

Глава 7. Поверхностные интегралы.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов. Рассматриваются интегралы двух типов: поверхностные интегралы I-го и II-го рода, их определения аналогичны соответствующим определениям для криволинейных интегралов, для определения поверхностного интеграла II-го рода на поверхности необходимо задать ориентацию. Как и для криволинейных интегралов, существуют формулы, связывающие поверхностные интегралы I-го и II-го рода. Однако в отличие от кривой, которая определяется заданием одного параметра, для описания поверхности необходимо уже два параметра, поэтому вычисление поверхностных интегралов сводится к вычислению двойного интеграла по области на плоскости (а не определенного интеграла Римана, как для криволинейных интегралов).

7.1. Поверхностный интеграл I-го рода.

В трехмерном пространстве с декартовой системой координат $OXYZ$ рассмотрим кусочно-гладкую (определение было дано в п.5.1 главы 5) поверхность Ω , ограниченную кусочно-гладкой (определение в п.6.1) кривой $\Gamma = \Gamma(\Omega)$. В частном случае замкнутой поверхности (например, сферы) ее граница представляет собой пустое множество, а значит также является кусочно-гладкой.

Пусть на поверхности Ω задана функция $f(M)$, где $M = M(x, y, z)$ – точка на поверхности, а (x, y, z) – ее декартовы координаты. Пусть функция $f(M)$ непрерывна на поверхности Ω , т.е. в ранее введенных обозначениях $f(M) \in C(\Omega)$.

Зададим разбиение T поверхности Ω с помощью произвольно проведенных кусочно-гладких кривых на части $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ (рис. 1). В каждой из этих частей Ω_k выберем по произвольной точке M_k с координатами (ξ_k, η_k, ζ_k) , и составим интегральную сумму:

$$S_T = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |\Omega_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |\Omega_k|, \quad (1)$$

где $|\Omega_k|$ – площадь поверхности Ω_k (определение площади поверхности см. в п.4.4 главы 4).

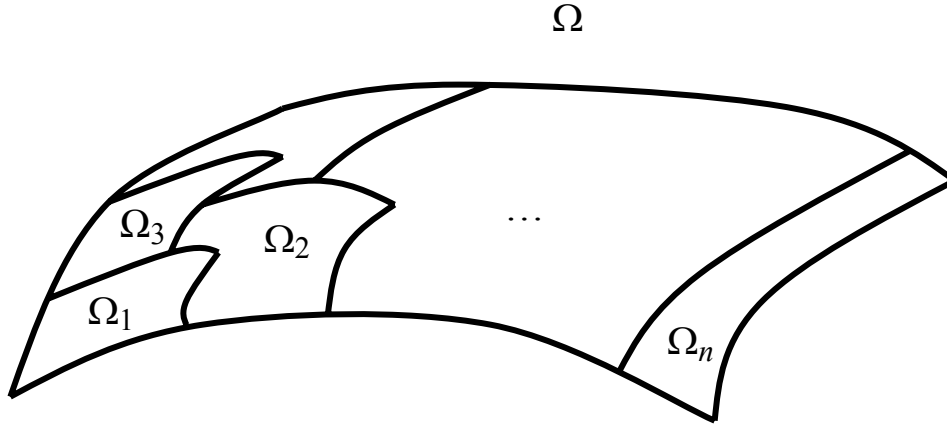


Рис.1. К определению поверхностного интеграла I рода.

Определение 1. Пусть P и N – произвольные точки части Ω_k поверхности Ω . Соединим эти точки дугой γ гладкой кривой, целиком лежащей в Ω_k . Обозначим через $\gamma(P, N)$ длину этой дуги, а через $\ell(P, N)$ – длину *самой короткой дуги*, соединяющей точки P и N и целиком лежащей на поверхности Ω_k : $\ell(P, N) = \min_{\gamma} \gamma(P, N)$. **Диаметром** части Ω_k поверхности Ω назовем величину

$d(\Omega_k) = \sup_{P, N \in \Omega_k} \ell(P, N)$. **Диаметром d_T разбиения T** будем называть наи-

больший из диаметров частей:

$$d_T = \max_{1 \leq k \leq n} d(\Omega_k).$$

Замечание 1. Данное определение самой короткой дуги $\ell(P, N)$ не вполне корректно. Действительно, пусть длины $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_m, \dots$ некоторых дуг, соединяющих точки P и N образуют последовательность чисел: $1/2, 3/8, 1/3,$

$5/16, \dots, (1/2 - (m-1)/(4m)), \dots$. Как легко видеть, предел этой последовательности равен $1/4$, в то же время ни одна из дуг не имеет длины, точно равной $1/4$ (все они больше этого значения). В таком случае записывают (аналогично тому, как это делалось при определении диаметра множества в пункте 4.1 главы 4):

$$\ell(P, N) = \inf_n \ell_n = \frac{1}{4}.$$

Запись (от латинского *infimum* – низший):

$$b = \inf_{a \in A} f(a)$$

означает, что для всех значений a из множества A значение функции $f(a)$ не меньше, чем величина b , но при этом для любого значения $\varepsilon > 0$ найдется такое значение a_ε из множества A , что функции $f(a_\varepsilon)$ в этой точке окажется меньшей, чем $b + \varepsilon$.

Таким образом, точное определение величины $\ell(P, N)$ в определении 1 должно быть дано следующим образом:

$$\ell(P, N) = \inf_\gamma \gamma(P, N).$$

Определение 2. Поверхностным интегралом I-го рода от функции $f(M)$ по поверхности Ω называется предел интегральной суммы (1) при бесконечном увеличении числа n частей разбиения Ω_k и бесконечном уменьшении диаметра d_T разбиения, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения T , ни от выбора точек M_k :

$$\iint_{\Omega} f(M) d\Omega = \iint_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega = \lim_{d_T \rightarrow 0} S_T = \lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |\Omega_k|. \quad (2)$$

Для поверхностного интеграла используются и другие обозначения:

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) d\sigma, \quad \iint_{\Omega} f(x, y, z) dS.$$

Сформулируем без доказательства теорему о существовании поверхностного интеграла I-го рода:

Теорема 1. Если Ω – непрерывная кусочно-гладкая поверхность, ограниченная кусочно-гладкой кривой $\Gamma(\Omega)$, и функция $f(M)$ непрерывна на ней, то поверхностный интеграл I-го рода (2) от функции $f(M)$ существует и определен однозначно.

Обратимся теперь к вычислению поверхностного интеграла I-го рода.

Теорема 2. Пусть Ω – гладкая поверхность, заданная на ограниченной области D плоскости OXY уравнением: $z = g(x, y)$, где $(x, y) \in D$, и пусть функция $f(M)$ непрерывна на этой поверхности. В этом случае поверхностный интеграл I-го рода от функции $f(M)$ находится по формуле:

$$\iint_{\Omega} f(M) d\Omega = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + g_x'^2 + g_y'^2} dx dy. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 2. Спроектируем на плоскость OXY множество кривых, разбивающих поверхность Ω на части Ω_k (рис.2). Получим в результате разбиение области D на части D_k .

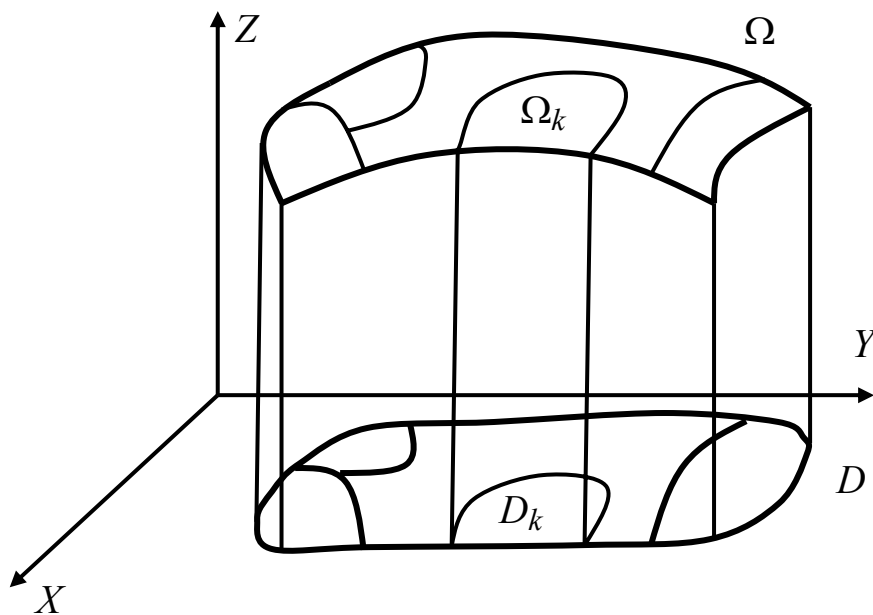


Рис.2. К доказательству теоремы 2.

По формуле из пункта 4.4 главы 4 имеем выражение для площади поверхности Ω_k :

$$|\Omega_k| = \iint_{D_k} \sqrt{(1 + g'_x{}^2 + g'_y{}^2)} dx dy.$$

Это равенство можно преобразовать, применив теорему о среднем для двойного интеграла:

$$|\Omega_k| = \sqrt{(1 + g'_x(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^2 + g'_y(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^2)} \cdot |D_k|, \quad (4)$$

где $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ – некоторая точка части D_k , а $|D_k|$ – площадь этой части.

Подставляя формулу (4) в выражение (1) для интегральной суммы, получим:

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot \sqrt{(1 + g'_x(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^2 + g'_y(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^2)} \cdot |D_k| = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, g(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{(1 + g'_x(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^2 + g'_y(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)^2)} \cdot |D_k|. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что выражение (5) отличается от интегральной суммы

$$S_T^* = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, g(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{(1 + g'_x(\xi_k, \eta_k)^2 + g'_y(\xi_k, \eta_k)^2)} \cdot |D_k|$$

двойного интеграла $\iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{(1 + g'_x(x, y)^2 + g'_y(x, y)^2)} dx dy$ только

значениями аргументов частных производных g'_x и g'_y под знаком квадратного

корня. В силу предположения о гладкости поверхности эти частные производные непрерывны на замыкании $\bar{D}$ области D . Тогда и функция

$\sqrt{(1 + g'_x(x, y)^2 + g'_y(x, y)^2)} = h(x, y)$ также непрерывна на $\bar{D}$.

Функция, непрерывная на замкнутой (т.е. содержащей свою границу) ограниченной области является **равномерно непрерывной** на ней, т.е. для любого

значения $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при диаметре d_T разбиения меньшим δ , разность $|h(\xi_k, \eta_k) - h(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)|$ будет меньше ε .

Из непрерывности на поверхности Ω функции $f(M)$ следует, что функция $f(x, y, g(x, y))$ непрерывна, а следовательно, и ограничена на области $\bar{D}$:

$$|f(x, y, g(x, y))| \leq C.$$

Тогда получаем, что при $d_T < \delta$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |S_T - S_T^*| &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k, \eta_k, g(\xi_k, \eta_k))| \cdot |h(\xi_k, \eta_k) - h(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)| \cdot |D_k| \leq \\ &\leq C \cdot \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^n |D_k| = C \cdot \varepsilon \cdot |D|, \end{aligned}$$

поэтому при $d_T \rightarrow 0$ разность $|S_T - S_T^*| \rightarrow 0$, т.е. пределы интегральных сумм

S_T и S_T^* совпадают:

$$\lim_{d_T \rightarrow 0} S_T = \lim_{d_T \rightarrow 0} S_T^* = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + g_x'^2 + g_y'^2} dx dy.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

ПРИМЕР 1. Вычислить поверхностный интеграл I-го рода:

$$I = \iint_{\Omega} (x + y) d\Omega, \text{ где } \Omega - \text{часть плоскости } 2x + 5y + z = 10, \text{ лежащая в первом}$$

октанте (рис. 3).

