Лекция 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

Понятие дифференциального уравнения и его решения

- **Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го** порядка называется выражение вида
$$F(x, y, y') = 0,$$
где $F -$ заданная функция, $x -$ независимая переменная, $y = y(x) -$ неизвестная функция, y' - её производная, наличие которой обязательно.
- **Решением дифференциального уравнения** называется функция $y = y(x),$ определённая на некотором интервале (a, b) вместе со своей **производной** и обращающее на этом интервале уравнение в тождество $F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in (a, b).$

Интегральная кривая

- **График решения** дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.
- **Пример 1**. Рассмотрим уравнение вида $y' - 2x = 0$.
- Решение уравнения:

$$y' = 2x$$

$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

- **Интегральные кривые** – семейство парабол (рис.1)

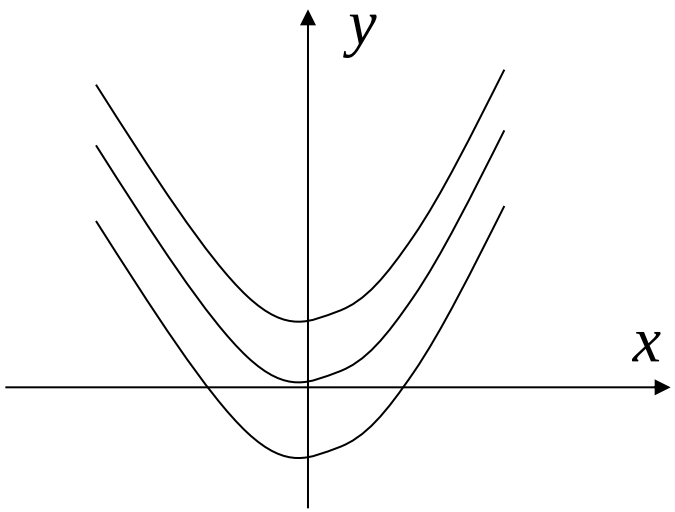


Рис.1

Задача Коши

- **Задачей Коши** для дифференциального уравнения 1-го порядка называется задача нахождения решения этого уравнения $y = y(x)$, удовлетворяющего **начальным условиям** $y_0 = y(x_0)$, где $(x_0, y_0) -$ заданные значения.
- Обычно задача Коши записывается в виде

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y_0 = y(x_0). \end{cases}$$

- Геометрически задача Коши является задачей о нахождении **интегральной кривой, проходящей через заданную точку** $M_0(x_0, y_0)$.

Единственность решения задачи Коши

- Будем говорить, что задача Коши с начальными условиями $y_0 = y(x_0)$ имеет ***единственное решение*** $y = y(x)$, определённое на интервале (a, b), если **не существует** решения заданной задачи Коши, определённого на этом же интервале, не совпадающего с решением $y = y(x)$.

Контрпример.

- **Пример 2**. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $y' = 3y^{2/3}$.

- Легко видеть, что функции вида $y = \begin{cases} (x-\alpha)^3, \ x \le \alpha, \\ 0, \quad \alpha < x < \beta, \\ (x-\beta)^3, \ x \ge \beta \end{cases}$

  являются решениями уравнения и через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости проходит бесконечно много соответствующих интегральных кривых.

Теорема существования и единственности

- Пусть функция $f(x, y)$ ***непрерывна*** в открытой области D и существует ***непрерывная частная производная*** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в этой области. Тогда для

