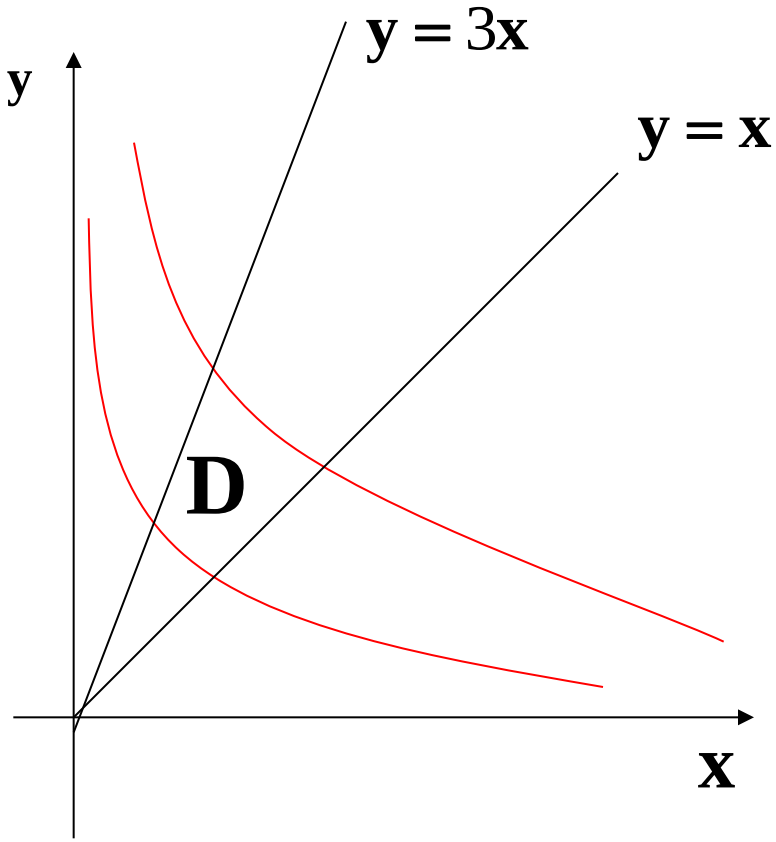
$$xy = u,\ \frac{y}{x} = v.$$

- В новых координатах область имеет вид

$$1 \le u \le 2,$$

$$1 \le v \le 3.$$

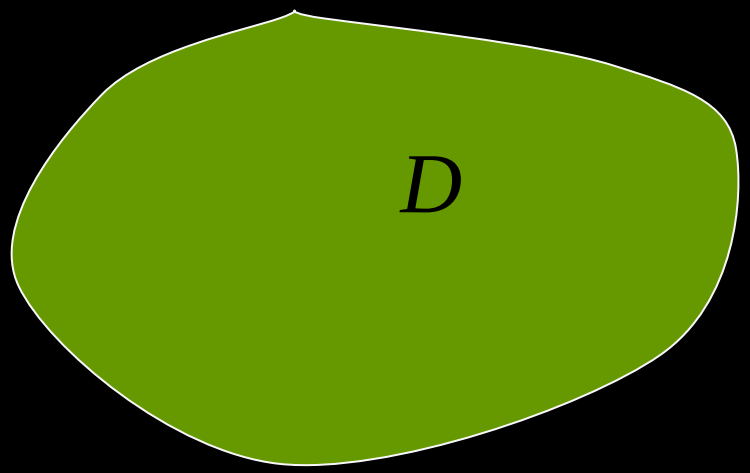




Геометрические приложения двойного интеграла

площадь фигуры

$$S(D)=\iint\limits_{D} dxdy$$



Пример вычисления площади фигуры

- ***Пример 1.*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

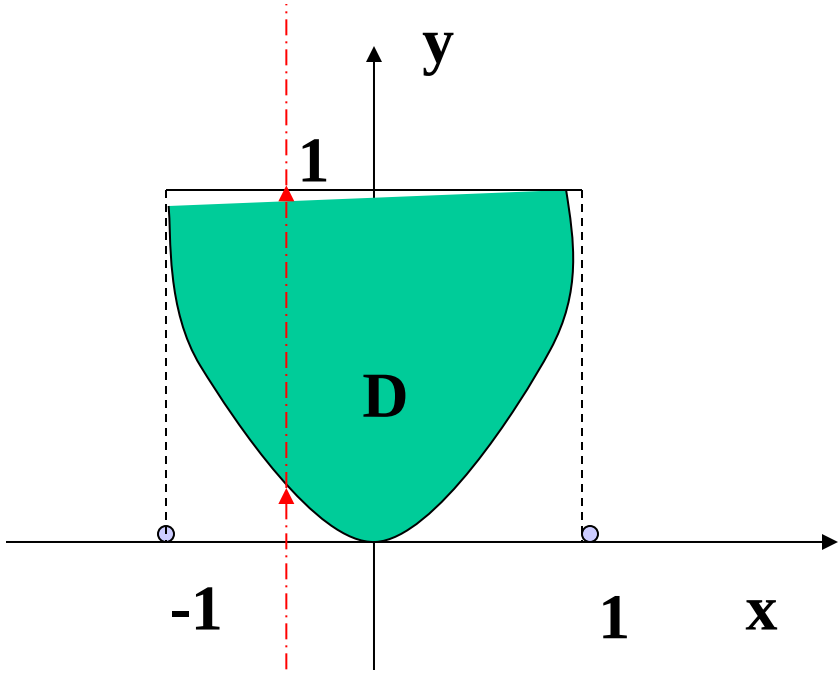
$$y = x^2,\ y = 1.$$

- Множество D можно задать неравенствами

$$x^2 \le y \le 1,\ -1 \le x \le 1.$$

- Поэтому

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} dy \right) dx$$



Вычисление объёмов цилиндрических тел

$$\Omega=\left\{(x,y,z):\ 0\le z\le f(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}\right\}$$

