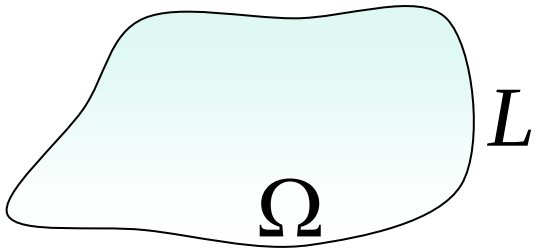
Кратные интегралы

Определение меры плоской фигуры

- ***Измеримые множества*** на плоскости
- Пусть Ω произвольное ***ограниченное*** множество точек на плоскости, ограниченное ***кусочно-гладкой*** кривой L .



- Каждому такому множеству Ω поставим в соответствие ***неотрицательное*** число $\mu(\Omega)$

- Такое число будем называть ***мерой множества*** Ω , если выполняются следующие свойства:
- 1) Если Ω -прямоугольник со сторонами a, b , то $\mu(\Omega) = a \cdot b$
- 2) Если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\mu(\Omega_1) < \mu(\Omega_2)$
- 3) Если $\Omega = D_1 \bigcup D_2$ и D_1, D_2 пересекаются по кусочно-гладким кривым, то $\mu(\Omega) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$

- 4) мера ***кусочно-гладкой кривой, точки*** равна нулю.
- Введённая мера $\mu(\Omega)$ для ***множества*** Ω на плоскости называется также ***площадью*** $S(\Omega)$ **,** а само множество Ω называется ***измеримым множеством***

Конструкция кратного интеграла

Двойные интегралы

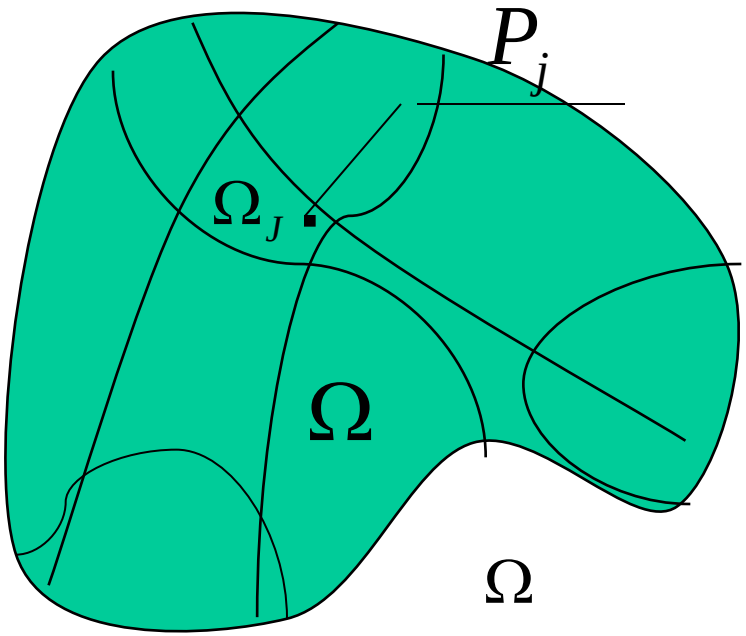
Определение интегральных сумм

- Разобьём Ω на n ***измеримых частей:*** $$\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$$
- ***Рассмотрим функцию***

$$w = f(P),\ P \in \Omega$$

- ***Определим сумму***

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(P_j) S(\Omega_j)$$



Определение двойного интеграла

- Множества Ω_j называются ***ячейками разбиения***.
- ***Наибольшее*** расстояние между точками множества Ω_j называется **диаметром** ячейки и обозначается $\mathbf{d(\Omega_j)}$
- ***Предел интегральных сумм*** при неограниченном измельчении ячеек разбиения $\mathbf{d_n = \max\limits_{1 \le j \le n}(d(\Omega_j)) \to 0}$