Поверхность Ω задана уравнением: $z = 10 - 2x - 5y$, откуда $z'_x = -2$,

$z'_y = -5$, и $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$. Следовательно, по формуле (3)

$$I = \iint_{\Omega} (x + y) d\Omega = \iint_D (x + y) \cdot \sqrt{30} \cdot dx dy, \text{ где } D - \text{треугольник с вершинами в}$$

точках $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 2)$ плоскости OXY . Вычисляя двойной интеграл, получаем:

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{30} \cdot \int_0^5 dx \int_0^{2-\frac{2x}{5}} (x+y) dy = \sqrt{30} \cdot \int_0^5 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \bigg|_0^{2-\frac{2x}{5}} \cdot dx = \\
 &= \sqrt{30} \cdot \int_0^5 \left(2 + \frac{6x}{5} - \frac{8x^2}{25} \right) dx = \frac{35}{3} \cdot \sqrt{30}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

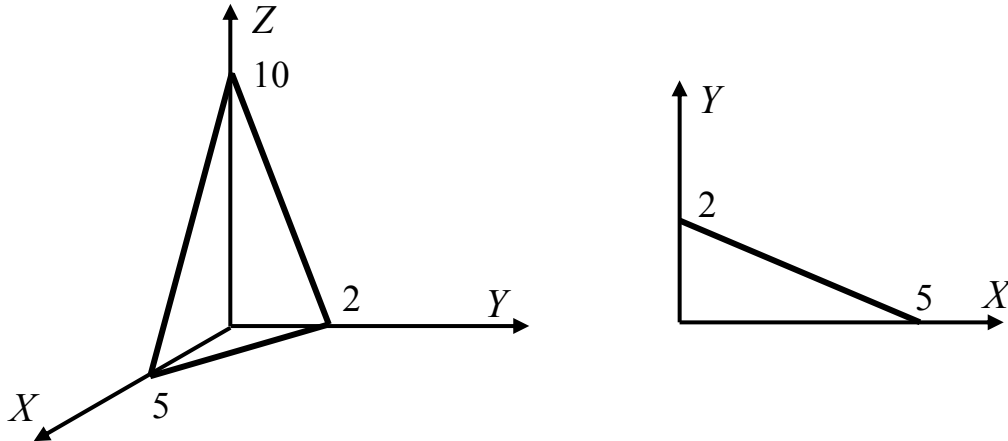


Рис. 3. К примеру 1.

ПРИМЕР 2. Найти поверхностный интеграл I-го рода: $I = \iint_{\Omega} xy \, d\Omega$, где Ω

– часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, расположенная внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 9$ и в первом октанте (рис. 4).

Поверхность задается уравнением: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Тогда имеем част-

ные производные: $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$. Отсюда

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

Подставляя найденные значения в формулу (3), получаем:

$$I = \iint_{\Omega} xy \cdot d\Omega = \iint_D \frac{5xy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

где область D в плоскости OXY – четверть окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

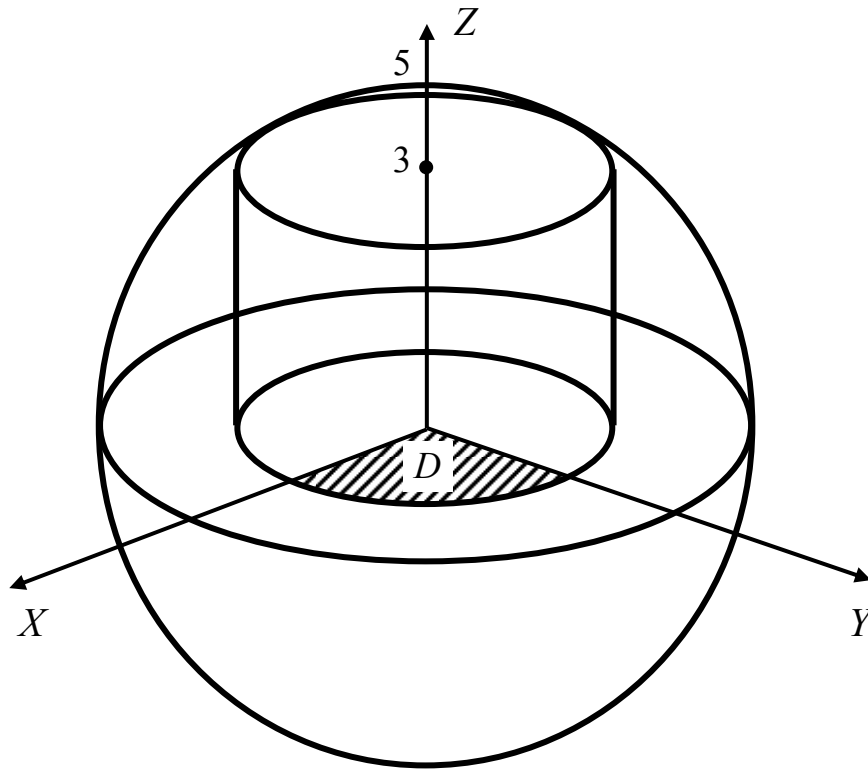


Рис. 4. К примеру 2.

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned}
 I &= 5 \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^3 \frac{r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi}{\sqrt{25-r^2}} \cdot r dr = 5 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \int_0^3 \frac{r^3 dr}{\sqrt{25-r^2}} = \\
 &= -\frac{5}{4} \cdot \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^3 \frac{r^2 dr^2}{\sqrt{25-r^2}} = \\
 &= \frac{5}{4} \cdot \left(-50 \cdot \sqrt{25-r^2} + \frac{2}{3} \cdot (25-r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^3 = \frac{35}{3}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Замечание. Интегральная сумма (1) для функции $f(M) \equiv 1$ равна площади поверхности Ω . Таким образом, площадь поверхности можно найти с помощью поверхностного интеграла I-го рода:

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} d\Omega. \quad (6)$$

ПРИМЕР 3. Вычислить площадь части параболоида $z = 5 - x^2 - y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 1$ (рис. 5).

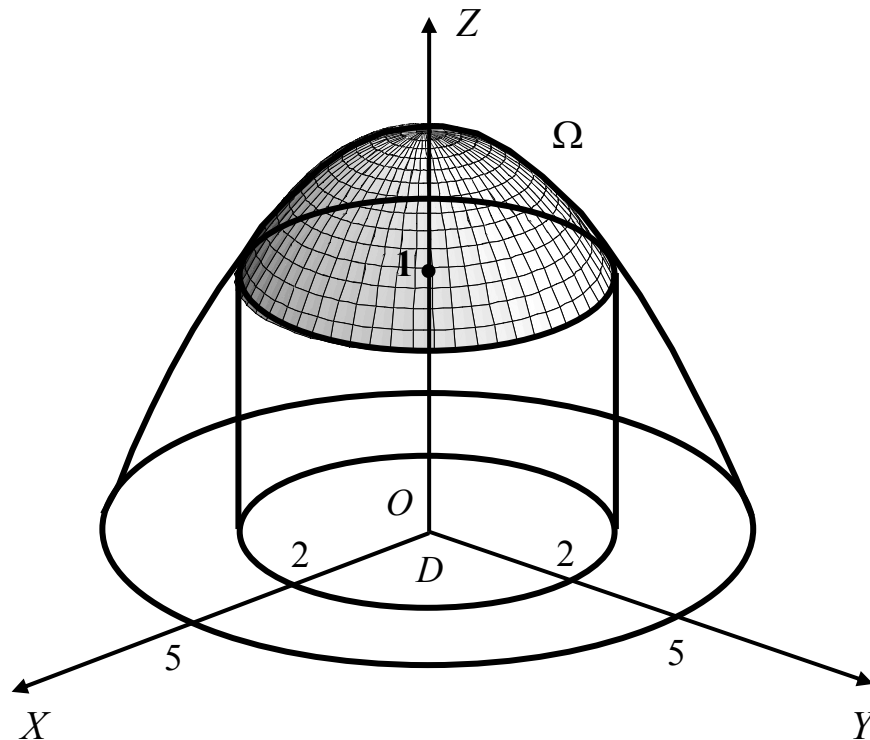


Рис. 5. К примеру 3.

В этом примере $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, и $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.

Тогда по формуле (6) получаем: $|\Omega| = \iint_{\Omega} d\Omega = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot dx dy$, где D –

круг в плоскости OXY радиуса 2 с центром в начале координат. Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot dr^2 = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left((1 + 4r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \right) \bigg|_0^2 = \frac{\pi}{6} \cdot (17\sqrt{17} - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Вычислить площадь части верхней полусферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z > 0$, лежащей внутри цилиндра $5x = x^2 + y^2$ (рис. 6).

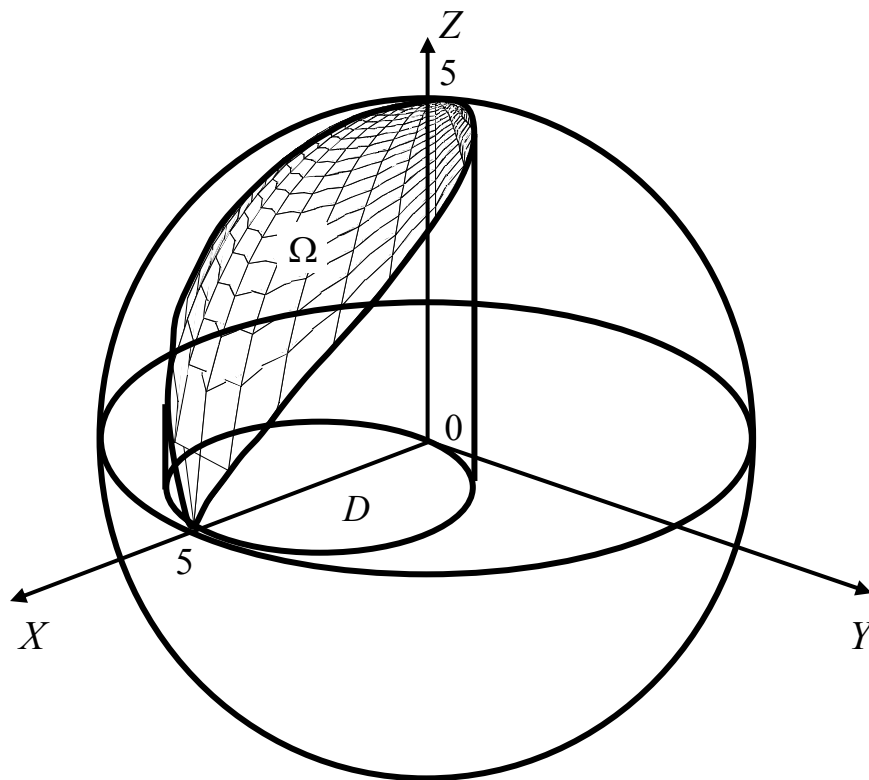


Рис. 6. К примеру 4.

Пользуясь вычислениями примера 2, запишем:

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} d\Omega = \iint_D \frac{5dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}},$$

где D – окружность в плоскости OXY с радиусом $5/2$ и центром в точке $(5/2, 0)$, (рис. 7).

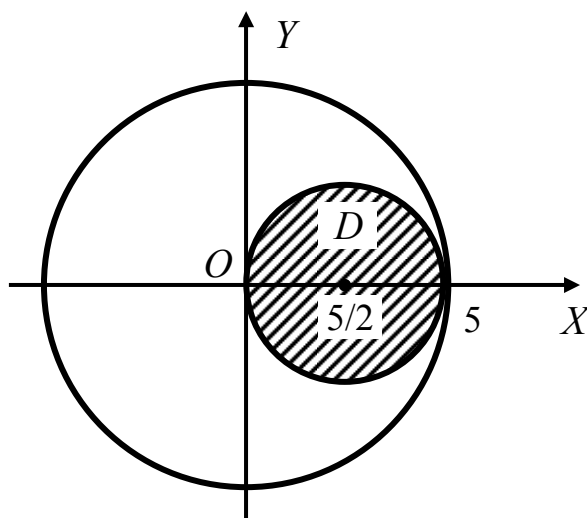


Рис. 7. К примеру 4.

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\begin{aligned}
 |\Omega| &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{5\cos\varphi} \frac{5rdr}{\sqrt{25-r^2}} = -10 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{25-r^2} \Big|_0^{5\cos\varphi} \cdot d\varphi = \\
 &= -10 \cdot \int_0^{\pi/2} (5\sin\varphi - 5) d\varphi = 50 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Замечание. В пункте 4.4 главы 4 отмечалось, что если поверхность Ω задана на ограниченной области Δ в плоскости переменных (u, v) параметрическими соотношениями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

то ее площадь может быть найдена по формуле:

$$|\Omega| = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

где $E = \varphi_u'^2 + \psi_u'^2 + \chi_u'^2$, $G = \varphi_v'^2 + \psi_v'^2 + \chi_v'^2$, $F = \varphi_u'\varphi_v' + \psi_u'\psi_v' + \chi_u'\chi_v'$ — *гауссовские коэффициенты* поверхности Ω .

Используя этот факт, можно получить формулу для вычисления поверхностного интеграла I-го рода и в случае параметрического задания поверхности. Соответствующее утверждение доказывается аналогично теореме 2:

Теорема 3. Пусть Ω — гладкая поверхность, заданная уравнениями: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, где $(u, v) \in \Delta$, причем соответствие между областями Ω и Δ взаимно-однозначно. Тогда если функция $f(M)$ определена и непрерывна на поверхности Ω , то справедливо равенство:

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (7)$$

ПРИМЕР 5. Пусть по поверхности Ω сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Найти массу сферы Ω .

