Дифференциальные уравнения высших порядков

Лекции 2- 3

- Дифференциальным уравнением порядка **n** называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

- в котором ***обязательно наличие n-ой производной.***
- Будем рассматривать также уравнения в **нормальной** форме, т.е. ***разрешенные относительно старшей производной***

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Механическое истолкование.

Предположим, что движение материальной точки на прямой описывается функцией x=x(t). Если движение точки происходит под действием силы $F(t,x(t),x'(t))$, тогда согласно 2-ому закону Ньютона

$$mx'' = F(t,x,x').$$

Задача Коши

- Задачей Коши для уравнения порядка **n** называется задача нахождения решения y=y(x), удовлетворяющего заданным начальным условиям вида

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1},$$

- где $x_0,\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}$ -заданные числа:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

Теорема существования и единственности.

- Пусть в уравнении (2) функция $f(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$

  непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}$

- в области D переменных $x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Тогда для любых начальных данных

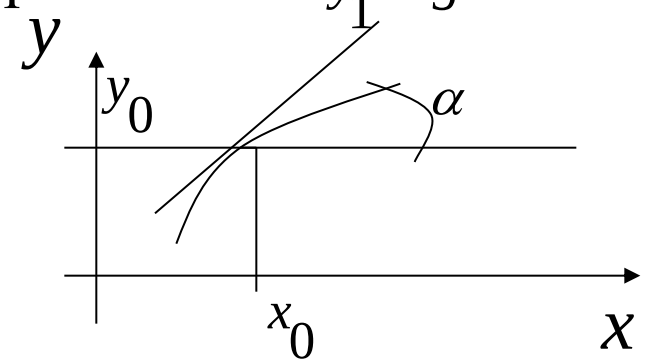
$$x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$$

  из области D задача Коши (3) имеет единственное решение.

- Для ***уравнения второго порядка*** геометрически единственность означает, что через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ области $G = n\,p_{XOY} D$

проходит единственная интегральная кривая, имеющая в точке $M_0(x_0, y_0)$

заданное направление $y_1 = tg\alpha$.



- Решение задачи Коши будем называть ***частным решением***.

- ***Общим решением*** называется решение вида

$$y = \phi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

из которого любое частное решение получается при некоторых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

- Если дифференциальное уравнение (1) порядка n можно свести к уравнению порядка более низкого, то говорят , что уравнение допускает понижение порядка.
- Промежуточное уравнение вида

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1.$$

Называется ***первым интегралом*** уравнения (1), если

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Уравнения, не содержащие ***явно неизвестную функцию***

- Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0,$

не содержащие явно неизвестную функцию $y = y(x),$

заменой $y' = z(x)$ приводятся к уравнению $F(x, z, z') = 0$ первого порядка.

Уравнения, не содержащие ***явно независимую переменную***

- Уравнения $F(y, y', y'')=0$, не содержащие явно переменной x.

  Замена $y' = p(y)$, где $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p$

  понижает порядок уравнения

$$F(y, p, p\frac{dp}{dy})=0$$

Уравнения с однородной функцией

Однородные уравнения 2 порядка

- Уравнение $F(x,y,y',y'')=0$ называется однородным степени m, если функция $F(x,y,y_1,y_2)$ является однородной функцией степени **m** по ***переменным*** **y, y**$_1$**, y**$_2$, т.е. выполняется равенство

$$F(x,ty,ty_1,ty_2)=t^m F(x,y,y_1,y_2)$$

для любого t>0 .

Замена в однородном уравнении

- Замена

$$y' = yz,$$
$$y'' = y'z + yz' =$$
$$= yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$$

- Приводит к уравнению

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z')) = 0$$
$$y^m F(x, 1, z, (z^2 + z')) = 0$$
$$F(x, 1, z, (z^2 + z')) = 0$$

- первого порядка.

Примеры

- Пример 1.

