Глава 3. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ в главе 2 был введен для случая конечного промежутка $[a, b]$ и ограниченной функции $f(x)$. Теперь это понятие можно обобщить на случай бесконечных промежутков интегрирования, а также на случай неограниченных функций.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Понятие определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в главе 2 вводилось на основе процедуры разбиения отрезка $[a, b]$ на вспомогательные подотрезки. Если функция $f(x)$ рассматривается на бесконечном интервале $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$, разбить ее область определения на конечное число подотрезков невозможно. Поэтому определение понятия несобственного интеграла с бесконечными пределами будем проводить на основе предельного перехода в определенном интеграле.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,+\infty)$ и при любом значении $A > a$ интегрируема на конечном отрезке $[a, A]$. ***Несобственным интегралом*** функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ называется предел интеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$ при $A \to +\infty$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx. \tag{1}$$

Если предел (1) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится***, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ (иногда в этом случае используют обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$). Если же этот предел (1) не существует (в частности, бесконечен), то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют ***расходящимся***.

ПРИМЕР 1. Найти интеграл от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ в пределах от a до $+\infty$, где a – положительное число.

Имеем

$$\int_a^A \frac{dx}{x^p} = \int_a^A x^{-p}dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^A, & p \neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^A, & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{A^{1-p}}{1-p} - \dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1; \\ \ln\left|\dfrac{A}{a}\right|, & p = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & p > 1; \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, **при $p > 1$ интеграл** $\int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ **сходится и равен** $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$.

При $p \leq 1$ этот **интеграл расходится**. ■

ПРИМЕР 2. Найти интеграл от функции $f(x) = \cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = +\infty$.

Интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ расходится, поскольку $\int_0^A \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^A = \sin A$,

а предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$ не существует. ■

Определение 2. Несобственные интегралы от функции $f(x)$ в интервалах $(-\infty, a]$ и $(-\infty, +\infty)$ определяются аналогичным образом:

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, a]$ и для любого $A < a$ эта функция интегрируема на отрезке $[A, a]$, то

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{a} f(x)dx. \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[A, B]$ для любых A и B, таких, что $A < B$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx. \qquad (3)$$

Если пределы (2) или (3) существуют и конечны, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на интервалах $(-\infty, a]$ или $(-\infty, +\infty)$, соответственно, а про несобственные интегралы, определяемые выражениями (2) или (3), говорят, что они с***ходятся***. Если пределы (2) или (3) не существуют или бесконечны, то говорят, что соответствующие интегралы ***расходятся***.

ПРИМЕР 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_{A}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_{A}^{B} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A) =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \operatorname{arctg} B - \lim_{A \to -\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

т.е. несобственный интеграл сходится. ▪

Замечание. Все дальнейшие утверждения будут формулироваться для несобственных интегралов вида (1), однако, аналогичные утверждения могут быть сформулированы и доказаны для интегралов вида (2) и (3).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***абсолютно интегрируемой*** в промежутке $[a, +\infty)$, а интеграл (1) – ***абсолютно сходящимся***, если наряду с интегралом (1) сходится интеграл от абсолютной величины функции $f(x)$:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{4}$$

Если интеграл (1) сходится, но не абсолютно, то он называется ***условно сходящимся***.

3.2. Свойства несобственных интегралов.

Из свойств определенных интегралов и пределов легко выводятся следующие свойства несобственных интегралов:

❶. Из сходимости интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

❷. Пусть $k \neq 0$ – произвольная постоянная, тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится также интеграл $\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx$.

3.3. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Сформулируем и докажем ряд утверждений, аналогичных соответствующим утверждениям (признакам сравнения) для числовых рядов.

Теорема 1. Если для некоторого числа c при $x \geq c$ имеют место неравенства:

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{1}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{2}$$

а из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Доказательство. Докажем сначала одно важное вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть d – наименьшее из чисел a и c, т.е. $d = \min\{a, c\}$, и пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на любом конечном промежутке $[d, A]$, где $A > d$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, имеем

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx. \tag{3}$$

Переходя в обеих частях равенства (3) к пределу при $A \to +\infty$ с учетом того, что $\int_a^c f(x)dx = const$, получим три возможных результата:

1) пределы в правой и левой частях (3) одновременно не существуют;

2) оба этих предела бесконечны;

3) оба предела конечны. В этом случае имеет место равенство:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx .$$

Лемма, таким образом, доказана. Из нее следует, что на сходимость (расходимость) несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ влияет только поведение функции $f(x)$ при достаточно больших значениях аргумента x (т.е. при $x >> 1$) .

Теперь можно перейти к доказательству теоремы:

Пусть значение $c \le a$. Тогда неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$ справедливо для всех $x \ge a$. Рассмотрим функцию $F(A) = \int_a^A f(x)dx$. Эта функция – неубывающая. Действительно, из условия $0 \le f(x)$ при $B > A$ следует неравенство $F(B) = F(A) + \int_A^B f(x)dx \ge F(A)$.