Разобьем поверхность Ω на части Ω_k столь мелкие, что в пределах каждой из них плотность можно считать постоянной. Выберем в каждой части Ω_k по произвольной точке M_k . Тогда масса поверхности приближенно равна значению

$$m(\Omega) \approx \sum_{k=1}^n \rho(M_k) \cdot |\Omega_k| = S_T,$$

и представляет собой интегральную сумму поверхностного интеграла I-го рода от функции $\rho(M)$ по поверхности Ω . Чем меньше части разбиения, тем точнее получается формула. В пределе для массы поверхности получаем:

$$m(\Omega) = \lim_{dT \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(M_k) \cdot |\Omega_k| = \iint_{\Omega} \rho(M) d\Omega.$$

Введем сферические координаты:

$$x = R \cos \theta \cos \varphi, \quad y = R \cos \theta \sin \varphi, \quad z = R \sin \theta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'_{\theta} &= -R \sin \theta \cos \varphi, & x'_{\varphi} &= -R \cos \theta \sin \varphi, \\ y'_{\theta} &= -R \sin \theta \sin \varphi, & y'_{\varphi} &= R \cos \theta \cos \varphi, \\ z'_{\theta} &= R \cos \theta, & z'_{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Найдем гауссовские коэффициенты поверхности Ω :

$$\begin{aligned} E &= R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta = R^2, \\ G &= R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi = R^2 \cos^2 \theta, \\ F &= R^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi - R^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + R \cos \theta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (7) получаем искомую массу поверхности сферы:

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \theta \cdot \sqrt{R^2 \cdot R^2 \cos^2 \theta - 0} d\theta = \\ &= 2\pi R^3 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \pi^2 R^3. \blacksquare \end{aligned}$$

7.2. Ориентация поверхности.

Односторонние и двусторонние поверхности. Сторона поверхности.

Рассмотрим полоску бумаги $ABCD$ (рис.8а). Пусть одна сторона этой полосы – белая, а другая – заштрихована. Стороны AB и CD можно склеить двумя способами: так, чтобы точка A совпала с точкой D , а точка B с точкой C (при этом получается кольцо, рис.8б) или же так, чтобы точка A совпала с точкой C , а точка B – с точкой D (при этом получается так называемый «лист Мёбиуса», изображенный на рис.8в).

Точку, лежащую на внешней (заштрихованной) стороне кольца (рис.8б) нельзя соединить с точкой, лежащей на внутренней (белой) стороне непрерывной кривой, не пересекающей границу кольца (граница кольца получилась из отрезков BC и AD полосы бумаги). Можно сказать иначе: если мы будем закрашивать, допустим, внешнюю сторону кольца в красный цвет, двигаясь от линии склейки $AB - CD$ вправо кистью толщиной, равной ширине полосы бумаги, то мы вернемся к линии склейки, полностью закрасив внешнюю сторону кольца. Продолжив движение, мы станем покрывать эту же сторону вторым слоем краски, а внутренняя, белая сторона кольца в красный цвет не окрасится.

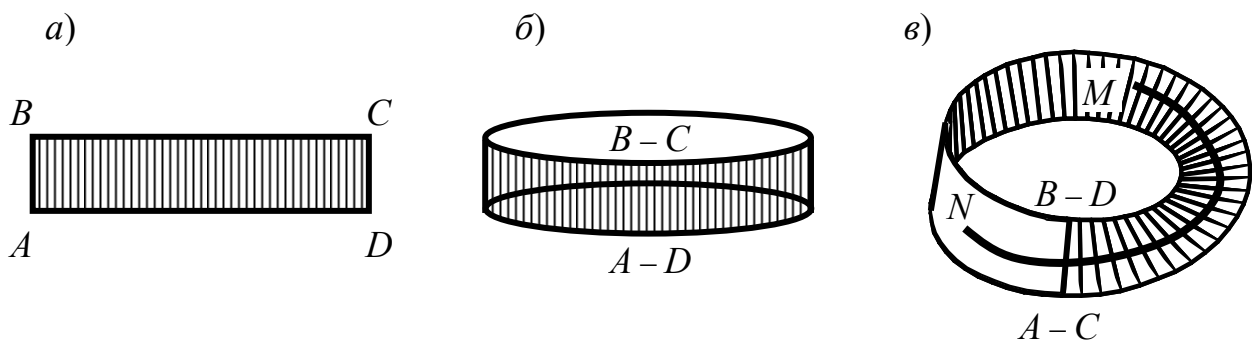


Рис.8. (а) полоса бумаги; (б) склеенное из нее кольцо; (в) лист Мёбиуса.

Иначе обстоит дело с листом Мёбиуса. Взяв произвольную точку N на белой стороне листа, мы можем соединить ее с произвольной точкой M на за-

штрихованной стороне непрерывной кривой, не пересекающей границы (рис.8с). Если же мы будем окрашивать лист Мёбиуса, двигаясь от линии склейки вправо, мы окрасим его весь – и белая, и заштрихованная сторона станут красными. (Попробуйте склеить лист Мёбиуса и убедитесь в этом сами).

Рассмотренная задача о склейке бумажной полосы позволяет сделать вывод: бывают поверхности односторонние (как лист Мёбиуса) и двусторонние (как кольцо). Для двусторонних поверхностей естественно связать сторону поверхности с направлением нормали к этой поверхности. В каждой точке поверхности (например, сферы) нормаль, проведенная к поверхности, имеет два направления. Выбрав одно из них, мы выберем и соответствующую сторону поверхности. Например, для сферы: с нормалью, направленной к центру сферы, мы свяжем внутреннюю сторону сферы, а с нормалью, направленной от центра, свяжем внешнюю сторону.

Дадим теперь строгие определения. Гладкую поверхность будем называть **двусторонней**, если обход *по любому* замкнутому контуру, лежащему на поверхности и не имеющему общих точек с ее границей, *не меняет направления нормали* к поверхности. Поверхность называется **односторонней**, если *существует* замкнутый контур с указанными свойствами, при движении по которому *нормаль меняет направление* (на рис. 8с при движении по средней линии полосы из точки N в точку N нормаль из внешней становится внутренней).

Пусть точка M лежит на **двусторонней** поверхности. Выберем направление вектора нормали в этой точке. Пусть N – любая другая точка той же поверхности. Соединим точки M и N гладкой кривой γ и переместим вектор нормали из точки M в точку N вдоль кривой γ так, чтобы во время движения он оставался перпендикулярным поверхности, а его направление менялось непрерывно. В результате будет задано направление нормали в точке N . Двигаясь от точки M к точке N по любой другой кривой γ , нельзя получить иное направления нормали в точке N . Действительно, в противном случае при движе-

нии от точки M к точке N по кривой γ и обратно по кривой γ' , мы получили бы замкнутый контур, при движении вдоль которого нормаль меняет направление, что невозможно в силу предположения о двусторонности поверхности. Таким образом, можно считать, что всем точкам двусторонней поверхности приписано определенное направление нормали.

Определение 1. Совокупность всех точек поверхности с приписанными к ним нормалью, непрерывно изменяющимися от точки к точке, называется *определенной стороной* поверхности. Если изменить направления нормалей во всех точках на противоположные, и приписать каждой точке это новое направление нормали, будет получена вторая сторона поверхности.

ПРИМЕР 1. Пусть функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные, а поверхность Ω задается уравнением: $F(x, y, z) = 0$. Тогда вектор

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \quad (1)$$

задает нормаль к поверхности. Эта поверхность имеет две стороны, и сторона поверхности определяется либо самим вектором $\text{grad } F$, либо противоположным ему вектором $(-\text{grad } F)$. ■

ПРИМЕР 2. Пусть поверхность Ω задана уравнением: $f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, причем функция $g(x, y)$ определена на ограниченной области D плоскости OXY , непрерывна на ней и имеет непрерывные частные производные первого порядка. Если при этом соответствие между точками области D и точками поверхности Ω взаимно однозначно, то поверхность Ω будет являться *двусторонней*. Одна из сторон поверхности будет иметь нормаль с направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}} = \frac{-\partial g / \partial x}{\sqrt{(\partial g / \partial x)^2 + (\partial g / \partial y)^2 + 1}},$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}} = \frac{-\partial g / \partial y}{\sqrt{(\partial g / \partial x)^2 + (\partial g / \partial y)^2 + 1}}, \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\partial g / \partial x)^2 + (\partial g / \partial y)^2 + 1}}.\end{aligned}\quad (2)$$

Другая сторона поверхности имеет нормаль с направляющими косинусами противоположного знака. ■

ПРИМЕР 3. Рассмотрим гладкую поверхность Ω , заданную параметрически на ограниченной области Δ в плоскости переменных (u, v) соотношениями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v). \quad (3)$$

Предположим, что эти функции непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и задают взаимно-однозначное соответствие между точками области Δ и поверхности Ω , а ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} \text{ равен } 2.$$

В этом случае поверхность Ω также *двусторонняя*. Одна из ее сторон задается нормалью с направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (4)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} \psi'_u & \chi'_u \\ \psi'_v & \chi'_v \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} \varphi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \chi'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Положительное направление обхода замкнутого контура. Ориентация поверхности.

Рассмотрим замкнутый контур, лежащий на выбранной стороне некоторой двусторонней поверхности. Зададим на этом контуре положительное направле-

ние обхода по следующему правилу. Будем считать, что наблюдатель, находящийся на выбранной стороне поверхности (это означает, что нормаль к поверхности направлена от его ног к голове) движется по контуру **в положительном направлении**, если он движется **против часовой стрелки**, т.е. область, ограниченная контуром, остается от него слева (рис. 9).

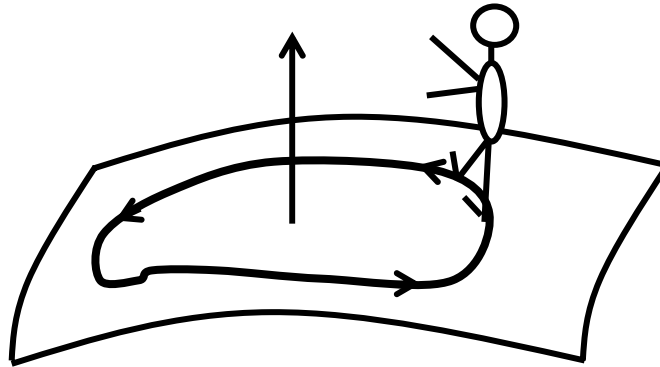


Рис. 9. К определению положительного направления обхода на замкнутом контуре.

Отметим, что для замкнутой (т.е. не имеющей границы) поверхности (например, сферы) сформулированное выше правило не работает: в этом случае любой замкнутый контур ограничивает сразу две области (экватор Земли, например, ограничивает и северное полушарие, и южное). В подобных случаях для задания положительного направления на контуре приходится оговаривать, границей какой именно области будет считаться этот контур.

С учетом сделанного уточнения, можно сказать, что, если на двусторонней поверхности выбрана определенная сторона, то положительное направление на любом замкнутом контуре определяется однозначно. Легко видеть, что верно и обратное: если для некоторого замкнутого контура на поверхности выбрано положительное направление обхода, то тем самым задана сторона поверхности.

Определение 2. Если на двусторонней поверхности выбрана определенная сторона (определяющая положительное направление обхода по замкнутому контуру, лежащему на поверхности), или же задано положительное направление обхода по замкнутому контуру, лежащему на поверхности (и, тем

самым, определена сторона поверхности), то говорят, что на поверхности *задана ориентация*.

Замечание 1. Выбор в качестве положительного направления обхода контура против часовой стрелки связан с преимущественным использованием нами правоориентированной системы координат (см. рис. 10, а также главу 5 выпуска 2 настоящего пособия, в которой вводилось понятие векторного произведения векторов).

Замечание 2. Понятия двусторонней поверхности и ориентации на поверхности определены только для случая гладких поверхностей и не могут быть использованы, если условия гладкости (см. п.5.1 главы 5) нарушены.

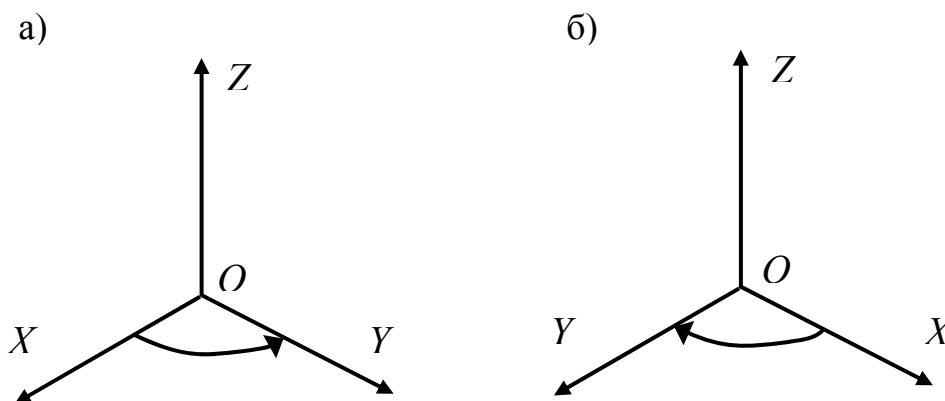


Рис.10. (а) Правая ориентация; (б) Левая ориентация.