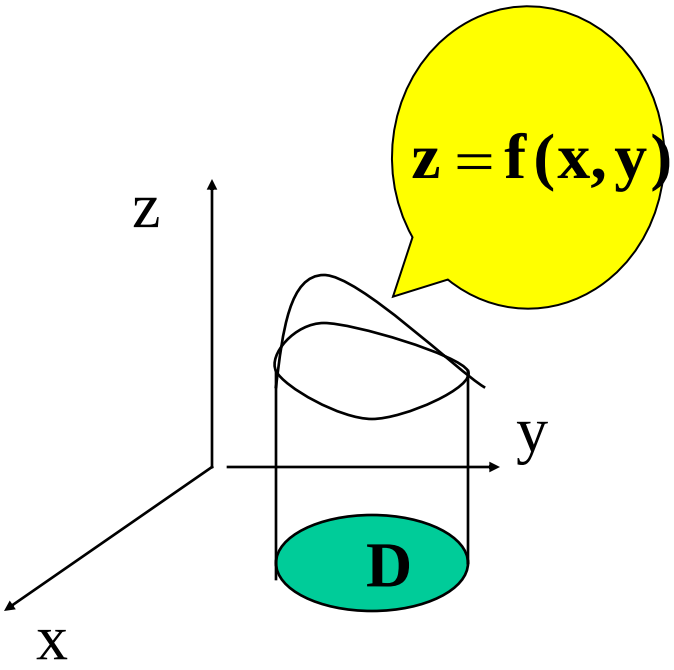
называется **двойным интегралом от** $\mathbf{f}$ **по** $\mathbf{\Omega}$, т.е.

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{f(P)dS} = \lim_{\mathbf{d_n \to 0}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f(P_j)S(\Omega_j)}$$

Геометрическое истолкование двойного интеграла

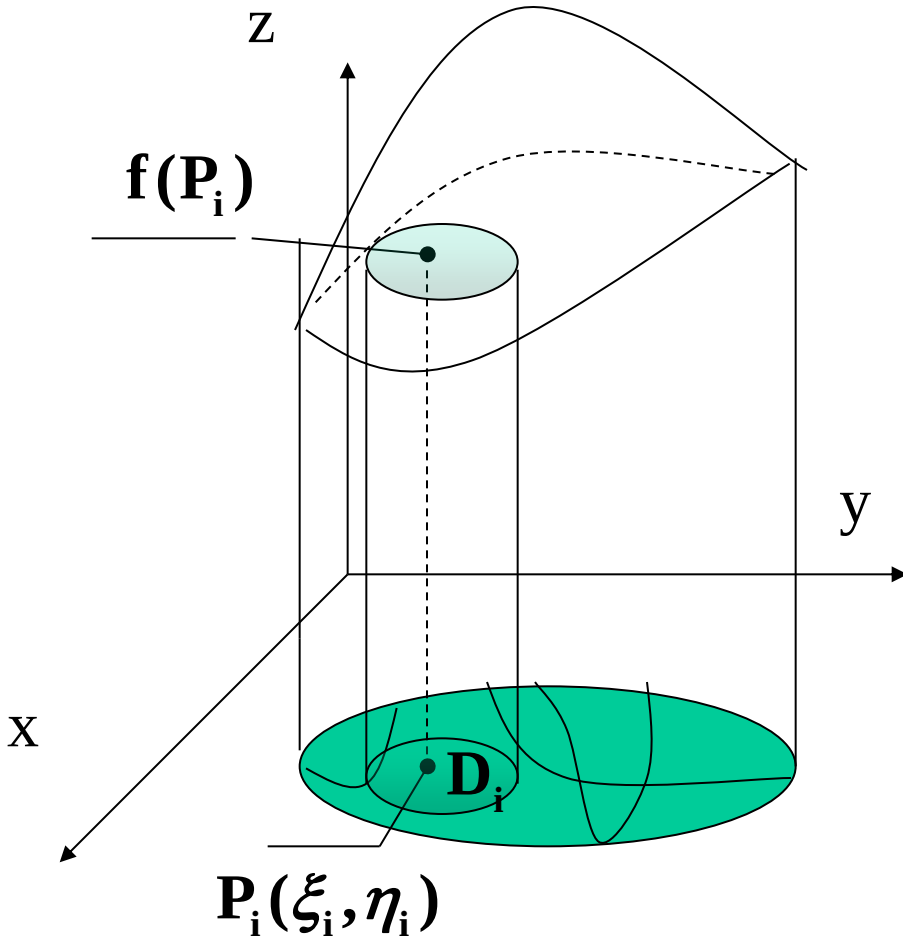
- Вычислим объём цилиндрического тела.
- Пусть цилиндрическое тело ограничено сверху поверхностью $\mathbf{z = f(x, y) \geq 0\ (x, y) \in D}$

