Поздравляю с началом нового учебного года.

- Лекция для самостоятельного изучения

Функции многих переменных

Определение функции двух переменных

- Пусть D - некоторое множество *упорядоченных* пар чисел (x, y). Если ***каждой такой паре*** $(x, y) \in D$ *по некоторому правилу ставится в соответствие* ***число*** z, то говорят, что на множестве D задана функция ***двух переменных*** $z = f(x, y)$.
- Множество D называется ***областью определения функции.***
- Так как каждую пару чисел (x, y) можно отождествить с точкой $M(x, y)$ на координатной плоскости, то можно говорить, что функция $z = f(x, y)$. ***задана на множестве*** D ***точек на плоскости.***

График функции

- Множество точек в пространстве

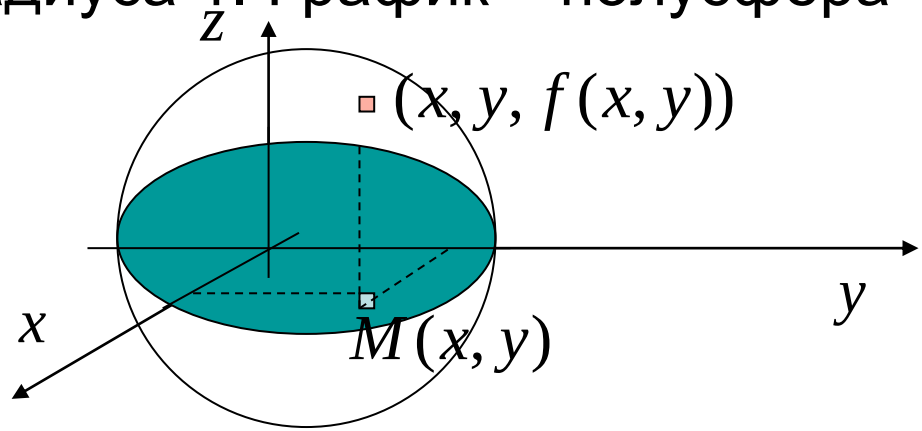
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})), \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D$$

  называется ***графиком*** функции $z = f(x, y).$

- ***Пример.*** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- Область определения $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad x^2 + y^2 \leq 1$

  круг радиуса 1. График – полусфера $z \geq 0$ радиуса 1.



Линии уровня

- Рассмотрим функцию $z = F(x, y), (x, y) \in D$
- Пусть уравнение $F(x, y) = C$, где C - некоторая константа, определяет неявно линию $L \subset D$
.
- Линия $L \subset D$, заданная уравнением $F(x, y) = C$,

  называется линией уровня.
- Геометрически линия уровня получаются проекцией

  на плоскость xOy линии пересечения графика

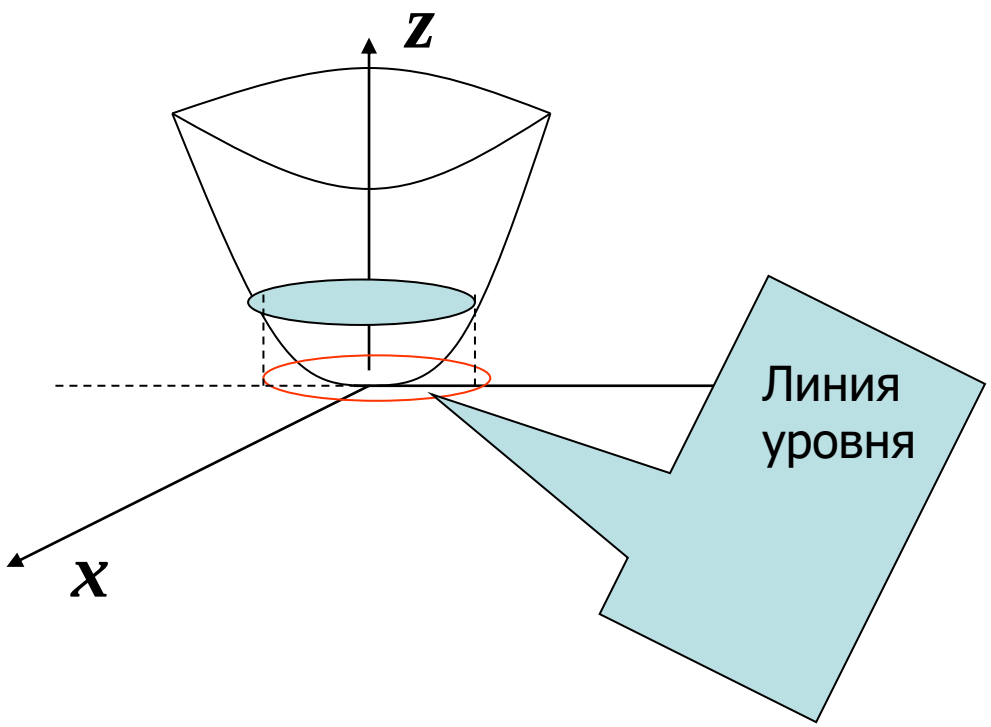
  функции $z = F(x, y), (x, y) \in D$ и плоскости $z = C$.