Замечание 3. Пусть теперь кусочно-гладкая поверхность Ω состоит из гладких частей Ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (рис. 11). Границы этих частей есть замкнутые контуры. Пусть каждая из поверхностей Ω_k двусторонняя. Выберем ориентацию на поверхности Ω_1 и зададим положительное направление обхода на контуре, ограничивающем Ω_1 . На всех поверхностях Ω_k , граничащих с Ω_1 , выберем ориентацию таким образом, чтобы определяемое ею положительное направление обхода границы Ω_k было противоположно положительному направлению обхода границы области Ω_1 . Далее аналогично задаем ориентацию на

частях, граничащих с частями Ω_k и т.д. Если возможно задать ориентацию на всех частях Ω_k так, что положительные направления обхода общих границ смежных участков поверхности противоположны (рис.11), то говорят, что *кусочно-гладкая поверхность является двусторонней и на ней задана ориентация*.

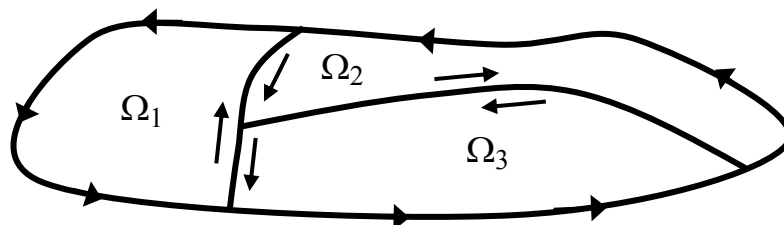


Рис.11. Ориентация кусочно-гладкой поверхности.

7.3. Поверхностный интеграл II-го рода.

Поверхностный интеграл II-го рода определяется только для двусторонних поверхностей с заданной на них ориентацией.

Определение поверхностного интеграла II-го рода.

Пусть на гладкой двусторонней поверхности Ω выбрана некоторая сторона, в каждой точке M которой определено направление нормали $\vec{n}(M)$. Построим разбиение T поверхности Ω на части $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ с помощью произвольных кусочно-гладких кривых, как это делалось в п.7.1. В каждой из этих частей Ω_k выберем по произвольной точке M_k с координатами (ξ_k, η_k, ζ_k) . При введении поверхностного интеграла I-го рода интегральная сумма определялась как сумма произведений значений функции f в точке M_k на площади частей Ω_k . При определении поверхностного интеграла II-го рода значения функции в точке M_k умножаются не на площадь частей Ω_k , а на площади проекций этих частей на одну из координатных плоскостей, взятые с определенным знаком, зависящим от ориентации поверхности Ω .

Пусть поверхность Ω задается уравнением $z = g(x, y)$, причем функция $z = g(x, y)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в примере 2 п.7.2.

Обозначим через D_k проекции частей Ω_k на плоскость OXY . В интегральную сумму будем включать площадь $|D_k|$ области D_k со знаком «+», если направление нормали к части Ω_k образует с положительным направлением оси OZ острый угол (т.е. если выбранная сторона поверхности – верхняя), и со знаком «–», если этот угол тупой (т.е. выбранная сторона поверхности – нижняя).

Таким образом, для верхней стороны поверхности интегральная сумма записывается в виде:

$$S_T = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |D_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|, \quad (1)$$

а интегральная сумма для нижней стороны поверхности отличается знаком.

Условимся обозначать верхнюю сторону поверхности Ω символом Ω^+ , а нижнюю – символом Ω^- .

Определение 1. Пусть существует предел интегральных сумм (1) при бесконечном увеличении количества частей Ω_k разбиения поверхности Ω и бесконечном уменьшении диаметров разбиения d_T , причем этот предел не зависит ни от способа разбиения поверхности Ω , ни от выбора точек M_k на частях Ω_k . Тогда этот предел называется поверхностным интегралом второго рода от функции f по верхней стороне поверхности Ω и обозначается:

$$\iint_{\Omega^+} f(M) dx dy = \iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy = \lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|. \quad (2)$$

Поверхностный интеграл по нижней стороне поверхности отличается знаком:

$$\iint_{\Omega^-} f(x, y, z) dx dy = - \iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy = - \lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|. \quad (2')$$

Здесь символ $dx dy$ под знаком интеграла указывает на то, что проектирование частей Ω_k проводилось на плоскость OXY .

Аналогичным образом поверхностный интеграл II-го рода определяется и для случая произвольной поверхности (не обязательно задаваемой уравнением $z = g(x, y)$). Интегральные суммы при этом строятся аналогично выражению (1) с единственным отличием – в них могут входить площади с разными знаками (рис. 12). Если некоторая часть Ω_k разбиения проектируется в кривую (как, например, цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси OZ , проектируется в свою направляющую), будем считать, что площадь проекции $|D_k|$ равна нулю и соответствующее слагаемое в интегральной сумме отсутствует. Также пренебрежем в интегральных суммах слагаемыми, для которых у части точек поверхностей Ω_k нормаль образует острый угол с положительным направлением оси OZ , а у части – тупой. Это допущение законно, поскольку при предельном переходе вклад таких слагаемых в интегральную сумму мал.

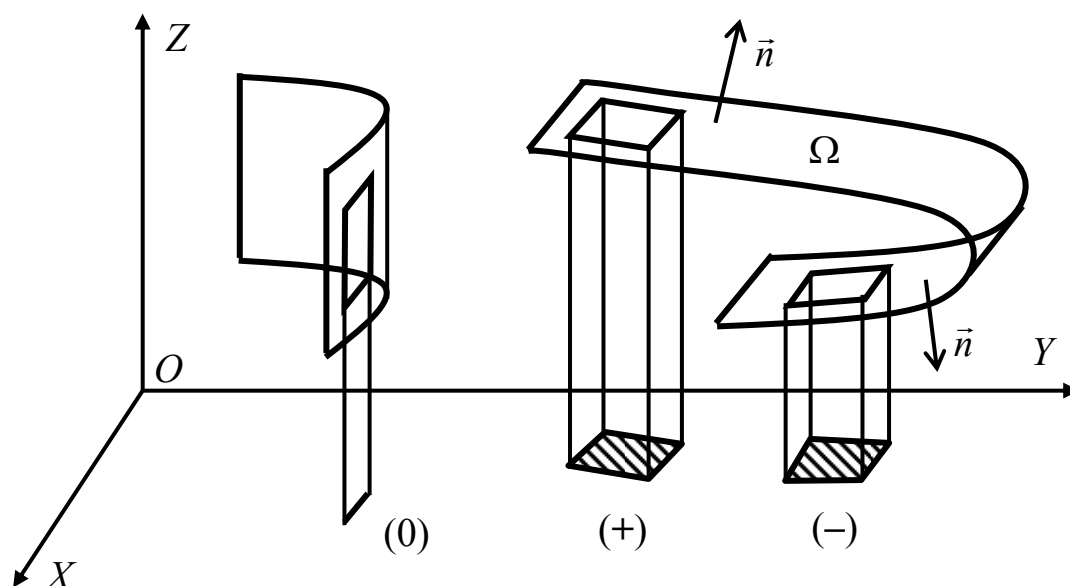


Рис.12. К определению поверхностного интеграла II-го рода.

Если вместо плоскости OXY части разбиения Ω_k проектировать на плоскость OXZ или на плоскость OYZ , то возникнут поверхностные интегралы II-го рода, которые принято обозначать $\iint_{\Omega^{\pm}} f(x, y, z) dx dz$ и $\iint_{\Omega^{\pm}} f(x, y, z) dy dz$, соответственно. Причем использование в интегралах Ω^+ или Ω^- зависит от выбора той или иной стороны поверхности Ω , которые, в свою очередь, теперь определяются углом между направлением нормали и положительным направлением оси OY или оси OX .

В приложениях чаще всего встречаются соединения интегралов всех трех видов:

$$\iint_{\Omega^{\pm}} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy, \quad (3)$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывные функции, заданные на поверхности Ω .

Для удобства можно считать, что на поверхности Ω задана векторная функция

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)). \quad (4)$$

Тогда, как и в случае поверхностных интегралов I-го рода, верна теорема:

Теорема 1. Если Ω – кусочно-гладкая поверхность и векторная функция $\vec{F}(x, y, z)$ имеет непрерывные на Ω компоненты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, то поверхностный интеграл II-го рода (3) существует и определен однозначно.

**Выражение поверхностного интеграла II-го рода через
поверхностный интеграл I-го рода.**

Выразим сначала через поверхностный интеграл I-го рода интеграл (2). Пусть выбранная в точке M нормаль $\vec{n}(M)$ к поверхности имеет направляющие косинусы $(\cos \alpha(M), \cos \beta(M), \cos \gamma(M))$.

Рассмотрим часть Ω_k поверхности и произвольную точку M_k на ней. Пусть D_k – проекция Ω_k на плоскость OXY . Проведем касательную плоскость к поверхности Ω в точке M_k (рис. 13) и рассмотрим площадку ω_k , которая вырезается на касательной плоскости цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси OZ , и направляющей – границей области D_k (при этом и площадка ω_k и часть поверхности Ω_k имеют область D_k в качестве своей проекции на плоскость OXY).

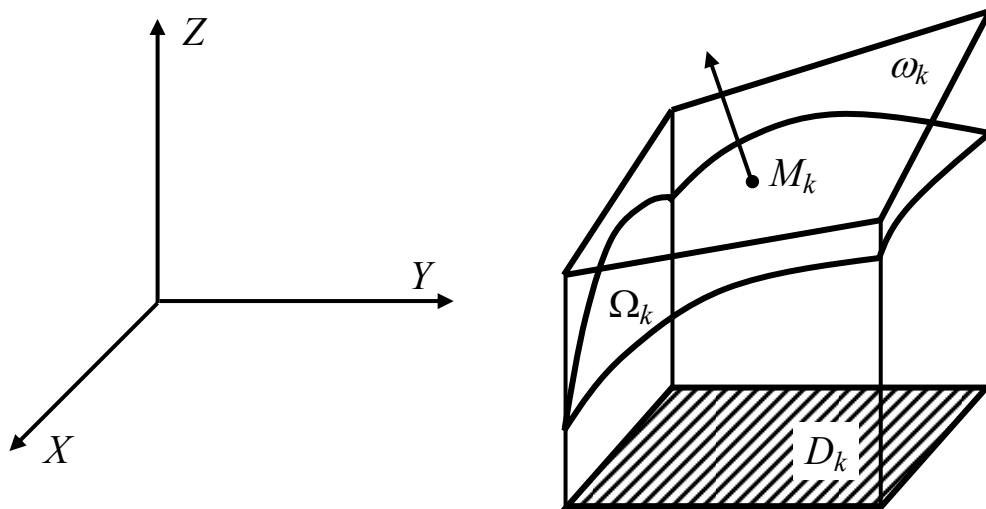


Рис.13. К выводу формулы (6) .

В п.4.4 главы 4 было показано, что площади ω_k и D_k связаны друг с другом соотношением: $|D_k| = |\omega_k| \cdot \cos \gamma(M_k)$. Подставляя это соотношение в интегральную сумму (1), получаем:

$$\begin{aligned}
S_T &= \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |D_k| = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |\omega_k| \cdot \cos \gamma(M_k) \approx \\
&\approx \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |\Omega_k| \cdot \cos \gamma(M_k).
\end{aligned} \tag{5}$$

(Последнее равенство справедливо при $d_T \rightarrow 0$).

Сравнивая интегральную сумму (5) с выражением (1) п.7.1 для интегральной суммы поверхностного интеграла I-го рода, получим при переходе к пределу при $d_T \rightarrow 0$:

$$\iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y, z) \cdot \cos \gamma(x, y, z) d\Omega. \tag{6}$$

Аналогичные зависимости можно получить, проектируя поверхность Ω_k на плоскости OXZ и OYZ . Объединяя получаемые при этом формулы, можно записать:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\
&= \iint_{\Omega^+} P(x, y, z) \cdot \cos \alpha(x, y, z) d\Omega + Q(x, y, z) \cdot \cos \beta(x, y, z) d\Omega + \\
&\quad + R(x, y, z) \cdot \cos \gamma(x, y, z) d\Omega = \\
&= \iint_{\Omega} (\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)) d\Omega = \iint_{\Omega} (\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega.
\end{aligned} \tag{7}$$

(Под знаком последнего интеграла в (7) стоит скалярное произведение векторов $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ и $\vec{n}(M) = (\cos \alpha(M), \cos \beta(M), \cos \gamma(M))$).

ПРИМЕР 1. Найти интеграл $\iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy$, где $f(M)$ – произвольная

непрерывная функция, определенная на поверхности Ω , представляющей собой часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ и направляющей – некоторой кусочно-гладкой кривой на плоскости OXY .