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$$
$$y' = z(x), y'' = z'$$
$$z' = \sqrt{1 + z^2}$$

- Разделим переменные

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx$$

$$x + C_1 = \ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right|$$

- Далее, избавляясь от логарифма, имеем

$$z+\sqrt{1+z^2}=e^{x+C_1}$$
$$\sqrt{1+z^2}=e^{x+C_1}-z$$
$$1+z^2=e^{2(x+C_1)}-2ze^{x+C_1}+z^2$$

- После упрощения получаем

$$1 = e^{2(x+C_1)} - 2ze^{x+C_1}$$

$$z = \frac{1}{2}(e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}) = sh(x+C_1)$$

$$y' = sh(x+C_1) - \textit{Первый интеграл уравнения}$$

$$y = ch(x+C_1) + C_2 - \textit{Общее решение}$$

Пример 2

- Найти общее решение уравнения

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

- Пример 2. Решение.

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$
$$y' = p(y), y'' = p'p$$
$$p^2 + 2yp'p = 0$$
$$p' = -\frac{p^2}{2yp}$$

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{2y}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln C_1$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{|y|}}$$

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{|y|}} - первый\, интеграл$$

$$y > 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y}\,dy = C_1 dx$$

$$y^{3/2} = C_1 x + C_2$$

$$y < 0 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{-y}}$$

$$\sqrt{-y}\,dy = C_1 dx$$

$$-\int \sqrt{-y}\,d(-y) = \int C_1 dx$$

$$-(-y)^{3/2} = C_1 x + C_2$$

Пример 3

- Решить уравнение

$$xyy'' - xy'^2 = yy'$$

Линейные дифференциальные уравнения порядка n

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Предварительные сведения

- ***Линейным дифференциальным уравнением (л.д.у.)порядка n*** называется дифференциальное уравнение порядка n, имеющее следующий вид:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \quad (1)$$

где функции $a_1(x),\ldots,a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ определены на некотором интервале (a,b).

Предварительные сведения

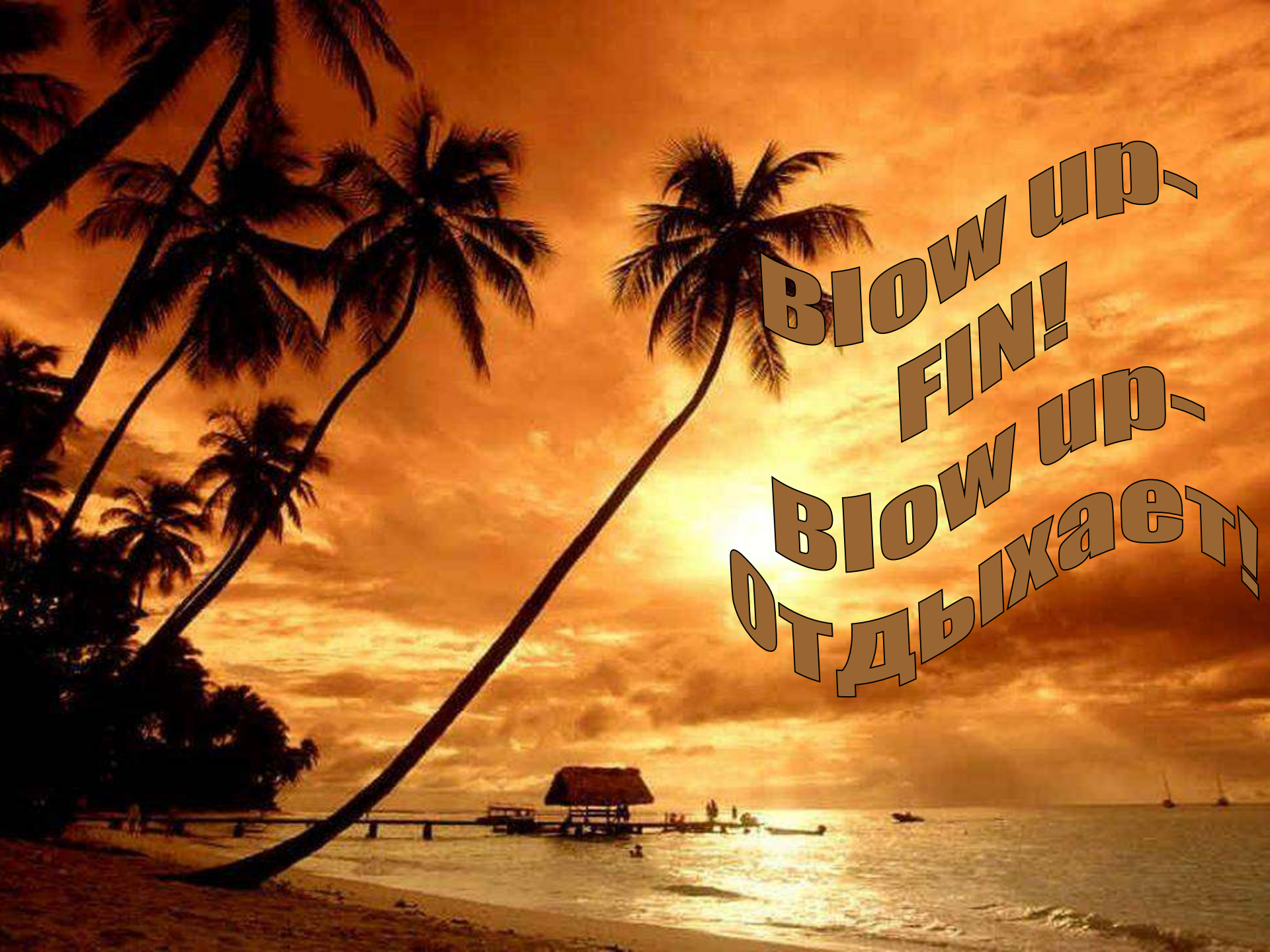
- Если правая часть уравнения (1) $(f(x)\equiv 0, x\in(a,b))$, ***тождественно равна нулю*** на рассматриваемом промежутке (a,b), то уравнение называется линейным ***однородным*** д.у., в противном случае - линейным ***неоднородным*** д.у.порядка n.