Пример

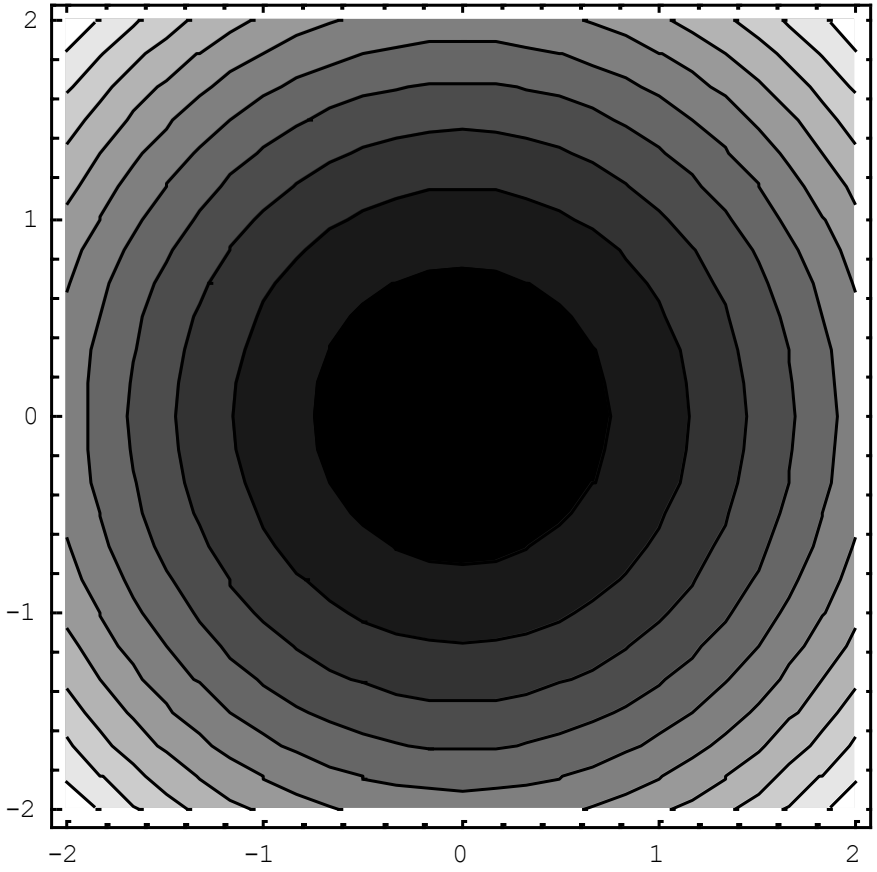
- Рассмотрим функцию $z = x^2 + y^2$. Окружности

$$x^2 + y^2 = C, C > 0$$

являются линиями уровня .



Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$



Линии уровня функции $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

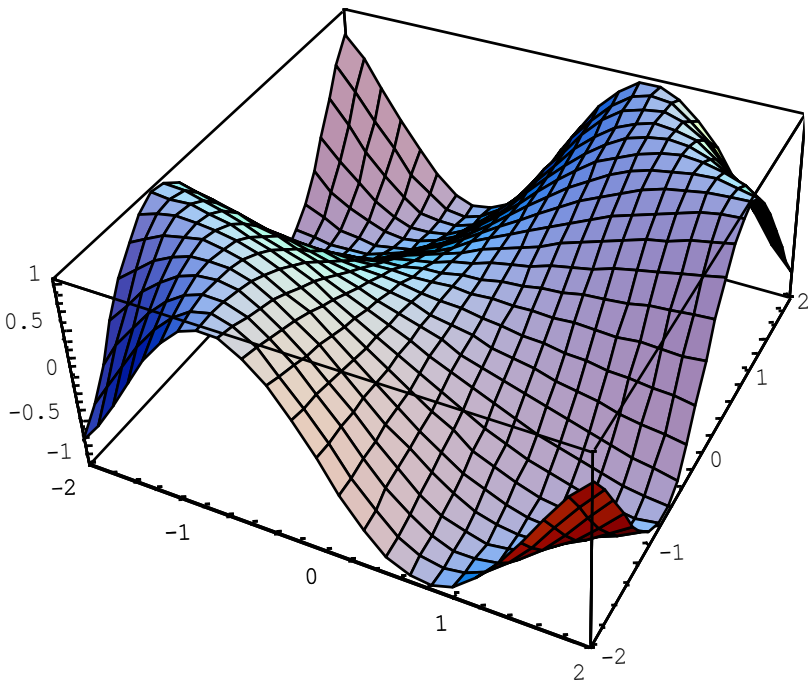
- Линиями уровня данной функции являются эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C, \quad C > 0$$

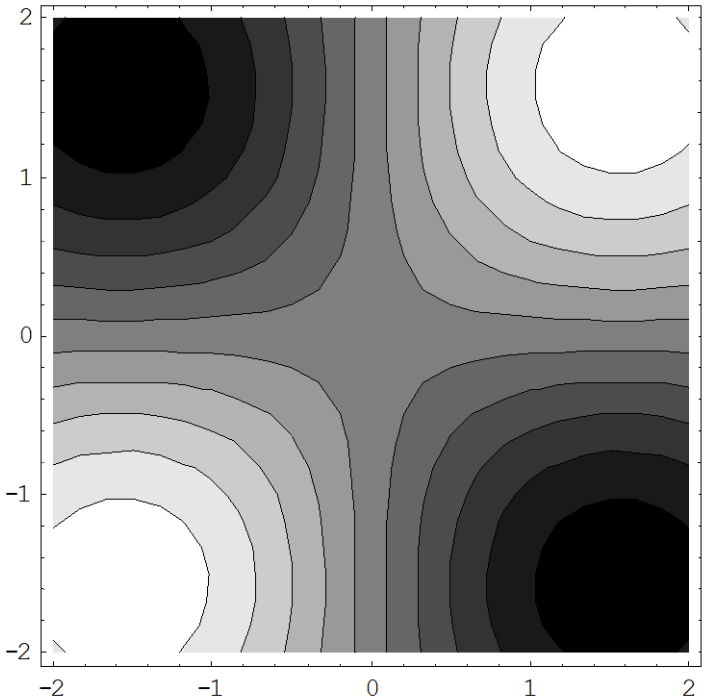
$$\frac{x^2}{a^2 C} + \frac{y^2}{b^2 C} = 1$$