Поскольку нормаль $\vec{n}(M)$ к поверхности Ω параллельна плоскости OXY , т.е. угол между нормалью и положительным направлением оси OZ прямой, имеем $\cos \gamma(x, y, z) = 0$. Следовательно, по формуле (6) получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Omega} f(x, y, z) \cdot \cos \gamma(x, y, z) d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega} f(x, y, z) \cdot 0 \cdot d\Omega = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

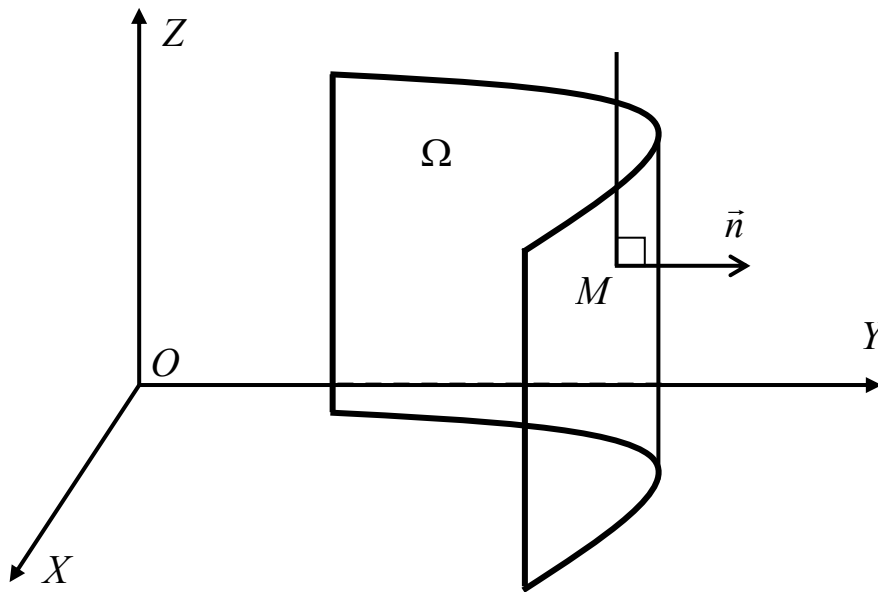


Рис.14. К примеру 1.

Замечание. Интеграл (3) носит название *потока вектора* $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ через поверхность Ω в сторону единичного вектором нормали $\vec{n}(M)$. Такое название связано со следующей гидродинамической задачей.

Пусть пространство заполнено жидкостью, скорость которой в точке M задается вектором $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$. Вычислим количество Q жидкости, протекающей за единицу времени через ориентированную поверхность Ω в заданном направлении (рис. 15).

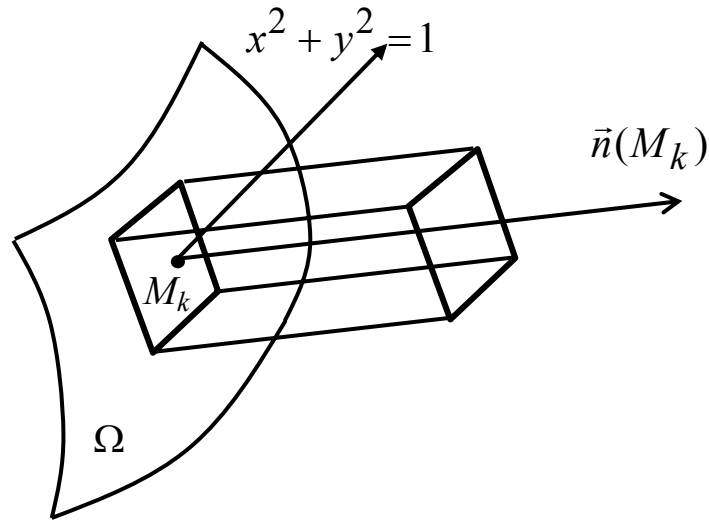


Рис.15. К определению потока жидкости через поверхность.

Зададим разбиение T поверхности Ω с помощью множества произвольных кусочно-гладких кривых на элементарные части $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ (рис. 15) и выберем по точке $M_k, (k = 1, 2, \dots, n)$ в каждой из этих частей.

Проекция вектора скорости на единичную нормаль к поверхности равно скалярному произведению $\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)$. Тогда количество жидкости, протекающее за единицу времени через площадку Ω_k , определяется выражением $Q_k = (\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)) \cdot |\Omega_k|$ (рис. 15). Суммируя количество протекающей жидкости по всем площадкам Ω_k , получаем интегральную сумму для интеграла (3):

$$Q = \sum_{k=1}^n Q_k = \sum_{k=1}^n (\vec{F}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \cdot |\Omega_k|.$$

Переходя теперь к пределу при $d_T \rightarrow 0$ получаем, что количество жидкости, проходящее за единицу времени через всю поверхность определяется интегралом:

$$Q = \iint_{\Omega} (\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)) d\Omega = \iint_{\Omega} (\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega.$$

Выражение поверхностного интеграла II-го рода через двойной интеграл.

Пусть поверхность Ω задается уравнением $z = g(x, y)$, где функция $g(x, y)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в примере 2 п.7.2, т.е. определена на ограниченной области D плоскости OXY , непрерывна на ней и имеет непрерывные частные производные первого порядка. Зададим, как и выше, разбиение T поверхности Ω , а проекции частей Ω_k на плоскость OXY обозначим через D_k . Запишем интегральную сумму для поверхностного интеграла II-го рода от функции $f(M)$, заданной на поверхности. Для верхней стороны поверхности интегральная сумма имеет вид:

$$S_T = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |D_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot |D_k|. \quad (8)$$

Учитывая, что точка M_k лежит на поверхности, т.е. $\zeta_k = g(\xi_k, \eta_k)$, равенство (8) можно переписать в виде:

$$S_T = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot |D_k| = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, g(\xi_k, \eta_k)) \cdot |D_k|,$$

что представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла:

$\iint_D f(x, y, g(x, y)) dx dy$. Переходя к пределу при $d_T \rightarrow 0$, получаем:

$$\iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy = \iint_D f(x, y, g(x, y)) dx dy. \quad (9)$$

Для нижней стороны поверхности в силу формулы (2') получаем:

$$\iint_{\Omega^-} f(x, y, z) dx dy = - \iint_D f(x, y, g(x, y)) dx dy. \quad (9')$$

Аналогичные формулы могут быть записаны и для интегралов $\iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dz$ и $\iint_{\Omega^+} f(x, y, z) dy dz$.

ПРИМЕР 2 . Найти поверхностный интеграл II-го рода $\iint_{\Omega^-} z dx dy$ по

внутренней стороне верхней полусферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Поверхность Ω (рис. 16) проектируется в круг D , задаваемый на плоскости OXY неравенством $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$. Нормаль к внутренней части полусферы образует с положительным направлением оси OZ тупой угол, поэтому поверхность интегрирования обозначается через Ω^- . Используя формулы (3) и (9), получаем:

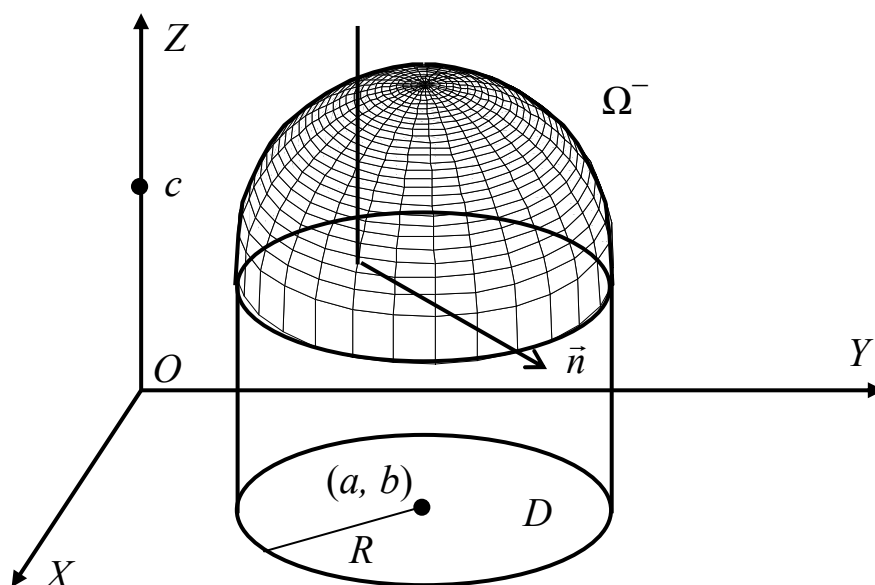


Рис.16. К примеру 2.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^-} z dx dy &= - \iint_D \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = -\frac{2}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

(В последнем преобразовании была выполнена замена переменных $x-a = r \cos \varphi$, $y-b = r \sin \varphi$). ■

Пусть теперь поверхность Ω задана параметрически на ограниченной области Δ в плоскости переменных (u, v) функциями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

причем эти функции удовлетворяют условиям из примера 3 п.7.2.

Обозначим через $\tilde{\Omega}^+$ сторону поверхности, определяемую нормалью с направляющими косинусами (см. формулы (4) и (5) из п.7.2)

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\text{где } A = \begin{vmatrix} \psi'_u & \chi'_u \\ \psi'_v & \chi'_v \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} \varphi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \chi'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}.$$

Можно доказать, что в этом случае поверхностный интеграл (7) выражается через двойной интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{\Omega}^+} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = \iint_{\Delta} (PA + QB + RC) dudv, \end{aligned} \quad (10)$$

а для противоположной стороны поверхности $\tilde{\Omega}^-$

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{\Omega}^-} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = - \iint_{\Delta} (PA + QB + RC) dudv. \end{aligned} \quad (10')$$

ПРИМЕР 3. Найти поток вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности, заданной параметрически:

$$x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \quad y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \quad z = c \sin u,$$

где $0 < c < b < a$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$ (рис. 17).

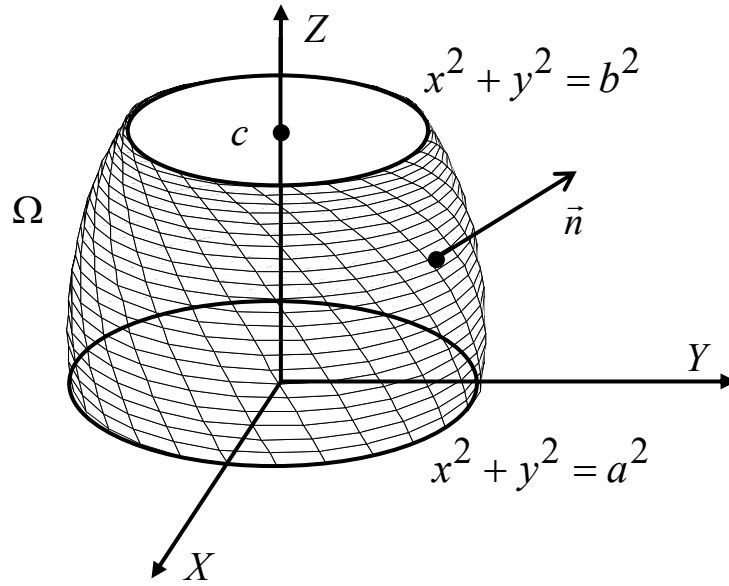


Рис.17. К примеру 3.

Поверхность Ω ограничена снизу окружностью $x^2 + y^2 = a^2$ в плоскости OXY , а сверху – окружностью $x^2 + y^2 = b^2$, лежащей в плоскости $z = c$. Нормаль к поверхности образует с положительным направлением оси OZ острый угол, т.е. $\cos \gamma > 0$. Вычислим коэффициенты A, B, C , представляющие собой миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v + b \cos u \sin v & -a \sin u \sin v - b \cos u \cos v & c \cos u \\ -a \cos u \sin v + b \sin u \cos v & a \cos u \cos v + b \sin u \sin v & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A = -c \cos u \cdot x(u, v)$, $B = -c \cos u \cdot y(u, v)$, $C = (b^2 - a^2) \cdot c \cos u \cdot \sin u$.

Заметим, что поскольку значение $C < 0$, то для внешней стороны поверхности поток вектора находится по формуле (10'):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \\ = - \iint_{\Delta} (xA + yB + zC) du dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_{\Delta} \left(-c(x^2 + y^2) \cos u + (b^2 - a^2) \sin u \cos u \cdot z \right) dudv = \\
&= a^2 c \int_0^{\pi/2} \cos u du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi a^2 c. \blacksquare
\end{aligned}$$

7.4. Свойства поверхностных интегралов I и II рода.

Свойства поверхностных интегралов практически идентичны свойствам, сформулированным в главе 6 для криволинейных интегралов.