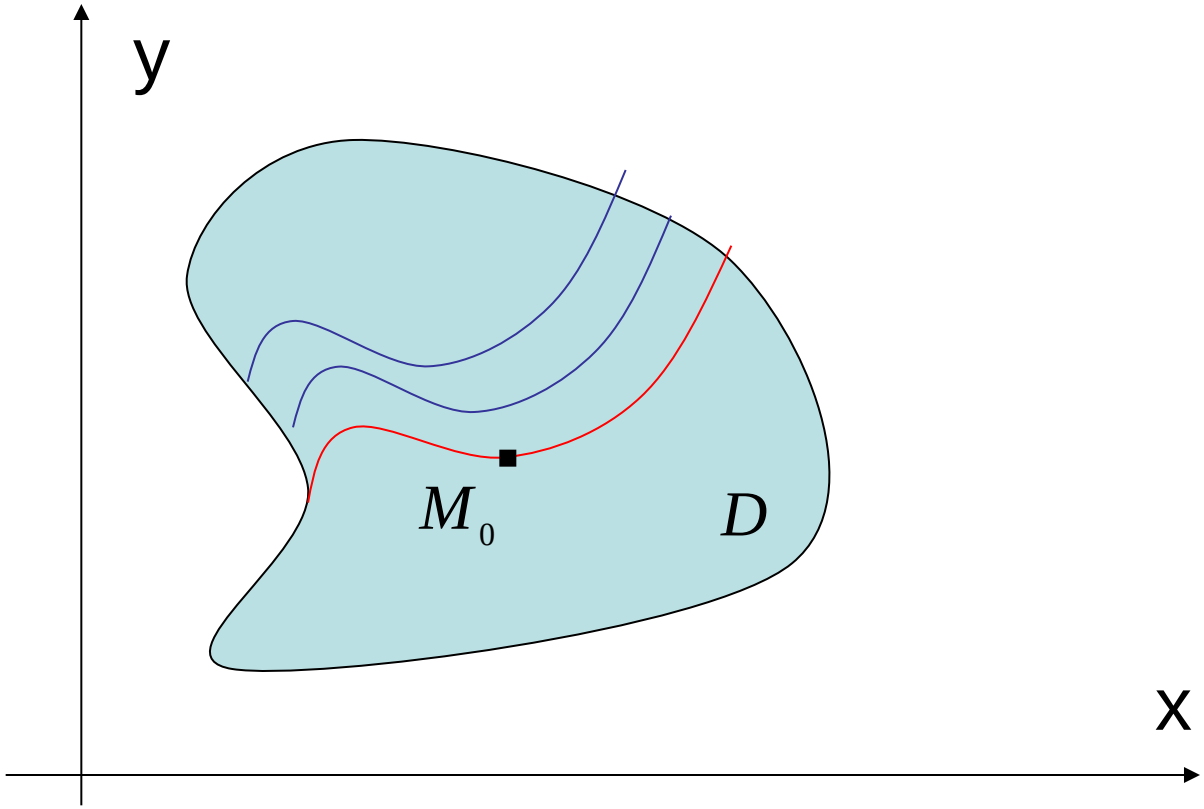
любой точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей области D, задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y_0 = y(x_0). \end{cases}$$

имеет единственное решение, определённое на **некотором** максимальном интервале (a, b) .

Геометрическая иллюстрация

Пусть $M_0 \in D$, и в области D выполняются условия теоремы существования и единственности, тогда через точку M_0 проходит единственная интегральная кривая.



Частные и общие решения

Пусть D - **область существования и единственности** дифференциального уравнения.

- Всякое решение $y = y(x)$ задачи Коши с начальным условием $y_0 = y(x_0), \quad (x_0, y_0) \in D$ называется ***частным решением.***
- Семейство решений $y = \varphi(x, C),$ зависящее от произвольной постоянной C , называется ***общим решением***, если любое частное решение содержится в общем решении.

Особые решения

- Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого нарушается единственность задачи Коши, называется ***особым решением.***

- Для примера 2 функция $y = 0$ является особым решением.

Общий интеграл.

- Неявная функция $\Phi(x, y, C) = 0$ называется ***общим интегралом***, если она определяет общее решение $y = \varphi(x, C)$, дифференциального уравнения.