Как известно, для монотонно неубывающей функции $F(A)$ всегда существует предел:

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = \begin{cases} F_0 = const < \infty, & \text{если } F(A) \text{ ограничена;} \\ +\infty, & \text{если } F(A) \text{ не ограничена.} \end{cases}$$

Аналогичные утверждения справедливы и для функции $G(A) = \int_a^A g(x)dx$.

Итак, если интеграл (1) сходится, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{A \to +\infty} G(A) = G_0$, то функция $G(A)$ ограничена, поскольку $G(A) \le G_0$. Из неравенства $f(x) \le g(x)$, верного для всех $x \ge a$, и свойств определенного интеграла получаем $F(A) \le G(A) \le G_0$, т.е. функция $F(A)$ ограничена. Поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = F_0$, и интеграл (2) сходится.

Наоборот, если интеграл (2) расходится, т.е. $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = +\infty$, то из неравенства $F(A) \le G(A)$ следует: $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A) = +\infty$. Поэтому интеграл (1) также расходится.

Пусть теперь значение $c > a$. Если интеграл (1) сходится, то из доказанной выше леммы следует, что сходится интеграл $\int\limits_c^{+\infty} g(x)dx$. Поскольку для всех $x \ge c$ справедливо неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то из доказанного, следует сходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, откуда по лемме вытекает сходимость интеграла (2). Если же интеграл (2) расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$. Из неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ (при $x \ge c$) и доказанного выше, следует расходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} g(x)dx$, откуда и следует расходимость интеграла (1).

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Если для функций $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$ существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 \le k \le +\infty, \tag{4}$$

то из сходимости несобственного интеграла (1) при $k < +\infty$, следует сходимость интеграла (2), а из расходимости интеграла (1) при $k > 0$ вытекает расходимость интеграла (2).

Доказательство. Доказательство утверждения основано на теореме 1. Если $0 < k < +\infty$, то из равенства (4) и определения предела следует, что для любого числа ε > 0, существует δ = δ(ε) > 0 такое, что для любого x > δ выполняется неравенство: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$, т.е. $k-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<k+\varepsilon$. Взяв, например, ε = = $k/2$ и используя положительность функции $g(x)$, получим два неравенства:

$$\begin{cases} f(x)>(k/2)\,g(x), \\ f(x)<(3k/2)\,g(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Учитывая, что при c_0 = const ≠ 0 интегралы $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} c_0 g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, из неравенства (5) и теоремы 1 получаем, что интегралы (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно.

Если $k = 0$, из равенства (4) и определения предела следует:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x>\delta\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon.$$

Взяв, например, ε = 1, получаем отсюда, что $0\le f(x)\le g(x)$, и из теоремы 1 выводим заключение теоремы 2: из сходимости интеграла (1) следует сходимость интеграла (2).

Если значение k в пределе (4) бесконечно (k = +∞), то из равенства (4) и определения бесконечного предела получаем

$$\forall M>0\ \exists\delta>0:\forall x>\delta\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}>M.$$

Отсюда при M = 1 имеем, что при x > δ выполнено неравенство $f(x) > g(x)$. Тогда в силу теоремы 1 из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

Теоремы 1 и 2 называют ***теоремами сравнения***. Из этих теорем следует, что сходимость несобственного интеграла можно установить, не вычисляя его значения, а просто сравнив его с интегралом от уже исследованной функции. Для сравнения часто используют интеграл от степенной функции: $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ (см. пример 1 п.3.1).

ПРИМЕР 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Подынтегральная функция положительна, а ее числитель и знаменатель – многочлены, причем степень числителя на два меньше степени знаменателя. Следовательно, сравнение удобно проводить с функцией $1/(x^2)$. Существует предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} : \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = 1.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 1 из п. 3.1, $p = 2 > 1$), то в силу теоремы 2 сходится и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$. Поскольку на отрезке [0,1] подынтегральная функция непрерывна, то интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ сходится (он уже не является несобственным). Таким образом, сходится и исходный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$. ■

Напомним, что для функций одной переменной имеет место

Критерий Коши существования предела функции.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ существует и конечен тогда и только тогда, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' > \delta \Rightarrow \left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| < \varepsilon .$$

Аналогичный критерий справедлив и для несобственного интеграла с бесконечными пределами:

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ для } \forall b', b'' > \delta .$$

На основе критерия Коши может быть доказана еще одна важная теорема:

Теорема 3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.

Доказательство. Если $\int\limits_a^{+\infty} |\, f(x)\,|dx < \infty$, то в силу критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall b', b'' > \delta \Rightarrow \left| \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon .$$

Но по свойству определенного интеграла справедливо неравенство $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| \le \left| \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|dx \right|$. Отсюда $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon$ и по критерию Коши сходится также несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}$ на интервале [0, +∞] не сохраняет знак, в то же время теоремы сравнения справедливы только для положительных функций. Рассмотрим функцию $|\; f(x) \;| = \frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x^2+100} \ge 0$. Для нее справедливо неравенство: $\left|f\left(x\right)\right| \le \frac{\sqrt{x}}{x^2+100} \le \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} = g\left(x\right)$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} g(x)dx < \infty$ сходится (см. пример 1 п.3.1 при $p = 3/2$), то по теореме 1 сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$, а значит, по теореме 3, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+100}$ также сходится. На отрезке [0,1] функция $f(x)$ непрерывна, следовательно, существует конечный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$. Таким образом, заданный интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. ▪

Теоремы 1– 3 дают возможность исследовать на сходимость несобственные интегралы от положительных функций или абсолютную сходимость несобственных интегралов. Как быть с условной сходимостью?