Теорема. Для поверхностных интегралов I-го и II-го рода справедливы следующие свойства:

❶. Линейность.

$$1a) \quad \iint_{\Omega} (c_1 f_1(M) + c_2 f_2(M)) d\Omega = c_1 \iint_{\Omega} f_1(M) d\Omega + c_2 \iint_{\Omega} f_2(M) d\Omega,$$

$$\begin{aligned}
1б) \quad &\iint_{\Omega} (c_1 \vec{F}_1(M) + c_2 \vec{F}_2(M)) \cdot \vec{n}(M) d\Omega = \\
&= c_1 \iint_{\Omega} (\vec{F}_1(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega + c_2 \iint_{\Omega} (\vec{F}_2(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1в) \quad &\iint_{\Omega^{\pm}} (c_1 f_1(M) + c_2 f_2(M)) dxdy = \\
&= c_1 \iint_{\Omega^{\pm}} f_1(M) dxdy + c_2 \iint_{\Omega^{\pm}} f_2(M) dxdy,
\end{aligned}$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

❷. Аддитивность. Если поверхность Ω составлена из нескольких непересекающихся частей, т.е. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_{\ell}$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, ($i \neq j$), то

$$2a) \quad \iint_{\Omega} f(M) d\Omega = \sum_{k=1}^{\ell} \iint_{\Omega_k} f(M) d\Omega,$$

$$2б) \iint_{\Omega} (\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega = \sum_{k=1}^{\ell} \iint_{\Omega_k} (\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega,$$

и

$$2в) \iint_{\Omega^{\pm}} f(M) dxdy = \sum_{k=1}^{\ell} \iint_{\Omega_k^{\pm}} f(M) dxdy.$$

ПРИМЕР 1. Вычислить поверхностный интеграл I рода: $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega$,

где поверхность Ω состоит из боковой поверхности Ω_1 и основания Ω_2 конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ (рис. 18).

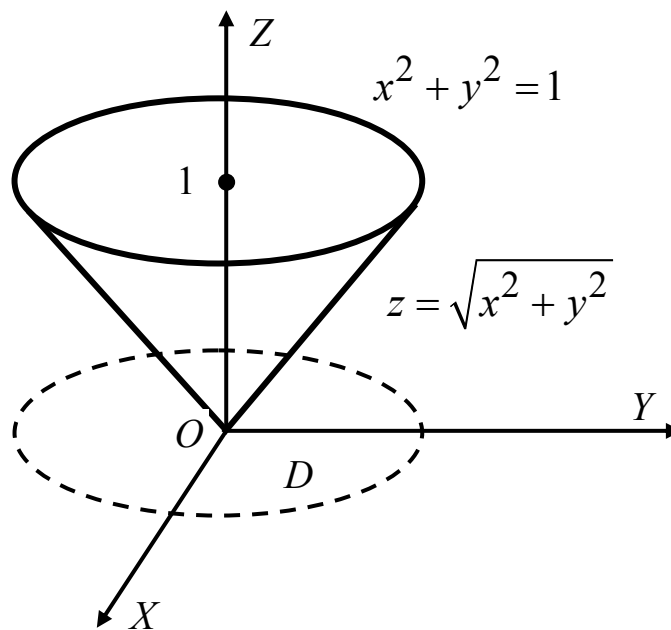


Рис.18. К примеру 1.

Имеем по свойству аддитивности поверхностного интеграла I-го рода:

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega = \iint_{\Omega_1} (x^2 + y^2) d\Omega + \iint_{\Omega_2} (x^2 + y^2) d\Omega.$$

Для основания конуса $d\Omega = dxdy$. Пусть D – круг с границей $x^2 + y^2 = 1$ на плоскости OXY , в который проектируется конус. Тогда, переходя к полярным координатам, получаем

$$\iint_{\Omega_2} (x^2 + y^2) d\Omega = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2},$$

На боковой поверхности конуса имеем

$$d\Omega = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dxdy = \sqrt{2} \cdot dxdy,$$

поэтому

$$\iint_{\Omega_1} (x^2 + y^2) d\Omega = \sqrt{2} \cdot \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Складывая два интеграла, получаем: $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + \sqrt{2})$. ■

ПРИМЕР 2. Вычислить поток вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Используя линейность и аддитивность поверхностного интеграла, можно записать:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\vec{r} \cdot \vec{n}) d\Omega &= \iint_{\Omega_1} (\vec{r} \cdot \vec{n}) d\Omega + \iint_{\Omega_2} (\vec{r} \cdot \vec{n}) d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega_1^+} x dydz + \iint_{\Omega_1^+} y dx dz + \iint_{\Omega_1^+} z dx dy + \iint_{\Omega_2^-} x dydz + \iint_{\Omega_2^-} y dx dz + \iint_{\Omega_2^-} z dx dy, \end{aligned}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности интегрирования, Ω – поверхность сферы, Ω_1 – верхняя полусфера, Ω_2 – нижняя полусфера, Ω_1^+ – внешняя сторона верхней полусферы, Ω_2^- – внешняя сторона нижней полусферы. (Нормаль к внешней стороне *верхней* полусферы образует с положительным направлением

оси OZ острый угол, а нормаль к внешней стороне *нижней* полусферы образует – тупой угол).

Заметим также, что в верхней строке этого равенства стоят поверхностные интегралы I рода, а во второй – поверхностные интегралы II-го рода.

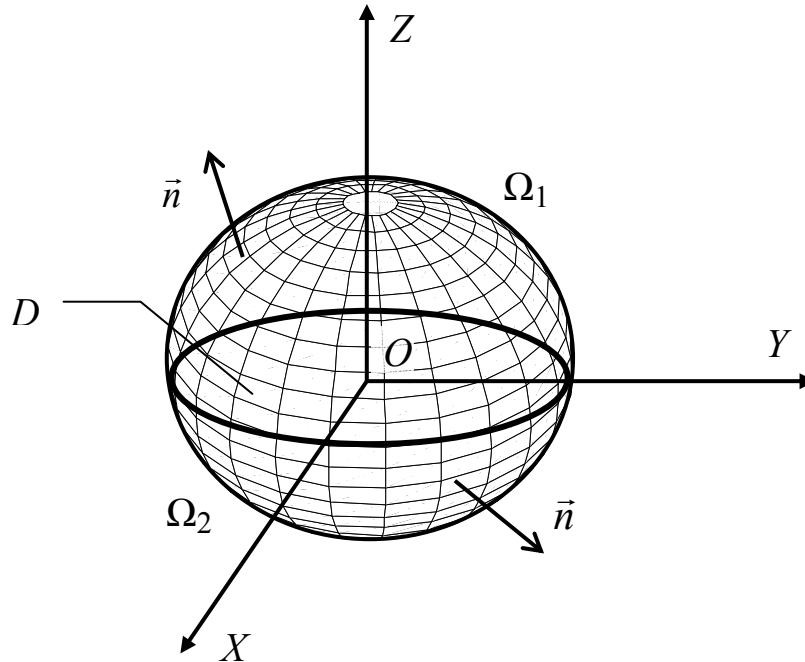


Рис.19. К примеру 2.

Пусть D – проекция сферы на плоскость OXY . На поверхности Ω_1 справедливо соотношение $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а на поверхности Ω_2 – соотношение: $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тогда воспользовавшись формулами (3) и (9), можно записать:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1^+} z dx dy + \iint_{\Omega_2^-} z dx dy &= 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Остальные интегралы вычисляются аналогично. Окончательно получаем искомый поток:

$$\iint_{\Omega} (\vec{r}, \vec{n}) d\Omega = 4\pi R^3. \blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Вычислить поток вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного плоскостями $z = h$ и $z = 0$.

Пусть Ω_1 – верхнее основание цилиндра, Ω_2 – нижнее основание, Ω_3 – боковая поверхность, и, наконец, Ω – вся поверхность, ограничивающая цилиндр. Обозначим через $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_3$ внешние нормали к соответствующим поверхностям.

На поверхности Ω_1 справедливо соотношение $\vec{n}_1 = \vec{k}$, следовательно, радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + h\vec{k}$ точки на поверхности Ω_1 обладает свойством $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = \vec{r} \cdot \vec{k} = np_{OZ}\vec{r} = h$.

На поверхности Ω_2 вектор нормали $\vec{n}_2 = -\vec{k}$, и для радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ на поверхности Ω_2 имеем $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = -\vec{r} \cdot \vec{k} = -np_{OZ}\vec{r} = 0$.

На поверхности Ω_3 вектор нормали $\vec{n}_3$ параллелен плоскости OXY , и для радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ любой точки Ω_3 справедливо равенство $\vec{r} \cdot \vec{n}_3 = np_{\vec{n}_3}\vec{r} = R$.

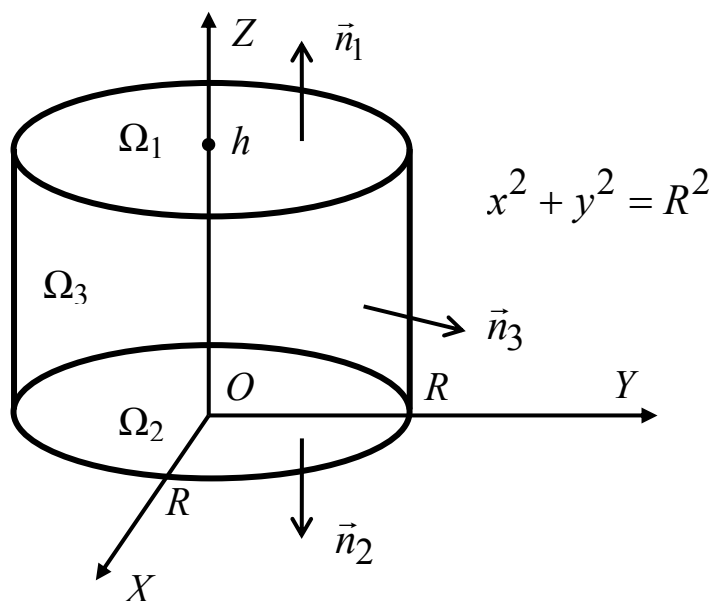


Рис. 20. К примеру 3.

Тогда, используя аддитивность поверхностного интеграла, легко найти искомый поток:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (\vec{r} \cdot \vec{n}) d\Omega &= \iint_{\Omega_1} (\vec{r} \cdot \vec{n}_1) d\Omega + \iint_{\Omega_2} (\vec{r} \cdot \vec{n}_2) d\Omega + \iint_{\Omega_3} (\vec{r} \cdot \vec{n}_3) d\Omega = \\ &= h \iint_{\Omega_1} d\Omega + 0 + R \iint_{\Omega_3} d\Omega = h \cdot \pi R^2 + R \cdot 2\pi R h = 3\pi R^2 h.\end{aligned}$$

(В последней строке использованы известные формулы для площади круга радиуса R и площади поверхности прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты h). ■

7.5. Формула Остроградского.

Формула Остроградского (или, формула Гаусса – Остроградского) является аналогом формулы Грина для случая поверхностных интегралов. Формула Грина связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру с двойным интегралом по области, ограниченной контуром. Аналогично, формула Остроградского связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по телу, ограниченному данной поверхностью.

Рассмотрим сначала случай тела V специального вида, а именно будем считать, что тело ограничено сбоку – цилиндрической поверхностью Ω_3 с образующей, параллельной оси OZ , и направляющей – кусочно-гладкой границей ограниченной области D плоскости OXY ; сверху – поверхностью Ω_1 , задаваемой уравнением $z = g_1(x, y)$; снизу тело V ограничено поверхностью Ω_2 с уравнением $z = g_2(x, y)$, (рис.21). Пусть функции $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ достаточно гладкие, т.е. удовлетворяют условиям, сформулированным в примере 2 п.7.2. Тогда $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ представляет собой замкнутую поверхность, внешнюю сторону которой обозначим через Ω^+ .

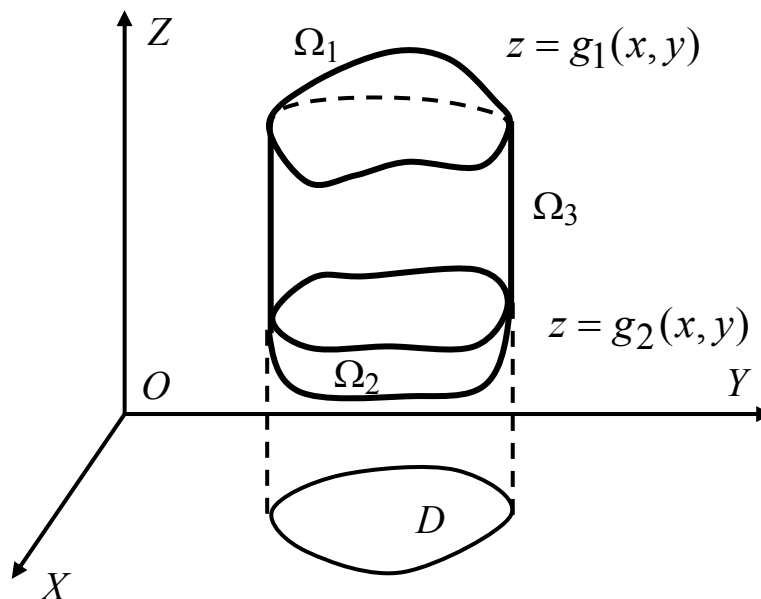


Рис.21. К выводу формулы Остроградского.

Пусть функция $R(x, y, z)$ задана в области V и непрерывна на ее замыкании (т.е. непрерывна в точках области V и в точках ее границы Ω) вместе со своей частной производной $\partial R(x, y, z)/\partial z$.