- Дифференциальные уравнения вида

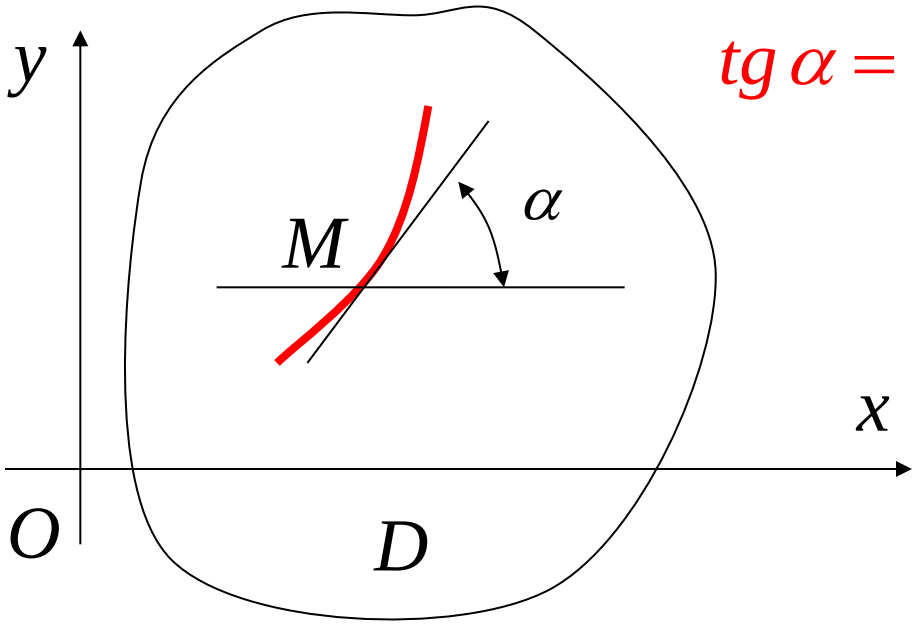
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называются ***уравнение в дифференциалах.***

Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$

- Пусть функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Проведём касательную к интегральной кривой $y = y(x)$ и обозначим через α угол наклона касательной к оси Ox. Тогда $y'(x) = tg\,\alpha$, поэтому

$$tg\,\alpha = f(x, y(x)).$$



Поле направлений

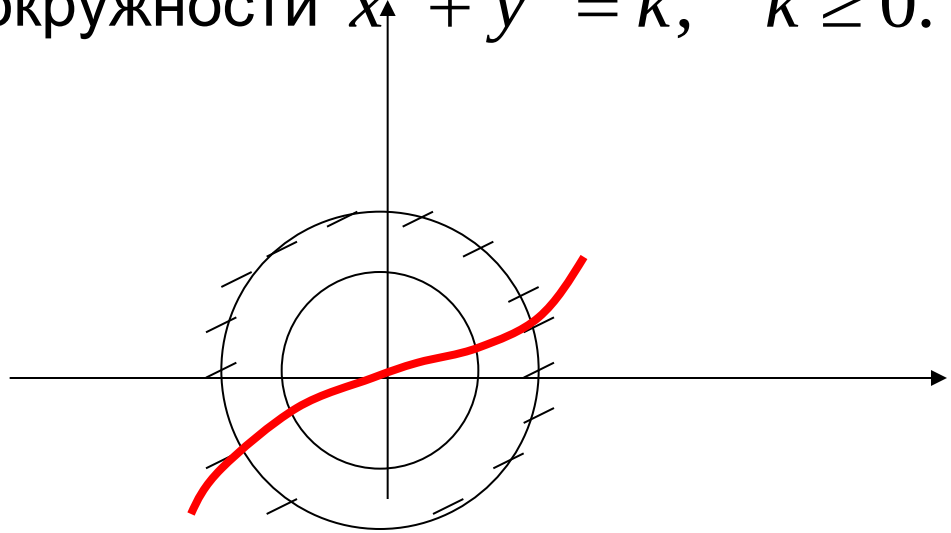
- Таким образом, угол наклона к оси Ox **касательной к интегральной кривой** определяется правой частью диф.уравнения.
- Если в каждой точке $M(x, y)$ области определения D функции $f(x, y)$ построить отрезки, составляющие с осью Ox угол α такой, что $tg\,\alpha = f(x, y)$,