- с полуосями $a\sqrt{C}, \quad b\sqrt{C}$

График и линии уровня функции
$z = \sin x \sin y$




```
ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



- ContourGraphics -

Функции трёх и более переменных.

- Если ***каждой упорядоченной тройке*** $(x, y, z) \in D$ *по некоторому правилу ставится в соответствие число* u, то говорят, что на множестве D задана функция трёх переменных $u = f(x, y, z)$.
- Аналогично определяется функция n переменных

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

- Также, с помощью окрестности точки можно определить предел, непрерывность функций трёх и более переменных , а также частные производные.

Поверхности уровня

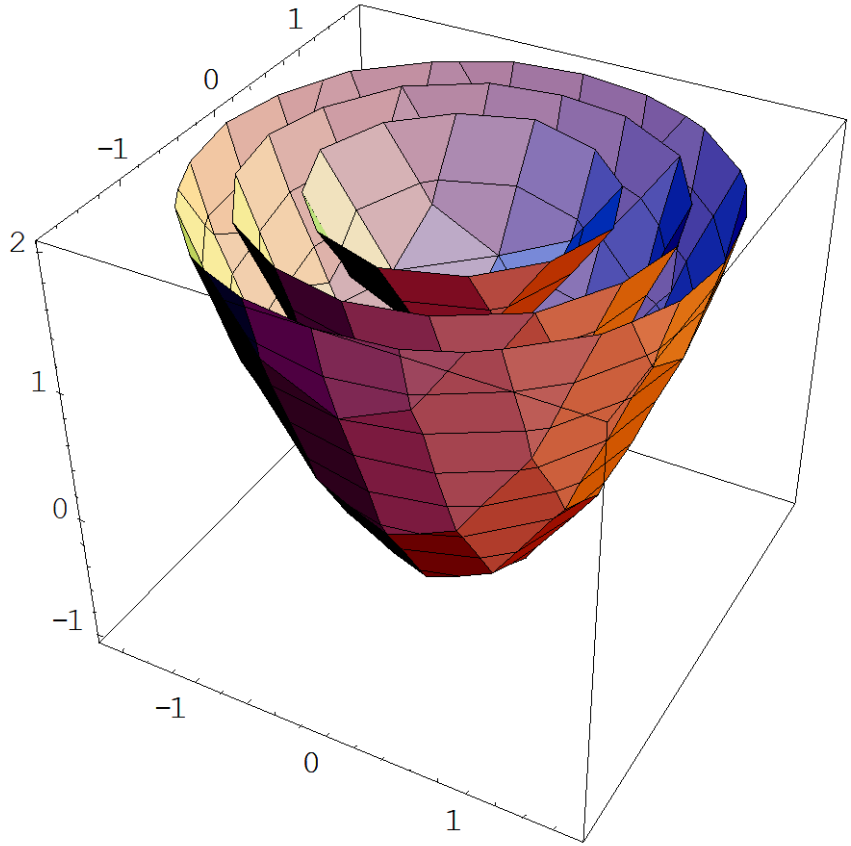
- Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$, определённую на множестве $(x, y, z) \in \Omega$.
- Если уравнение

$$f(x, y, z) = C$$

- определяет поверхность $S \subset \Omega$, то эта поверхность называется ***поверхностью уровня.***

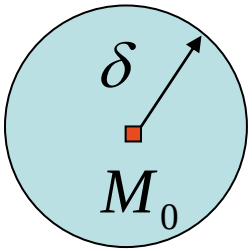
Поверхности уровня функции

$$u = x^2 + y^2 - z.$$



Окрестность точки на плоскости.

- Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0)$. Множество точек $M(x, y)$ таких, что расстояние $\rho(M_0, M) < \delta$ называется дельта – окрестностью $U_\delta(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$.



- Множество точек $M(x, y)$ таких, что $0 < \rho(M_0, M) < \delta$ называется проколотой $\overset{o}{U}_\delta(M_0)$ окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$, т.е. $M_0(x_0, y_0) \notin \dot{U}_\delta(M_0)$.

Предел функции

- Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ кроме, **быть может самой точки**. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0,\ y \to y_0$,

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y),$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся проколотая окрестность $\overset{o}{U}_{\delta}(M_0)$ такая, что

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$$

- для всех точек $M(x, y) \in \overset{o}{U}_{\delta}(M_0)$.

Свойства пределов

- Свойства пределов доказанные **для функций одной переменной в первом семестр**е, а также арифметические свойства пределов **аналогично доказываются и для функций двух переменных и более переменных**

Непрерывность функции

- Если предел функции при $x \to x_0,\ y \to y_0$ совпадает со значением функции $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$z_0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

  то функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0, y_0)$.
- ***Замечание.*** *Из непрерывности функции по каждой переменной не следует непрерывность функции, как функции двух переменных*

Контрпример