$$V(\Omega)=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy$$

Пример 2

- Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями
  $\mathbf{y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x},}$
  $\mathbf{x + z = 4, z = 0.}$
- Построим цилиндрические поверхности,
  $\mathbf{y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}}$

которые ограничивают тело с боков (рис.1)

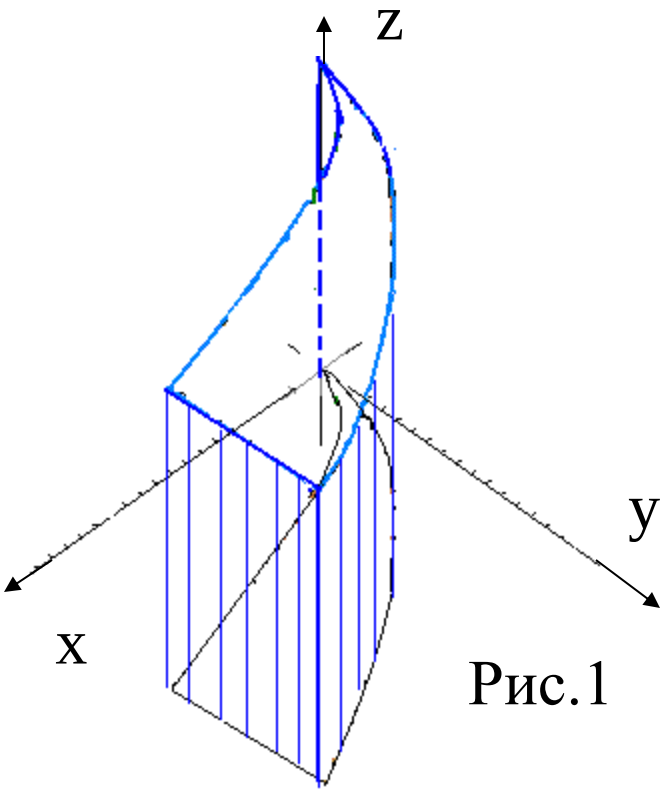


Рис.1

- Далее построим плоскость

$$\mathbf{x} + \mathbf{z} = 4,$$

которая ограничивает тело сверху (рис2) .

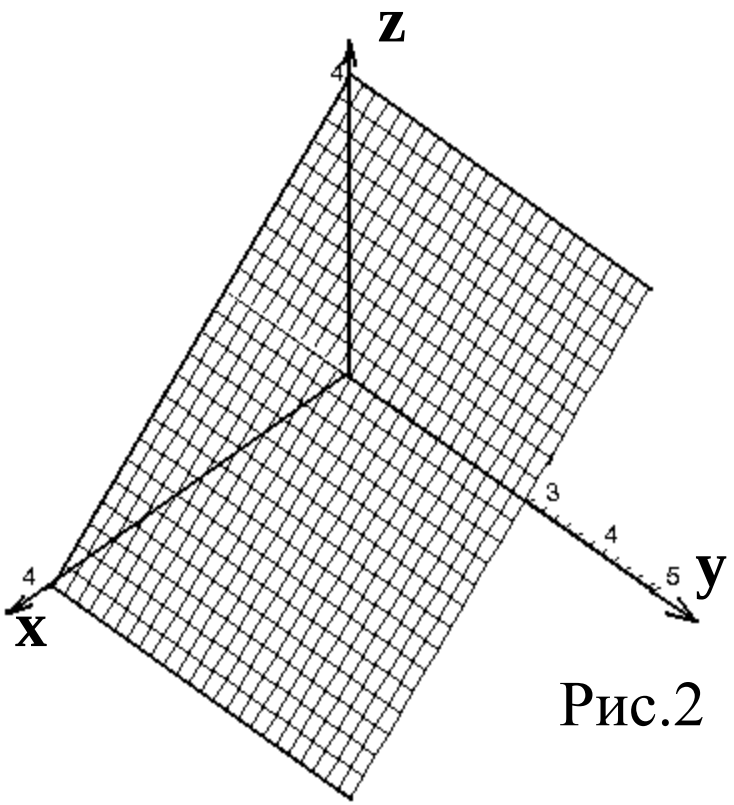


Рис.2

- В результате построений получаем цилиндроид (рис.3) , объём которого можно вычислить двойным интегралом