  то получим ***поле направлений***, определяемое дифференциальным уравнением

$$y' = f(x, y).$$

Изоклины

- Кривая $f(x,y)=C, \quad C=const,$ в которой наклон к оси Ox поля направлений один и тот же, называется ***изоклиной.***
- ***Пример.*** Для уравнения $y'=x^2+y^2$ изоклинами являются окружности $x^2+y^2=k, \quad k\geq 0.$



- Дифференциальные уравнения, разрешимые в квадратурах

- Если решение дифференциального уравнения явно или неявно выражается через элементарные функции или интегралы от них, то такие уравнения называются разрешимыми в квадратурах

Уравнения с разделяющимися переменными

- Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x)g(y)$$

- называются уравнениями с ***разделяющимися переменными.***
- Уравнения с ***разделяющимися переменными*** в ***дифференциалах*** имеют вид

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

- ***Пример 1.*** $y' = \dfrac{y}{x}.$

Математическая модель химической реакции

- Пусть $m = m(t) -$ масса вещества, вступившего в химическую реакцию в момент времени t .
- Известно, что скорость химической реакции $\dot{m} = \dfrac{dm}{dt}$ пропорциональна массе :

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad k > 0.$$

- Начальное условие $m(0) = m_0$

Однородные уравнения

- Функция $f(x, y)$ называется ***однородной*** функцией степени m, если для **любого** $t > 0$ выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

- Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется однородным, если функции $M(x, y), N(x, y)$ являются **однородными функциями одинаковой степени.**

Ещё об однородных уравнениях

- Уравнение $y' = f(x, y)$, разрешённое относительно производной, называется *однородным*, если функция $f(x, y)$ является ***однородной функцией нулевой степени.***
- Для решения однородного уравнения вводится новая неизвестная функция (замена)

$$z = \frac{y}{x}$$

- Пример 1. $y' = \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \frac{y}{x}.$

Пример 2.

- Найти общее решение

$$(2x^2 + y^2)dx + xydy = 0$$

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

- Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x),}$$

где функции p(x) и q(x) непрерывны на некотором интервале (a,b).

- Областью существования и единственности уравнения является полоса

$$a < x < b.$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

- Линейное дифференциальное уравнением 1-го порядка вида

$$y' + p(x)y = 0$$

называется ***однородным.***

- Если правая часть уравнения **отлична от нуля**, то **- неоднородным.**

Метод вариации решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

- Найдём вначале решение однородного уравнения.

$$y' + p(x)y = 0$$

- Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

- Разделив переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\mathcal{P}(x) + \ln|C|,\ C \neq 0,$$

$$где\ \mathcal{P}(x) - первообразная\ p(x).$$

$$\ln\frac{|y|}{C} = -\mathcal{P}(x),$$

$$y = Ce^{-\mathcal{P}(x)},\ C \in R - общее\ решение\ однородного\ уравнения.$$

Решение неоднородного уравнения

- Будем разыскивать решение неоднородного уравнения, заменив константу C на функцию C(x), т.е.

$$y = C(x)\, y_0(x),$$
$$где\ y_0(x) = e^{-\mathcal{P}(x)}.$$

- Имеем

$$c'(x)y_0(x)+c(x)y_0'(x)+p(x)c(x)y_0(x)=q(x)$$

$$c'(x)y_0(x)+c(x)(y_0'(x)+p(x)y_0(x))=q(x)$$

$y_0'(x)+p(x)y_0(x)=0$, *т.к.* $y_0(x)$ — *решение однородного уравнения.*

$$c'(x)y_0(x)=q(x),\quad c'(x)=\frac{q(x)}{y_0(x)},\qquad c(x)=\int\frac{q(x)}{y_0(x)}dx$$

т.е. $c(x)=G(x)+C$, *где*

$G(x)$ — *первообразная функции* $\frac{q(x)}{y_0(x)}$. *Отсюда*

$$\boxed{y(x)=(G(x)+C)y_0(x)}$$

Решение линейного уравнения методом Бернулли

- Линейное уравнение первого порядка можно решить, сделав подстановку Бернулли

$$y = u \cdot v,$$

где $u, v -$ неизвестные функции.