Теорема существования и единственности ***линейного*** дифференциального уравнения порядка n.

- Если коэффициенты $a_1(x),\ldots,a_{n-1}(x), a_n(x)$ и правая часть $f(x)$ линейного диф.уравнения (1) ***непрерывны*** на **интервале** (a, b), то для **любой** точки $x_0 \in (a, b)$ и **любых чисел** $y_0,\ldots,y_{n-1}$ существует $y = y(x)$, единственное решение задачи Коши, **определённое также на интервале** (a, b), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

- **Вывод: Эффект «Blow up»** для **линейных** дифференциальных уравнений не имеет места !


Blow up-
FIN!
Blow up-
Отдыхает!

Вопрос

- Как геометрически истолковать теорему существования и единственности для линейного уравнения 2-го порядка?

- Левая часть уравнения (1) обозначается специальным образом

$$L[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y \quad (2)$$

и называется линейным дифференциальным оператором.

- Оператор $L[y]$ обладает следующими свойствами

$$L[cy]=cL[y],$$

$$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$$

- Оба свойства непосредственно вытекают из соответствующих свойств операции дифференцирования

Суперпозиция решений линейных ***однородных*** дифференциальных уравнений

- Линейное однородное д.у. порядка n коротко можно записать через введённый оператор $L[y]$:

$$L[y]=0. \qquad (3)$$

- **Теорема 1 (О суперпозиции решений) .** Если функции $y_1(x),\ldots, y_m(x)$ являются решениями линейного однородного д.у. (3), то их линейная комбинация

$$y(x)=c_1 y_1(x)+\ldots+c_m y_m(x)$$

также является решением линейного однородного д.у.(3).

- Доказательство. Из свойств линейного оператора следует

$$L\left[y(x)\right]=c_1L\left[y_1(x)\right]+\ldots+c_mL\left[y_m(x)\right]\equiv 0.$$

Линейная зависимость и линейная независимость функций.

- **Определение.** Функции $y_1(x),\ldots, y_m(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на интервале (a,b), если существуют такие **числа** $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x)+\ldots+\alpha_m y_m(x)=0,\ x\in(a,b).$$

При этом хотя бы одно из чисел $\alpha_1\ldots,\alpha_m$ **отлично от нуля.**

- В противном случае функции называются ***линейно независимыми.***

- Линейная зависимость означает, что хотя бы одна из функций $y_1(x),\ldots, y_m(x)$

является линейной комбинацией остальных функций. Например, если в определении линейной зависимости $\alpha_1 \neq 0$, то справедливо равенство

$$y_1(x)=c_2 y_2(x)+\ldots+c_m\, y_m(x).$$

Определитель Вронского

- **Определение.** Пусть функции $y_1(x),\ldots, y_m(x)$ имеют производные до порядка $m-1$, тогда определитель вида

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_m(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

- называется определителем ***Вронского (***или ***вронскианом).***

Признаки линейной зависимости функций

- **Теорема 2.** Если функции

  $$y_1(x),\ldots, y_m(x), \quad x\in(a,b) \quad ,$$

- имеющие непрерывные производные до порядка $m-1$, ***линейно зависимы***, то определитель Вронского ***равен нулю*** для всех $x\in(a,b)$.