снизу координатной **xOy** плоскостью. Проекция тела на плоскость обозначается через **D** .



Построение ступенчатого тела

- Разобьём область $\mathbf{D}$
- кусочно- гладкими кривыми на $\mathbf{n}$ ячеек $\mathbf{D_i}$ и построим цилиндры, в основании которых находятся ячейки разбиения и высотой равной
- $\mathbf{f(P_i)}$, где $\mathbf{P_i(\xi_i, \eta_i)}$ - произвольная точка в выбранной ячейке. Объём всего тела приближённо равен сумме объёмов построенных цилиндров.



- Объём исходного тела определим как **предел объёма ступенчатого тела** при неограниченном измельчении ячеек разбиения, которые являются основаниями построенных цилиндров

$$\mathbf{V = \lim_{d_n \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(P_j) S(D_j)}$$

- С другой стороны, этот предел равен двойному интегралу, т.е.

$$\mathbf{V = \iint_D f(P)\,dS}$$

- ***Вывод. Двойной интеграл от неотрицательной функции равен объёму цилиндрического тела.***

Вычисление двойного интеграла

Геометрические приложения

Сведение двойного интеграла к повторному интегралу

- ***Теорема***. Пусть функция

$$f(x,y),\ (x,y)\in D$$

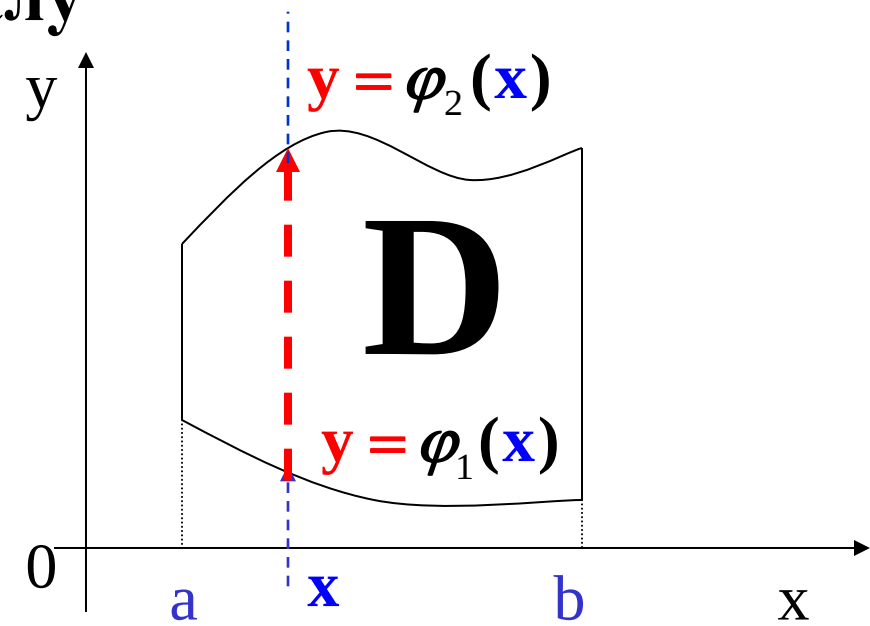
непрерывна на множестве **D**,

заданном неравенствами

$$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ \ a\le x\le b,$$

где $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ непрерывные функции, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$