Пример

- Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4$$

Уравнение Бернулли

- Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\boxed{\begin{gathered} y' + p(x)y = q(x)y^n, \\ n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1. \end{gathered}}$$

- **Ненулевое** решение уравнения Бернулли можно получить заменой

$$\boxed{z = y^{1-n},\ z' = (1-n)y^{-n}y'}$$

- При которой уравнение Бернулли сводится к линейному

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=q(x),\\ (1-n)z'+p(x)z=q(x)\end{gathered}}$$

- **Второй способ** решения состоит в замене y=u v- "подстановка Бернулли".

Пример

- Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

- Если левая часть уравнения в дифференциалах

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

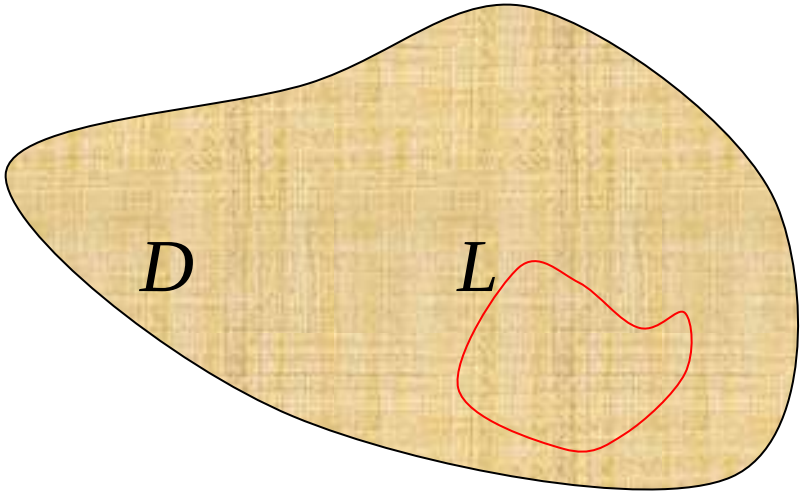
является дифференциалом некоторой функции $\mathfrak{A}(x,y)$ т.е.

$$d\,\mathfrak{A}(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

- то дифференциальное уравнение называется ***уравнение в полных дифференциалах***.

Односвязная область

- Область D называется односвязной, если множество точек, ограниченных непрерывной замкнутой кривой L, лежащей в D, также принадлежит D. Т.е. в односвязной области нет **"дырок".**



Критерий уравнения в полных дифференциалах

- ***Теорема.*** Пусть функции $M(x,y), N(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$
- в ***односвязной*** области D. Тогда, уравнение в дифференциалах
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
- является уравнением в ***полных дифференциалах***, если в области D выполняется равенство
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Пример

- Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + xy^2)dx + (x^2 y + y^2)dy = 0$$

Замечание

- В уравнение в дифференциалах

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

- переменные x, y входят равноправно. Таким образом, в качестве решения можно рассматривать функции $x = x(y)$ наряду с функциями . $y = y(x)$
- Пример 1 $ydx + xdy = 0$

«Перевёрнутое уравнение»

- Поэтому к интегральным кривым уравнения

$$y' = f(x, y)$$

- будем относить и решения перевёрнутого уравнения

$$\frac{1}{x'} = f(x, y) \Rightarrow x' = \frac{1}{f(x, y)}$$

- Пример 2. $(2x + y^2)y' = y$

Blow up – Взрыв решения

- Свойством blow-up называют стремление решения дифференциального уравнения к бесконечности на конечном промежутке времени.