- Действительно, функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0, \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

- Непрерывная по каждой переменной разрывна в точке $(0,0)$, так как на прямых $y = kx$ в любой окрестности точки $(0,0)$ значения функции

$$\frac{kx^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

- далеки от 0 при $k \neq 0.$

Частные производные

- ***Приращением функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменной*** x называется величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

- ***Частной производной*** по x в точке (x, y) называется предел

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

- Аналогично определяется производная по y

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Вычисление частных производных

- Частная производная по x *является обычной производной от функции* $z = f(x, y)$ как функции только одной переменной x, рассматривая переменную y как константу.
- Аналогично при нахождении производной по y переменная x рассматривается как константа.

Пример

- Найти частные производные функции

$$z = x^3 + \frac{x}{y} + \cos xy$$

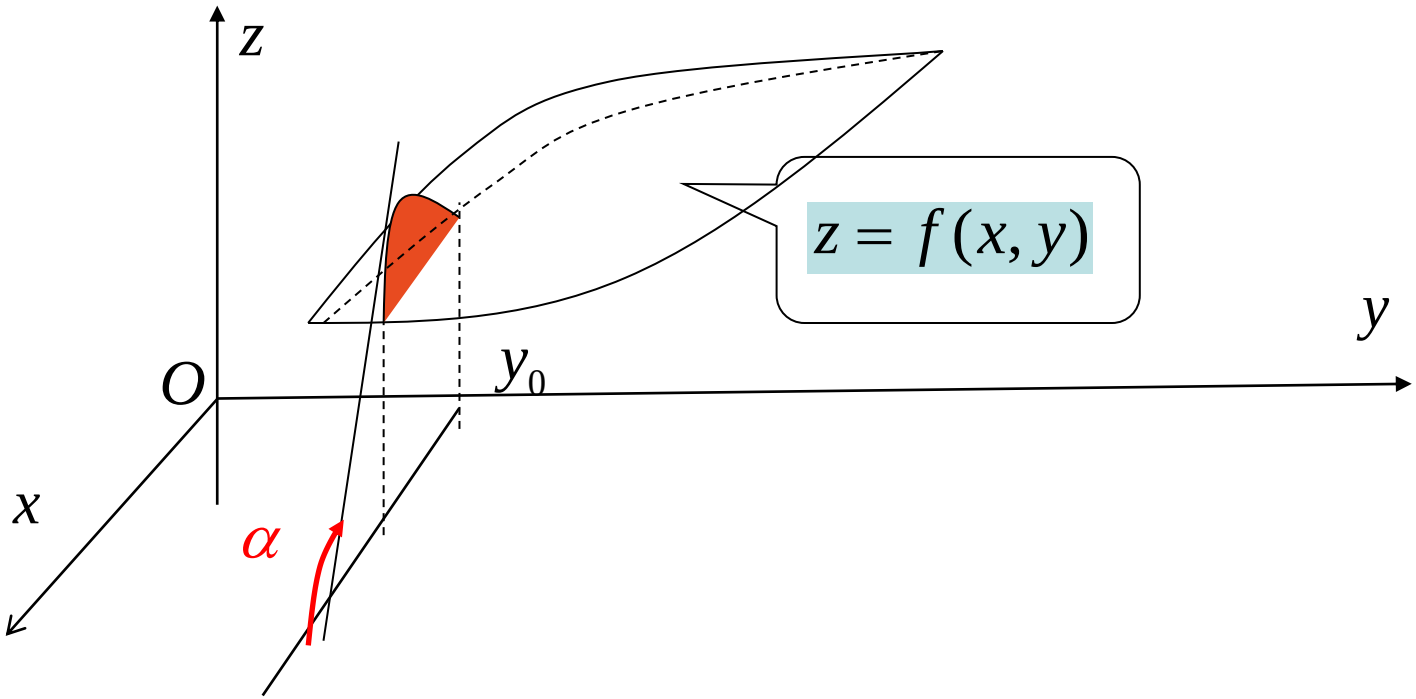
- Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{y} - y\sin xy$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - x\sin xy$$

Геометрическое истолкование частных производных

- Частная производная $z'_x(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла наклона к оси Ox касательной к сечению поверхности $z = f(x, y)$плоскостью $y = y_0$.
- Аналогично для частной производной по y.



Производные высших порядков

- Производная второго порядка по переменной x определяется формулой

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

- Смешанная производная второго порядка -

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

- Аналогично определяются производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Теорема о смешанных производных

- Если функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. вместе со своими производными

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

- и смешанные производные непрерывны в точке M_0, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(M_0).$$

Теорема о приращении функции

- Рассмотрим для простоты случай двух переменных. Случай $n, n > 2$ переменных рассматривается аналогично.
- ***Приращением функции*** $u = f(x, y)$ в точке $(x, y,)$ называется разность

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

- ***Теорема 1***. Если функция $u = f(x, y)$ имеет *непрерывные частные производные* в точке (x, y), то

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0,$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Дифференцируемость функции