D наз. *областью элементарной относительно оси Oy*

Геометрическое обоснование формулы

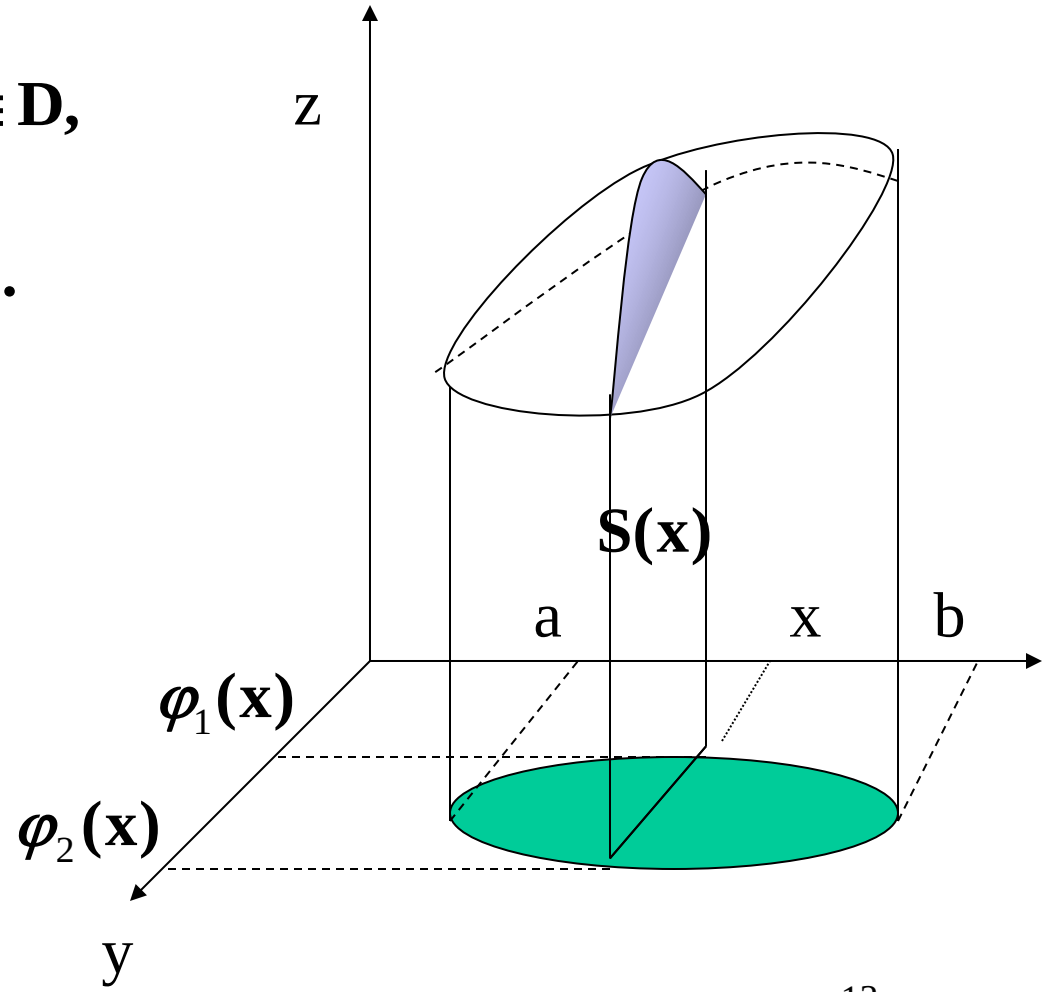
- Если $\mathbf{f(P) \geq 0, P(x,y) \in D,}$

  то (почему?)

$$\mathbf{V = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.}$$

- Объём тела можно также вычислить через площадь поперечного сечения $\mathbf{S(x)}$ по формуле

$$\mathbf{V = \int\limits_{a}^{b} S(x)dx.}$$



- Вычисляя **S(x)** как площадь криволинейной трапеции, получаем

$$\mathbf{V} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left(\int_{\varphi_1(\mathbf{x})}^{\varphi_2(\mathbf{x})} \mathbf{f(x,y)dy} \right) \mathbf{dx} =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} \mathbf{f(x,y)dxdy.}$$