$$\mathbf{V} = \iint\limits_{\mathbf{D}} (4 - \mathbf{x})\mathbf{dxdy}$$

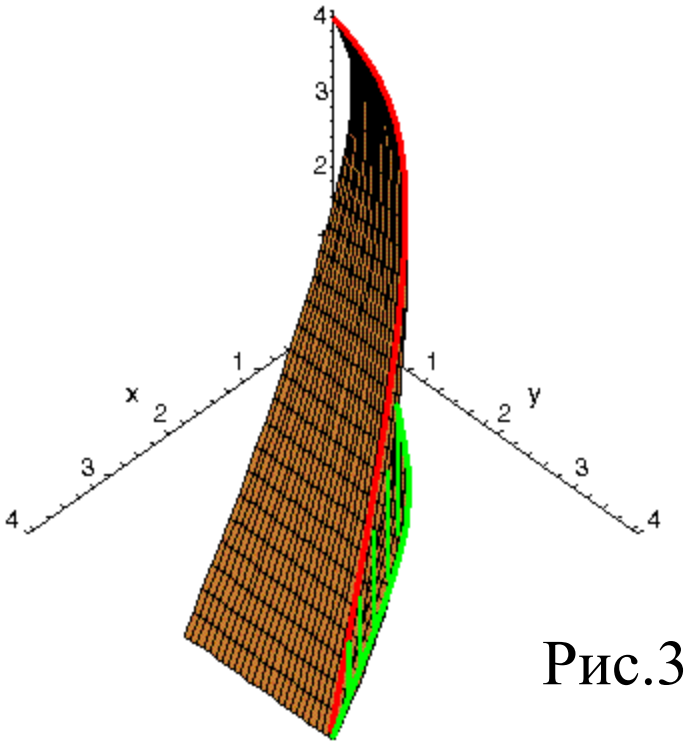


Рис.3

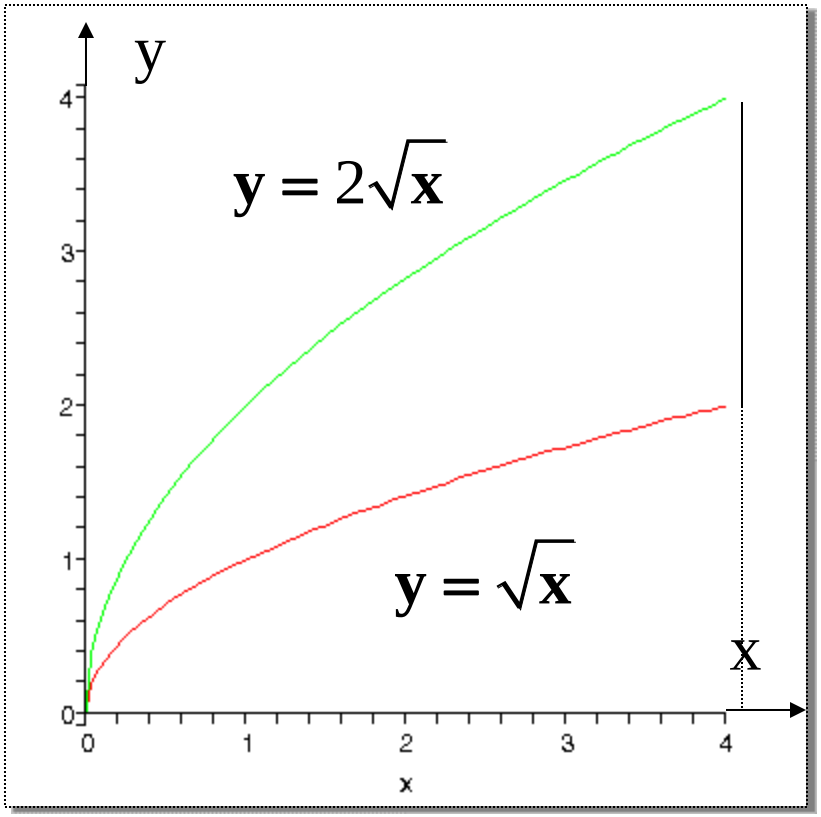
Переход к повторному интегралу

- Область интегрирования **D** задаётся неравенствами

$$\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x},$$
$$0 \le x \le 4.$$

Поэтому кратный интеграл имеет вид

$$V = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4 - x)\,dy \right) dx$$



Вычисления повторных интегралов

- Вычисляем внутренний интеграл, а затем внешний.

$$\mathbf{V} = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{\mathbf{x}}}^{2\sqrt{\mathbf{x}}} (4-\mathbf{x})\mathbf{dy} \right)\mathbf{dx} = \int_0^4 (4-\mathbf{x})(2\sqrt{\mathbf{x}} - \sqrt{\mathbf{x}})\mathbf{dx} =$$

$$= \int_0^4 (4-\mathbf{x})\sqrt{\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \int_0^4 (4\mathbf{x}^{\frac{1}{2}} - \mathbf{x}^{\frac{3}{2}})\mathbf{dx} = \left(4\frac{2}{3}\mathbf{x}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\mathbf{x}^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{128}{15}$$