•

Доказательство.

- По определению линейной зависимости существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0, \; x \in (a,b).$$

- При этом хотя бы одно из чисел $\alpha_1 \ldots, \alpha_m$ отлично от нуля.

- Дифференцируя это равенство $m-1$ раз, приходим к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x)+\ldots+\alpha_m\ y_m(x)=0, & x\in(a,b) \\ \alpha_1 y_1'(x)+\ldots+\alpha_m\ y_m'(x)=0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y^{m-1}{}_1(x)+\ldots+\alpha_m\ y^{m-1}{}_m(x)=0 \end{cases}$$

имеющей нетривиалные решения $\alpha_1\ldots,\alpha_m$. Следовательно, определитель системы $W(x)=0$ равен нулю для всех $x\in(a,b)$.

Достаточное условие линейной независимости

- **Следствие.** Если определитель Вронского ***отличен от нуля хотя бы в одной точке*** $x_0 \in (a,b)$, то функции

$$y_1(x),\ldots, y_m(x), \quad x \in (a,b)$$

линейно независимы.

- ***Пример.*** Установить, что система функций

$$\{\sin \beta x, \cos \beta x\}$$

- линейно независима.

Комментарий

- Таким образом, не обращение в нуль определителя Вронского ***хотя бы в одной точке*** рассматриваемого интервала является ***достаточным условием*** для линейной независимости функций. В случае , когда функции являются ***решениями линейного однородного д.у***. ***необходимым*** является более сильное условие. А именно, справедлива следующая теорема:

Признак линейной независимости решений линейных однородных д.у.

- **Теорема 3.** Если функции $y_1(x),\ldots,y_m(x)$, $x\in(a,b)$ ***линейно независимы*** и являются **решениями линейного однородного д.у.** (3) с ***непрерывными коэффициентами*** на (a,b), то определитель Вронского ***отличен от нуля во всех точках рассматриваемого промежутка*** (a,b) **.**

Комментарии к теореме 3

- **Пример**. Рассмотрим функции вида

$$y_1(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x\in(0;1]\\ 0, & x\in(1;2)\end{cases},$$

$$y_2(x)=\begin{cases}0, & x\in(0;1)\\ (x-1)^3, & x\in[1;2)\end{cases}.$$

- Функции линейно независимы для $x\in(0;2)$.

Определитель Вронского $W(x)=0$ равен нулю для всех $x\in(0;2)$

Продолжение примера

- Обе функции являются решением дифференциального уравнения

$$y'' - \frac{6}{(x-1)^2} y = 0$$

- Но по теореме 3 $W(x) \neq 0,\ x \in (0;2)$

- ***Вопрос.*** Почему получено противоречие теореме 3?

- **Определение.** Система n линейно независимых решений

$$\{y_1(x),\ldots, y_n(x)\}, \quad x\in(a,b)$$

линейного однородного д.у. порядка n (***число решений совпадает с порядком д.у.***) называется **фундаментальной** системой решений.

Пример. Система функций e^x, e^{-x} является фундаментальной системой решений уравнения

$$y'' - y = 0.$$

Структура общего решения линейного однородного д.у.

- **Теорема 4 .** Если функции

$$\left\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\right\},\quad x\in(a,b)$$

образуют **фундаментальную систему решений** линейного однородного д.у. порядка n с **непрерывными на** (a,b) коэффициентами, то общее решение уравнения в области

$$x\in(a,b),\ y\in(-\infty,\infty),\ldots,\ y^{(n-1)}\in(-\infty,\infty).$$

имеет вид

$$y=C_1y_1(x)+\quad\ldots\quad C_ny_n(x),\quad x\in(a,b)$$