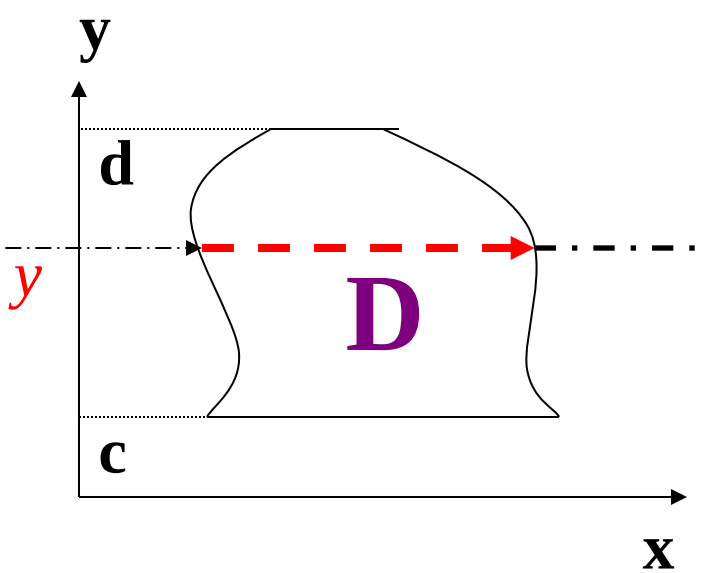
Изменение порядка интегрирования

- Если область интегрирования можно задать неравенствами вида

$$D: \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d,$$

то формула перехода к повторному интегралу принимает вид

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$



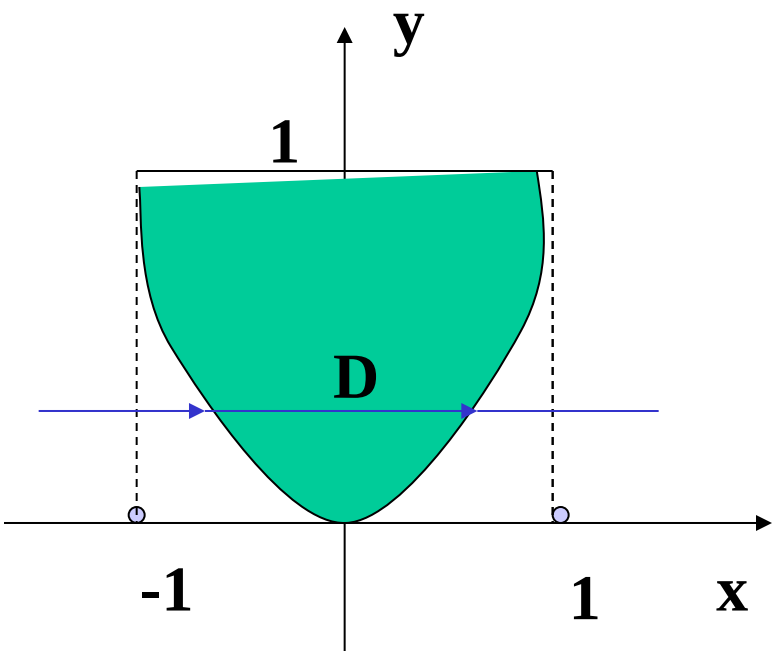
D – *область элементарная относительно оси Ox.*

Примеры изменения порядка интегрирования

- **Пример 1.** Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^{1} \mathbf{dx} \int_{\mathbf{x}^2}^{1} \mathbf{f(x,y)dy}.$$