Из аддитивности поверхностного интеграла (свойство 2 п.7.4) имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{\Omega^+} R(M) dx dy &= \iint_{\Omega_1^+} R(M) dx dy + \iint_{\Omega_2^+} R(M) dx dy + \iint_{\Omega_3^+} R(M) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega_1^+} R(M) dx dy + \iint_{\Omega_2^+} R(M) dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $\iint_{\Omega_3^+} R(x, y, z) dx dy = 0$ (при-

мер 1 п.7.3). Обозначение $\oint_{\Omega^+} R(M) dx dy$ для поверхностного интеграла исполь-

зуется вместо обозначения $\iint_{\Omega^+} R(M) dx dy$ для случая интегрирования по замкну-

той поверхности.

Для дальнейшего нам понадобится вычислить тройной интеграл по области V от функции $\partial R(x,y,z)/\partial z$.

Используя формулу (4) из п.5.2. главы 5 получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{g_2(x,y)}^{g_1(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left(R(x,y,g_1(x,y)) - R(x,y,g_2(x,y)) \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega_1^+} R(M) dx dy + \iint_{\Omega_2^+} R(M) dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее равенство в (2) основано на формуле (9) п.7.3, поскольку поверхность Ω_1^+ – это внешняя сторона поверхности Ω_1 , а поверхность Ω_2^+ – внешняя сторона поверхности Ω_2 (рис. 21). Из формул (1) и (2) следует **формула Остроградского**:

$$\iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\Omega^+} R(M) dx dy. \quad (3)$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\iiint_V \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dx dy dz = \oint_{\Omega^+} P(M) dy dz \quad (4)$$

и

$$\iiint_V \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dx dy dz = \oint_{\Omega^+} Q(M) dx dz. \quad (5)$$

Формулы (3) – (5), доказанные для «цилиндрических» тел, можно обобщить и на случай, когда тело V ограничено произвольной кусочно-гладкой поверхностью Ω . Требования, накладываемые при этом на функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ несколько ужесточаются. Поскольку при доказательстве формул (3) – (5) для общего случая тело V пришлось бы разбивать на «цилиндрические» части, выступающие за пределы поверхности Ω , то приходится тре-

бовать, чтобы непрерывность функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частных производных $\partial P(x, y, z)/\partial x$, $\partial Q(x, y, z)/\partial y$ и $\partial R(x, y, z)/\partial z$ имела место не только во всех точках тела V , но также и в некоторой его окрестности.

Складывая формулы (3)–(5), приходим к общей **формуле Остроградского**:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \oint_{\Omega^+} P(M) dy dz + Q(M) dx dz + R(M) dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Замечание 1. Выражение $\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$ называется **дивергенцией** вектор-функции $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}.$$

Используя это обозначение и формулу (7) п.7.3, можно переписать **формулу Остроградского** (6) в виде:

$$\oint_{\Omega^+} (\vec{F}(M) \cdot \vec{n}(M)) d\Omega = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}(M) dx dy dz. \quad (7)$$

(Здесь $\vec{n}(M)$ – внешняя нормаль к поверхности Ω).

Замечание 2. На основе формулы Остроградского можно получить ряд формул для вычисления объема области V :

$$\begin{aligned} |V| &= \iiint_V dx dy dz = \\ &= \oint_{\Omega^+} z dx dy = \oint_{\Omega^+} y dx dz = \oint_{\Omega^+} x dy dz = \\ &= \frac{1}{3} \oint_{\Omega^+} z dx dy + y dx dz + x dy dz. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Вычислить поток вектора $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Ω , составленной из верхней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и круга $x^2 + y^2 = R^2$ в плоскости $z = 0$.

Здесь область V – верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$. Используя формулу Остроградского (6) и переходя к сферическим координатам (см. п.5.3 главы 5) получаем:

$$\begin{aligned} \oint_{\Omega^+} x^2 \cdot dydz + y^2 \cdot dxdz + z^2 \cdot dxdy &= 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz = \\ &= 2 \iiint_V (r \cos \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta) \cdot r^2 \cos \theta \cdot dr d\theta d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta) \cdot \cos \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

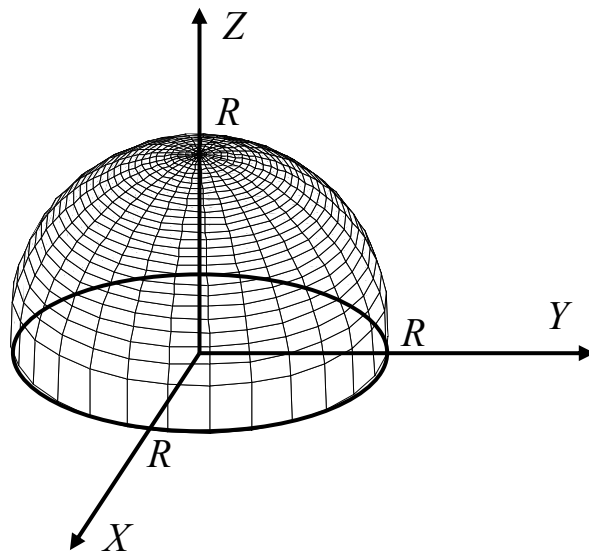


Рис. 22. К примеру 1.

ПРИМЕР 2. С помощью формулы Остроградского решить пример 3 п.7.4.

Дивергенция вектора $\vec{r}$ равна $\text{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$. Применяя формулу

(7) и используя формулу для объема цилиндра, получаем (рис.20):

$$\iint_{\Omega} (\vec{r} \cdot \vec{n}) d\Omega = 3 \iiint_V dxdydz = 3\pi R^2 h. \blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Вычислить поток вектора $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$.

Пусть Ω – поверхность куба V , а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к его поверхности (рис.23). По формуле Остроградского получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\Omega &= 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = 3a^4. \blacksquare \end{aligned}$$

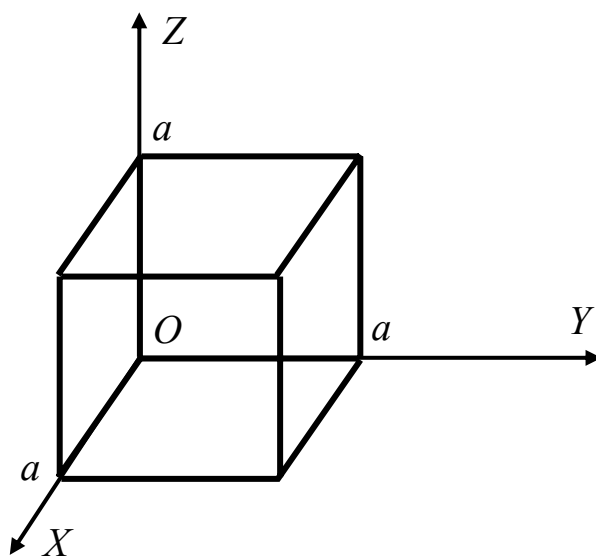


Рис.23.К примеру 3.

7.6. Формула Стокса.

Формула Стокса обобщает формулу Грина на случай пространственной кривой. Она устанавливает связь между поверхностным интегралом по поверхности Ω и криволинейным интегралом II-го рода по ее границе.

Пусть поверхность Ω , задана параметрически на ограниченной области Δ в плоскости переменных (u, v) соотношениями (3) из п.7.2:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

причем для этих функций справедливы условия гладкости, сформулированные в примере 3 п.7.2.

Выберем определенную сторону поверхности Ω , например, сторону Ω^+ , на которой положительное направление обхода границы $\Gamma(\Omega)$ поверхности Ω отвечает на плоскости переменных (u, v) положительному обходу границы $\Gamma(\Delta)$ области Δ (т.е. при движении точки по границе поверхности Ω в положительном направлении, ее проекция на границу области Δ движется против часовой стрелки). Границы областей с выбранными на них положительными направлениями обхода будем обозначать через $\Gamma(\Omega)^+$ и $\Gamma(\Delta)^+$.

Пусть на поверхности Ω (вместе с некоторой ее окрестностью) функция $P(x, y, z)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные. Рассмотрим криволинейный интеграл II-го рода от этой функции по кривой $\Gamma(\Omega)^+$. Используя соотношения (3) п.7.2. и формулу для дифференциала сложной функции, получим:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma(\Omega)^+} P(x, y, z) dx = \\ = \oint_{\Gamma(\Delta)^+} P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} dv \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Кривая $\Gamma(\Delta)^+$ и ограниченная ею область Δ лежат в плоскости (u, v) , поэтому к интегралам (1) можно применить формулу Грина:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma(\Delta)^+} \left[P \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} du + P \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} dv \right] = \\ = \iint_{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(P \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right\} dudv = \\ = \iint_{\Delta} \left\{ \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - P \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\} dudv = I \end{aligned} \quad (2)$$

При условиях, наложенных на функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$, справедли-

вно равенство: $\frac{\partial^2 \varphi(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi(u, v)}{\partial v \partial u}$. Тогда из (2) получаем

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\} dudv = \\ &= \iint_{\Delta} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right\} dudv = \\ &= \iint_{\Delta} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot B - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot C \right\} dudv, \end{aligned}$$

где $B = - \begin{vmatrix} \varphi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \chi'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}$.

Теперь по формулам (10) и (7) из п.7.3 окончательно получаем

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma(\Omega)^+} P(x, y, z) dx = \\ &= \iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos \gamma \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично можно получить равенства:

$$\begin{aligned} &\oint_{\Gamma(\Omega)^+} Q(x, y, z) dy = \\ &= \iint_{\Omega^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \cos \alpha \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\oint_{\Gamma(\Omega)^+} R(x, y, z) dz = \\ &= \iint_{\Omega^+} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \cos \beta \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

(В равенствах (3) – (5) величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ есть направляющие косинусы вектора нормали к поверхности Ω^+).

Складывая соотношения (3) – (5) получаем **формулу Стокса**:

$$\oint_{\Gamma(\Omega)^+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz. \quad (6)$$

Формулу Стокса можно записать и через поверхностный интеграл I-го рода:

$$\oint_{\Gamma(\Omega)^+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \cos \beta \right) d\Omega. \quad (7)$$

Замечание 1. Вектор $rot \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ называется

ся **ротором**, или **вихрем** векторной функции $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Компоненты ротора удобно выразить с помощью определителя:

$$rot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

С использованием понятия ротора формула Стокса записывается короче:

$$\oint_{\Gamma(\Omega)^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} (rot \vec{F} \cdot \vec{n}) d\Omega, \quad (8)$$

и выражает циркуляцию вектора через поверхностный интеграл от его ротора.

ПРИМЕР 1. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль линии γ пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конуса $x^2 + y^2 = z^2, z > 0$.

Для точек, лежащих на кривой γ , справедливы равенства:

$$x^2 + y^2 = z^2 = R^2 - z^2.$$

Тогда координаты точек, лежащих на кривой γ , удовлетворяют соотношениям:
 $z^2 = R^2 / 2$, $x^2 + y^2 = R^2 / 2$, т.е. кривая γ – это окружность радиуса $\sqrt{2}$, лежащая в плоскости $z = R / \sqrt{2}$.

Применим формулу Стокса. В качестве поверхности Ω возьмем круг радиуса $\sqrt{2}$, лежащий в плоскости $z = R / \sqrt{2}$. Кривая γ является границей этого круга, т.е. $\gamma = \Gamma(\Omega)$. Положительным направлением обхода контура будем считать направление против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной части оси OZ (рис. 24). Вектор $\vec{n} = \vec{k}$ является вектором нормали к Ω , соответствующим выбранному положительному направлению обхода контура. На поверхности Ω имеем: $d\Omega = dxdy$. Ротор вектора $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ равен:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & z \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}.$$

Проекция поверхности Ω на плоскость OXY представляет собой круг D радиуса $\sqrt{2}$. По формуле (8) получаем:

$$\oint_{\gamma^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint_{\Omega} (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) d\Omega = -2 \iint_D dxdy = -2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 = -\pi R^2. \blacksquare$$

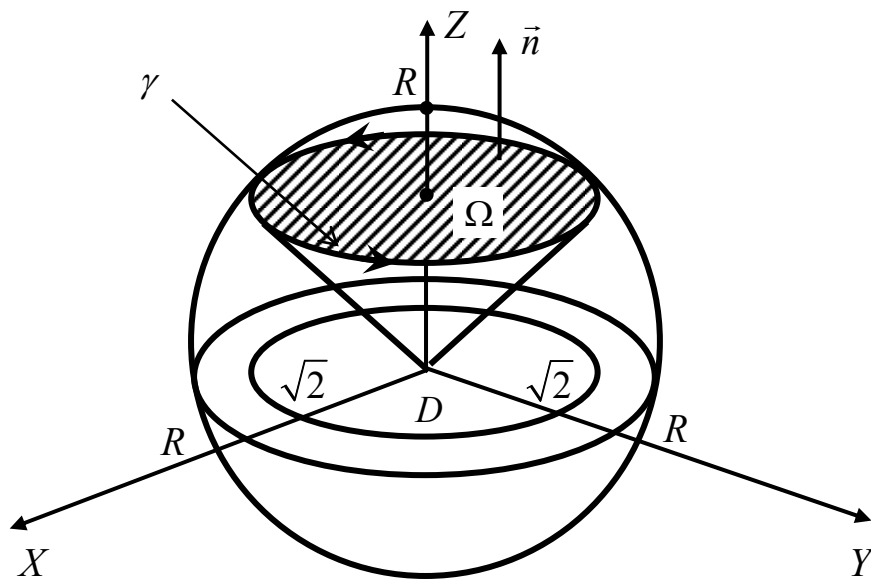


Рис. 24. К примеру 1.