- Если приращение функции в точке (x, y) можно представит в виде

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0,$$

- где числа A, B не зависят от $\Delta x, \Delta y$,то говорят, что *функция дифференцируема в точке* (x, y) .
- ***Теорема 2***. Для того чтобы функция была дифференцируема в точке, ***необходимо чтобы она имела в этой точке частные производные,*** и ***достаточно***, чтобы ***частные производные были непрерывны в этой точке.***

Дифференциал

- Если функция дифференцируем в точке (x, y), ***то главная часть приращения функции***

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

называется дифференциалом. Дифференциал записывается также в виде

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

- В случае трёх переменных $du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$

Производная сложной функции

- ***Теорема***. Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x, y, z), а функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t)$$

- имеют производную в точке t, то производная сложной функции $u = f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Производная сложной функции

- Если функции $x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta),\ z = z(\xi,\eta)$ зависят от двух переменных, то частные производные сложной функции $u = f(x, y, z)$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Существование неявной функции

$$F(x, y) = 0$$

- ***Теорема.*** Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и частная производная F_y' непрерывна в точке M_0. Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad F_y'(x_0, y_0) \neq 0,$$

то существует прямоугольная окрестность

$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ такая, что в этом прямоугольнике существует единственная кривая $y = f(x), y_0 = f(x_0),$ удовлетворяющая уравнению $F(x, f(x)) = 0, x \in U_\delta(x_0),$

и $y = f(x)$ дифференцируема при $x \in U_\delta(x_0)$.

Производные неявной функции

- В условиях теоремы существования справедлива формула производной неявной функции $y = f(x)$

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

- Аналогично для частных производных неявной функции двух переменной $z = z(x,y)$, задаваемой уравнением $F(x,y,z) = 0$, справедливы формулы

$$z_x' = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad z_y' = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Пример

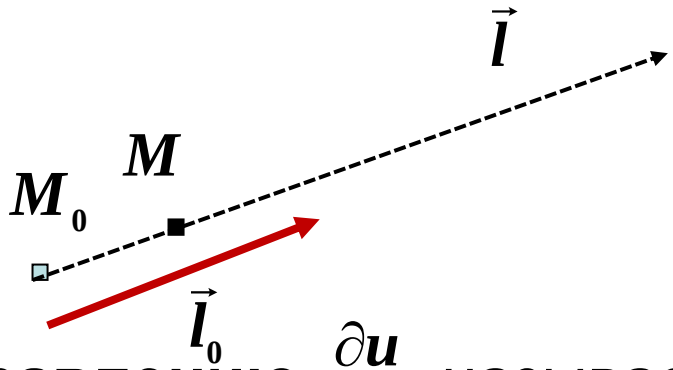
- Вычислить частные производные неявной функции

$$(x+y)-\arcsin xz=3yz;\quad \frac{\partial z}{\partial x}-?,\frac{\partial z}{\partial y}-?$$

Производная по направлению

- Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$, определённую в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть $\vec{l}$ - ось, проходящая через точку M_0, а $\vec{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ единичный вектор в направлении оси $\vec{l}$.

$$M: \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\alpha \end{cases}$$



- **Производной по направлению** $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ называется производная u'_t, где

$$u(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Вычисление производной по направлению

- Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то справедлива формула в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

Градиент

- Введём вектор

$$\boxed{\boldsymbol{grad\, u}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\vec{k},}$$

который называется **градиентом** функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0.

- Справедлива формула

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \boldsymbol{grad\, u}(M_0)\, \vec{l}_0}$$

где $\vec{l}_0$ - **единичный вектор** в направлении оси $\vec{l}$.

Свойства градиента

- 1.Справедливо неравенство

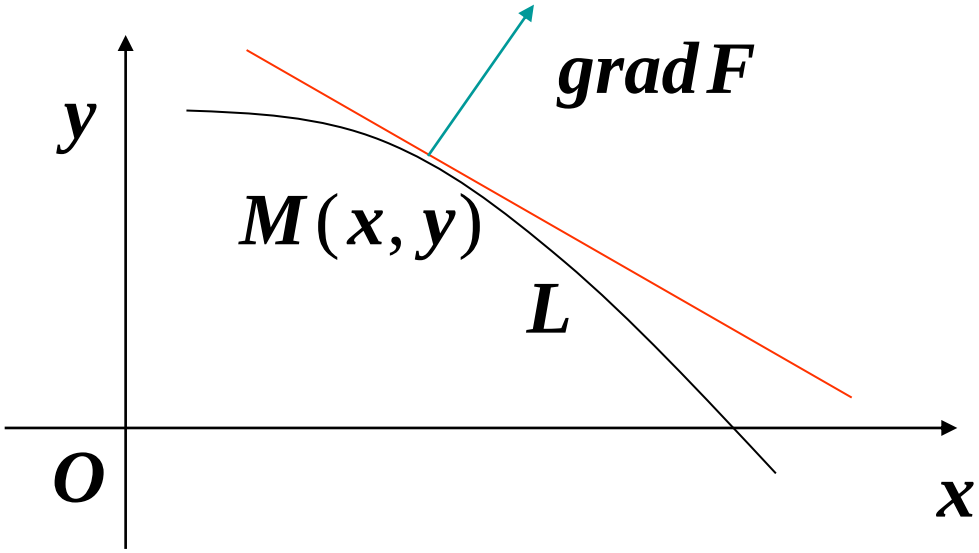
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{l}} \le \left| \boldsymbol{grad\ u} \right|$$

- 2. Длина градиента равна максимальной величине производной по направлению.
- 3. Если $\boldsymbol{grad\ u} = \vec{\mathbf{0}}$, то $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{l}} = \mathbf{0}$ для любого направления $\vec{\boldsymbol{l}}$.

❖ $\boldsymbol{grad\ u}$ *указывает направление* и *максимальную скорость роста* функции

Градиент и линия уровня

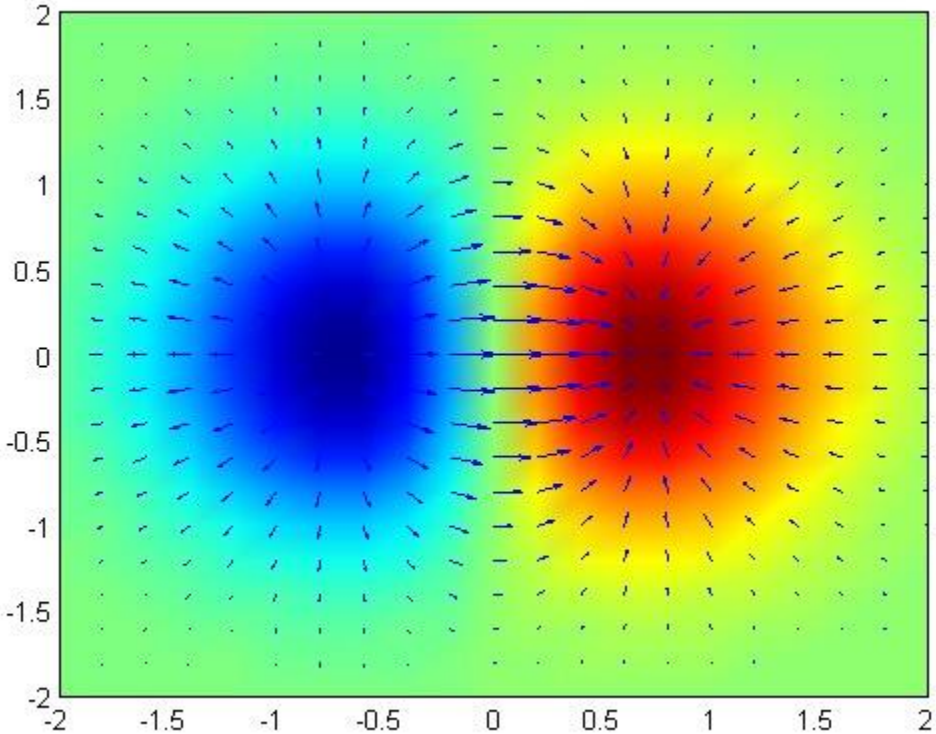
- Пусть $L: F(x, y) = C$ - линия уровня. Справедливо ***свойство***: $grad\,F(M)$ **ортогонален касательной** к линии уровня L точке $M(x, y)$,



т.е. градиент ***направлен по нормали к линии уровня.***

векторное поле градиента функции распространения тепла

$$u = u(x, y)$$



Касательная плоскость.

- Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то плоскость, заданная уравнением

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0),$$

называется **касательной плоскостью** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, а соответствующее значение z **аппликатой** касательной плоскости:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0)$$

Геометрическое истолкование дифференциала

Обозначим $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta Z = z - z_0.$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$\Delta Z = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Delta y.$$

С другой стороны, $$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy.$$

- Таким образом $\Delta Z = dz$,
- **т.е. приращение аппликаты касательной плоскости ΔZ равно дифферециалу.**