- **Решение примера 1**



Область интегрирования

$$\mathbf{D}: x^2 \le y \le 1, -1 \le x \le 1.$$

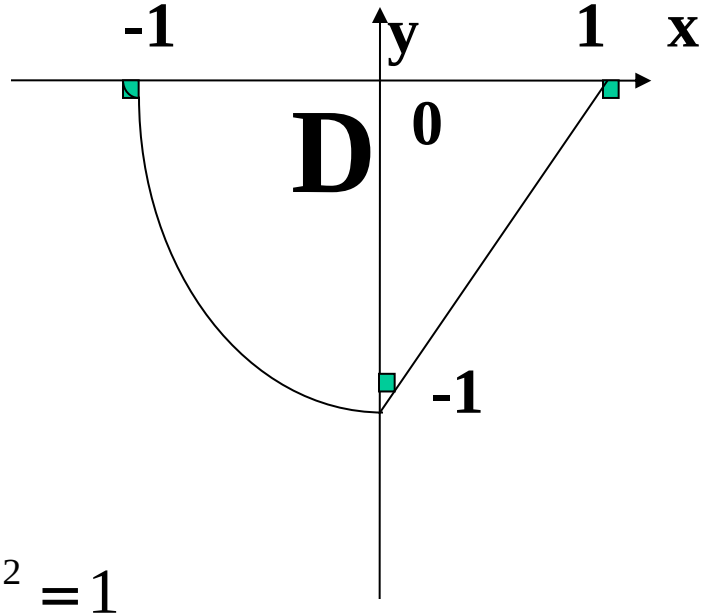
- Границу снизу $y = x^2$ запишем в виде
  . $x = \pm\sqrt{y}$
- Область интегрирования можно задать в виде
  $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1.$
- Поэтому $$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

Пример 2.

- Изменить порядок интегрирования

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^{0} \mathbf{dy} \int_{-\sqrt{1-\mathbf{y}^2}}^{1+\mathbf{y}} \mathbf{f(x,y)dx}.$$

Решение примера 2



- Область интегрирования задаётся неравенствами

$$-\sqrt{1-\mathbf{y}^2} \le \mathbf{x} \le 1+\mathbf{y}, -1 \le \mathbf{y} \le 0.$$

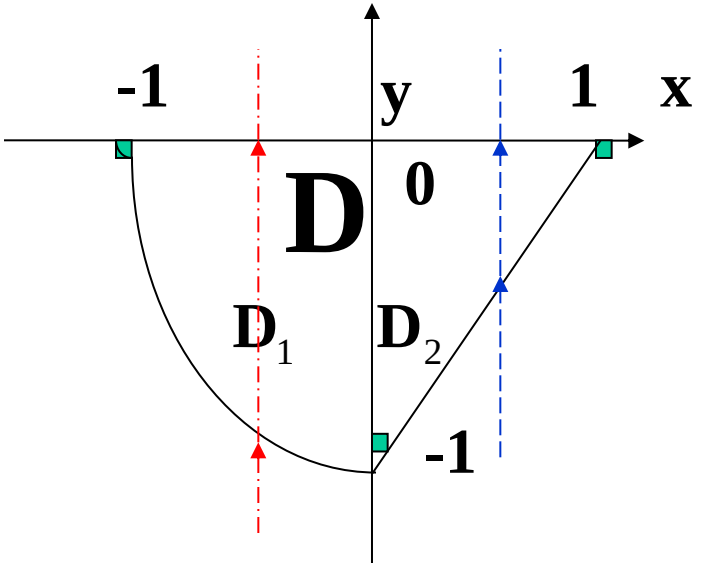
- Границы: слева – четверть окружности $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=1$
- справа - отрезок прямой $\mathbf{x}-\mathbf{y}=1$

Продолжение решение примера 2

- **Нижняя** граница области $\mathbf{D}$ задаётся **двумя** уравнениями

$$\mathbf{y} = -\sqrt{1-\mathbf{x}^2},\ -1 \le \mathbf{x} \le 0,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - 1,\ 0 \le \mathbf{x} \le 1.$$



- Верхняя граница: $\mathbf{y} = 0$
- Область $\mathbf{D}$ разбивается на **две части** . Область $\mathbf{D}_1$ задаётся неравенствами

$$-\sqrt{1-\mathbf{x}^2} \le \mathbf{y} \le 0,\ -1 \le \mathbf{x} \le 0,$$

- а область $\mathbf{D}_2$: $\mathbf{x} - 1 \le \mathbf{y} \le 0,\ 0 \le \mathbf{x} \le 1.$