D

ПРИМЕР 2. Вычислить циркуляцию вектор-функции

$$\vec{F} = (3x + 2z) \cdot \vec{i} + (xy - z) \cdot \vec{j} - xyz \cdot \vec{k}$$

вдоль линии γ пересечения параболоида $z = g(x, y) = 1 - x^2 - y^2 = 0$ (рис. 25) с координатными плоскостями ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Воспользуемся формулой Стокса. В качестве поверхности Ω с границей γ примем часть параболоида, лежащую в первом октанте, т.е. при $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Таким образом, $\gamma = \Gamma(\Omega)$. Положительным направлением обхода контура будем считать движение против часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали к параболоиду: $\vec{n} = \text{grad}(z - g(x, y)) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$.

На поверхности Ω имеем

$$\begin{aligned} d\Omega &= \sqrt{1 + g_x'^2 + g_y'^2} dx dy = \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot dx dy. \end{aligned}$$

Найдем теперь ротор вектора $\vec{F} = (3x + 2z) \cdot \vec{i} + (xy - z) \cdot \vec{j} - xyz \cdot \vec{k}$:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x + 2z & xy - z & -xyz \end{vmatrix} = (1 - xz) \cdot \vec{i} + (yz + 2) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}.$$

Проекция поверхности Ω на плоскость OXY представляет собой четверть круга D : $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$.

На поверхности Ω в цилиндрических координатах (r, φ, z) выполнено равенство $z = 1 - (x^2 + y^2) = 1 - r^2$. Тогда по формуле Стокса (8) получим

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_{\Omega} (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) d\Omega = \\ &= \iint_D (2x(1 - xz) + 2y(yz + 2) + y) \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D (2x - 2x^2z + 2y^2z + 5y) \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \left(2r \cos \varphi - 2r^2 \cos^2 \varphi \cdot z + 2r^2 \sin^2 \varphi \cdot z + 5r \sin \varphi \right) \cdot \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr \int_0^{\pi/2} \left(r(2 \cos \varphi + 5 \sin \varphi) - 2r^2 \cos 2\varphi \cdot (1 - r^2) \right) \cdot d\varphi = \\
&= 7 \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{7}{64} (18\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5})).
\end{aligned}$$

(Последний интеграл может быть вычислен с помощью замены переменных $2r = \operatorname{sh} t$). ▀

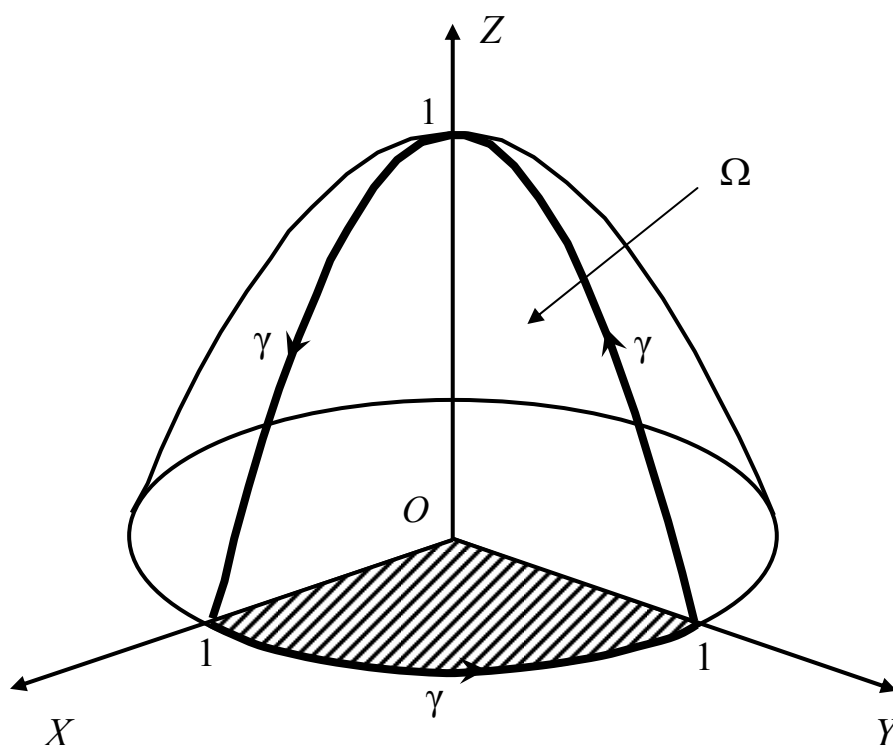


Рис. 25. К примеру 2.

Теоретические вопросы к главе 7.

1. Как определяется ориентация на поверхности? Что такое сторона поверхности? Как определяется положительное направление обхода замкнутого контура на поверхности?
2. Чем отличаются друг от друга поверхностные интегралы I-го и II-го рода? Чем отличается поверхностный интеграл II-го рода от двойного интеграла?
3. Как свести поверхностный интеграл I-го рода к двойному интегралу в случае, если поверхность задана: а) уравнением $z = g(x, y)$; б) параметрически?
4. Как свести поверхностный интеграл II-го рода к двойному интегралу в случае, если поверхность задана: а) уравнением $z = g(x, y)$; б) параметрически?
5. Как связаны друг с другом поверхностные интегралы I-го и II-го рода?
6. Как задать нормаль к поверхности в случае, если поверхность задана: а) уравнением $F(x, y, z) = 0$; б) уравнением $z = g(x, y)$; в) параметрически?
7. Что такое дивергенция? Что такое ротор вектора? Как с помощью этих понятий можно записать формулу Остроградского и формулу Стокса?
8. Как с помощью поверхностного интеграла найти: а) площадь поверхности; б) объем области, ограниченной замкнутой поверхностью?
9. Влияет ли ориентация поверхности на запись формул Остроградского, Стокса, а также формул, сводящих поверхностный интеграл II-го рода к поверхностному интегралу I-го рода или к двойному интегралу? Если влияет, то каким образом?
10. Пусть Ω – часть боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченной поверхностями $z = g_1(x, y)$ и $z = g_2(x, y)$. Доказать, что поток вектор-

функции $\vec{F}$ в этом случае может быть найден по формуле:

$$\iint_{\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\Omega = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{g_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}^{g_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dz, \text{ где } (r, \varphi, z) - \text{цилиндриче-}$$

ские координаты.

11. Пусть Ω – часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченная коническими поверхностями $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ и полуплоскостями $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$.

Доказать, что в этом случае поток вектор-функции $\vec{F}$ выражается форму-

$$\text{лой: } \iint_{\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\Omega = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \sin \theta d\theta, \text{ где } (r, \varphi, \theta) - \text{сферические ко-}$$

ординаты.

Задачи к главе 7.

Вычислить поверхностные интегралы I-го рода $\iint_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega$:

1. $f(x, y, z) = z$; Ω – часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2az$, $a > 0$,

вырезанная конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. $f(x, y, z) = x + y + z$; Ω – верхняя половина сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3. $f(x, y, z) = z$; Ω – часть поверхности геликоида

$x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$, где $0 < u < a, 0 < v < 2\pi$.

4. $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$; Ω – эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$5. f(x, y, z) = \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \right]^{-1}; \quad \Omega - \text{поверхность эл-}$$

$$\text{липсоида } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$6. f(x, y, z) = x^2 y^2 + z^2 x^2 + z^2 y^2; \quad \Omega - \text{часть верхней половины конуса}$$

$$x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0, \text{ отсекаемая цилиндром } x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Найти массу поверхности Ω , плотность которой задается функцией $\rho(x, y, z)$.

$$7. \rho(x, y, z) = z; \quad \Omega - \text{часть поверхности параболоида } x^2 + y^2 = 2z,$$

$$0 \leq z \leq 1.$$

$$8. \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \Omega - \text{часть сферы } x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ вырезанная}$$

$$\text{конусом } z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Вычислить двумя способами (с помощью и без помощи формулы Остроградского) поток вектор-функции $\vec{F}$ через ориентированную поверхность $\tilde{\Omega}$:

$$9. \vec{F} = (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}; \quad \tilde{\Omega} - \text{нижняя сторона круга } x^2 + y^2 = R^2 \text{ в плоскости } OXY.$$

$$10. \vec{F} = x^2 y^2 z \vec{k}; \quad \tilde{\Omega} - \text{верхняя сторона нижней полусферы}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0.$$

$$11. \vec{F} = x^3 \cdot \vec{i}; \quad \tilde{\Omega} - \text{верхняя сторона половины эллипсоида}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0.$$

$$12. \vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}; \quad \tilde{\Omega} - \text{внешняя сторона сферы}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

$$13. \vec{F} = z \cdot \vec{k}; \quad \tilde{\Omega} - \text{внешняя сторона эллипсоида } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$14. \vec{F} = \frac{\vec{i}}{x} + \frac{\vec{j}}{y} + \frac{\vec{k}}{z}; \quad \tilde{\Omega} - \text{внешняя сторона эллипсоида}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

На основе формулы Стокса найти циркуляцию вектор-функции $\vec{F}$ по кривой γ :

$$15. \vec{F} = y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}; \quad \gamma - \text{линия пересечения сферы } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ и плоскости } x + y + z = 0. \text{ (Против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси } OX).$$

$$16. \vec{F} = (y - z) \cdot \vec{i} + (z - x) \cdot \vec{j} + (x - y) \cdot \vec{k}; \quad \gamma - \text{линия пересечения цилиндра } x^2 + y^2 = a^2 \text{ и плоскости } \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, \quad (a > 0, h > 0). \text{ (Против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси } OX).$$

$$17. \vec{F} = (y^2 + z^2) \cdot \vec{i} + (x^2 + z^2) \cdot \vec{j} + (y^2 + x^2) \cdot \vec{k}; \quad \gamma - \text{линия пересечения цилиндра } x^2 + y^2 = 2ax \text{ и сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx. \text{ (В направлении, при котором меньшая область, ограниченная кривой на сфере, остается слева).}$$

$$18. \vec{F} = (y^2 - z^2) \cdot \vec{i} + (z^2 - x^2) \cdot \vec{j} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{k}; \quad \gamma - \text{линия пересечения плоскости } x + y + z = 3a/2 \text{ с поверхностью куба } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a. \text{ (Против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси } OX).$$

ГЛОССАРИЙ

Двойной интеграл (*double integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

Диаметр множества (*diameter of a set*) – наибольшее расстояние между двумя точками множества.

Замыкание области (*closure of a domain*) – объединение области и ее границы.

Криволинейный интеграл (*curvilinear integral*) – обобщение понятия определенного интеграла, связанное с заменой отрезка интегрирования на дугу кривой линии.

Неопределенный интеграл (*indefinite integral*) – множество всех первообразных подынтегральной функции.

Несобственный интеграл (*improper definite integral*) – интеграл, один из пределов интегрирования которого бесконечен, а также интеграл от разрывной функции.

Определенный интеграл (*definite integral*) – предел последовательности интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка интегрирования.

Первообразная (*antiderivative*) **функции** $f(x)$ – функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Повторный интеграл (*iterated integral*) – интеграл от функции двух переменных, взятый последовательно по одной переменной, а затем по другой.

Потенциал (**потенциальная функция**) **вектора** (*potential*) – функция трех переменных, частные производные которой по соответствующим координатам совпадают с координатами вектора.

Правильная область 1-го типа (*regular domain of 1-st type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$.

Правильная область 2-го типа (*regular domain of 2-nd type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$ и $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$.

Рациональная дробь (*rational fraction*) – функция вида $f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$, где

$P(x)$ и $D(x)$ – многочлены.

Сапог Шварца (*Schwarz's boot*) – вписанный в цилиндр многогранник, сумма площадей граней которого стремится к бесконечности при стремлении диаметров граней к нулю.

Связное множество (*connected set*) – множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству.

Тройной интеграл (*triple integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на трехмерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

«Хорошая» кривая (*regular curve*) – кривая, граница которой составлена из конечного числа графиков непрерывных функций.

Циркуляция вектора (*circulation*) – криволинейный интеграл II-рода от векторной функции по замкнутому контуру.

Якобиан (*Jacobian*) – определитель, составленный из частных производных n функций, зависящих от n переменных.

Материалы, относящиеся к данному изданию можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

<http://kvm.gubkin.ru/index.html>