- Теория blow-up является теорией катастроф нелинейных явлений.

Blow up – Взрыв решения

- **Замечание. Непрерывность** правой части уравнения

$$y' = f(x, y)$$

при любых x может не обеспечивать существование решения задачи Коши в ***произвольной*** окрестности заданной точки x_0.

- Пример

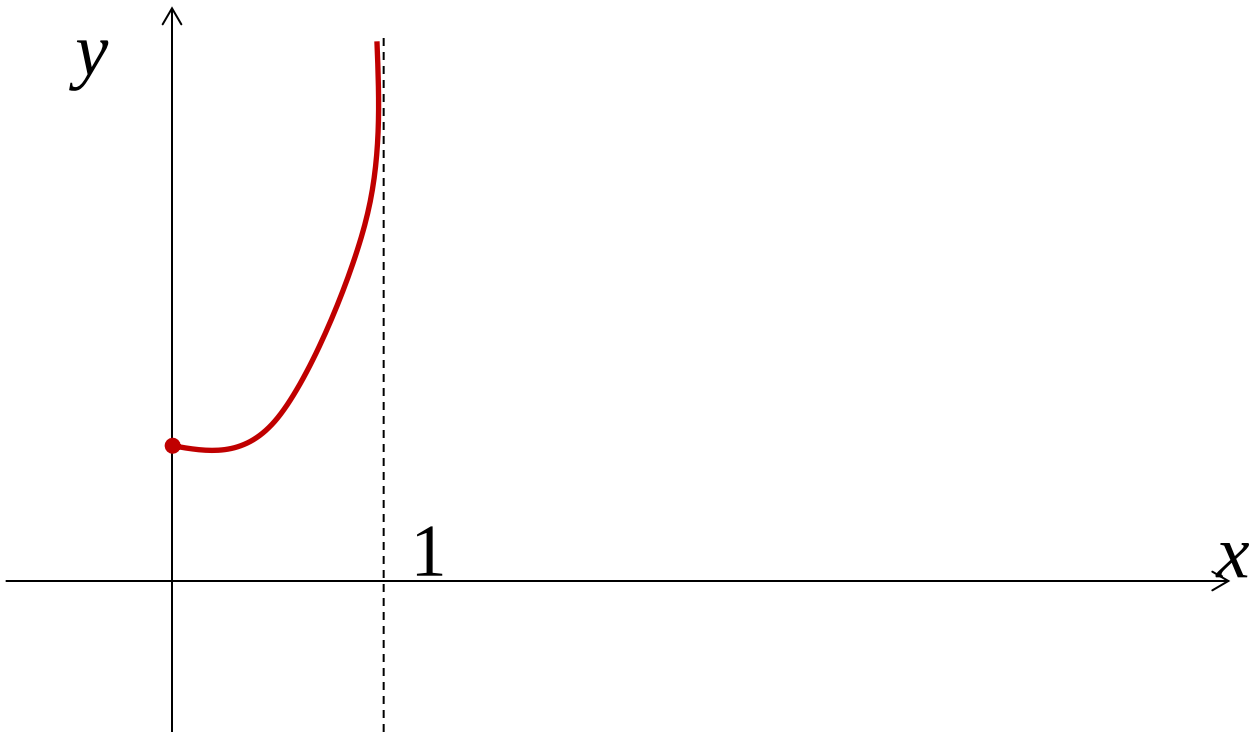
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение

- Имеем , разделяя переменные|

$$\frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+C \Rightarrow y=-\frac{1}{x+C}.$$

- Поставляя начальные условия $x=0, y=1$, получаем $C=1, \quad y=-\frac{1}{x-1}.$
- Таким образом, решение $y \to \infty$ при $x \to 1,$ хотя правая часть уравнения $f(x,y)=y^2$ **непрерывна** вместе со своей производной $f(x,y)=2y$ **во всех точках координатной плоскости.**

В точке $x=1$ происходит взрыв «Blow up» решения.

- График частного решения.