- Поэтому двойной интеграл представляется в виде суммы повторных

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^{0} \mathbf{dx} \int_{-\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}^{0} \mathbf{f(x,y)dy} + \int_{0}^{1} \mathbf{dx} \int_{\mathbf{x}-1}^{0} \mathbf{f(x,y)dy}$$

Свойства двойного интеграла

- **Свойство нормировки.**

$$\iint_{\Omega} dS = S(\Omega)$$

- Доказательство вытекает из свойства 3) меры :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot S(\Omega_j) = S(\Omega),$$

где S_n - интегральная сумма функции $f \equiv 1$

Свойства двойного интеграла

- **Свойство линейности**

$$\iint_D (Af(P) + Bh(P))dS = A\iint_D f(P)dS + B\iint_D h(P)dS$$

где A, B - константы.

- **Свойство аддитивности.**
- Если Ω разрезана на измеримые части Ω_1, Ω_2, то

$$\iint_\Omega f(P)dS = \iint_{\Omega_1} f(P)dS + \iint_{\Omega_2} f(P)dS$$

Свойства двойного интеграла

- **Свойство позитивности.**

Если $\mathbf{f(P) \geq 0, P \in \Omega}$ **, то** $\iint\limits_{\Omega} \mathbf{f(P)dS} \geq 0.$

- Доказательство следует из очевидной неотрицательности интегральныой суммы.

- **Свойство монотонности.**

Если $\mathbf{f(P) \geq h(P), P \in \Omega}$**, то** $\iint\limits_{\Omega} \mathbf{f(P)dS} \geq \iint\limits_{\Omega} \mathbf{h(P)dS.}$

- Доказательство следует из свойств **позитивности и линейности**

$$0 \leq \iint\limits_{\Omega} \left[\mathbf{f(P) - h(P)}\right]\mathbf{dS} = \iint\limits_{\Omega} \mathbf{f(P)dS} - \iint\limits_{\Omega} \mathbf{h(P)dS.}$$

Теорема существования двойного интеграла

- Обозначим через $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ множество Ω с присоединённой границей Γ. Множество $\bar{\Omega}$ называется замыканием Ω.

- **Теорема. Если функция $f(P)$ непрерывна на замыкании $\bar{\Omega}$, ограниченного множества Ω с кусочно -гладкой границей, то она интегрируема на Ω так же, как $\bar{\Omega}$**

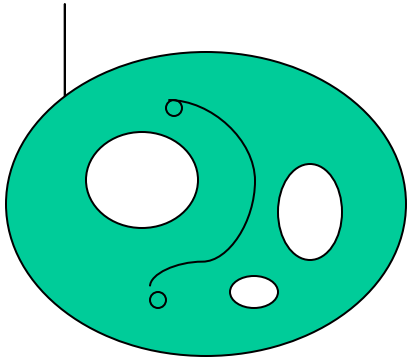
  И справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(P)dS = \iint\limits_{\bar{\Omega}} f(P)dS.$$

Связные множества

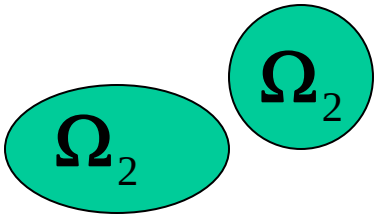
- Множество Ω называется **связным множеством,** если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству.
- В противном случае множество называется **несвязным.**

1.



Ω_1

Ω_1 -Связное множество



Ω_2 -Несвязное множество

Теорема о среднем

- **Теорема.** Если функция $\mathbf{f(P), P \in \bar{\Omega}}$ непрерывна на замыкании $\bar{\Omega}$ *связного* множества Ω **с** кусочно -гладкой границей**,** то существует точка $\mathbf{P_0 \in \bar{\Omega}}$ такая, что

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{f(P)dS = f(P_0)S(\Omega).}$$