Приведем без доказательства признак сходимости, применимый и для неабсолютно сходящихся интегралов.

Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.

Пусть выполнены условия:

1) функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$;

2) первообразная $\Psi(x) = \int\limits_a^x \psi(\xi)d\xi$ ограничена.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx$ сходится (вообще говоря, не абсолютно).

Замечание. В качестве $\varphi(x)$ часто берут степенную функцию $\varphi(x) = 1/x^p$, $p > 0$. Эта функция, очевидно, монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Рассмотрим функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ и $\psi(x) = \sin x$. Первообразная функции $\psi(x)$ ограничена: $\Psi(x) = \int\limits_1^x \sin\xi \, d\xi = -\cos\xi \,\Big|_1^x = \cos 1 - \cos x$, а значит $\left|\Psi(x)\right| \le \left|\cos 1\right| + \left|\cos x\right| \le 2$. Следовательно, по признаку Дирихле, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится.

Докажем, что сходимость этого интеграла условная. Предположим противное: имеет место абсолютная сходимость, т.е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$ сходится. Тогда по теореме 1, в силу неравенств $0 \le \sin^2 x \le \left|\sin x\right|$, сходится также интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$. Но $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx$, как можно доказать, сходится по признаку Дирихле. Значит, по свойству несобственного интеграла должен также сходится интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx .$$

Получено противоречие (см. интеграл из примера 1 при $p = 1/2 < 1$). Сделанное предположение оказалось неверным, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$, на самом деле расходится. ■

3.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, заданную в конечном промежутке $[a,b)$, но не ограниченную на этом промежутке. Предположим, что функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a,\ b-\delta]$, где $\delta > 0$, но не ограничена на интервале $(b-\delta,\ b)$. Точка b в этом случае называется ***особой точкой***.

Определение 1. ***Несобственным интегралом*** функции $f(x)$ в промежутке от a до b называется предел интеграла $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$ при $\delta \to 0$ (конечный или бесконечный):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx. \tag{1}$$

Если предел (1) конечен, то говорят, что несобственный интеграл ***сходится***, а функцию $f(x)$ называют ***интегрируемой*** в промежутке $[a,b)$. Если предел (1) бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл ***расходится***.

Аналогично, для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой в промежутке $[a+\delta,\ b]$ и неограниченной на интервале $(a,\ a+\delta)$ определяется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx. \tag{2}$$

Здесь точка a – особая точка функции $f(x)$.

Возможен случай, когда особые точки расположены внутри отрезка $[a,\ b]$. Пусть $a \le c_1 < c_2 < \ldots < c_n \le b$, где c_1, $c_2, \ldots, c_n$ – особые точки функции $f(x)$, т.е. $f(x)$ не ограничена в окрестностях точек c_i, но ограничена и интегрируема на отрезке $[a,\ b]$ с выброшенными окрестностями точек c_i. Тогда несобственный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма несобственных интегралов вида (1) и (2):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx + \int_{c_n}^{b} f(x)dx, \qquad (3)$$

где

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \lim_{\delta_2 \to 0} \int_{c_i+\delta_1}^{c_{i+1}-\delta_2} f(x)dx.$$

Если $c_1 = a$, то первое слагаемое в правой части (3) отсутствует. Если $c_n = b$, то отсутствует последнее слагаемое.

Определение 2. Интегралы вида (1) – (3) из разделов 3.1 и 3.4 называются ***несобственными*** интегралами (в отличие от изученных в главе 2 определенных интегралов Римана, называемых ***собственными***).

ПРИМЕР 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Здесь особые точки подынтегральной функции – точки $x = \pm 1$. По формуле (3) имеем

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\delta_2 \to 0} \arcsin(1-\delta_2) - \lim_{\delta_1 \to 0} \arcsin(-1+\delta_1) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Подынтегральная функция на отрезке $[0, 1]$ имеет единственную особую точку: $x = 0$. По определению получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\delta\to 0}\begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\delta^1, & \text{при } p\neq 1, \\ \ln|x|\,\Big|_\delta^1, & \text{при } p=1, \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{1-p} - \lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1, \\ -\lim\limits_{\delta\to 0}\ln|\delta|, & p=1, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p<1, \\ +\infty, & p\geq 1. \end{cases}$$

Итак, **несобственный интеграл** $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ **сходится при** $\boldsymbol{p} < 1$**, а при** $\boldsymbol{p} \geq 1$ **этот интеграл расходится**, (в отличие от несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ из примера 1 п.3.1).▪

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Особая точка $x = 1$ лежит внутри отрезка интегрирования. По определению,

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left.\frac{-1}{(x-1)}\right|_0^{1-0} - \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_{1+0}^2 =$$

$$= -\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)} - 1 - 1 + \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)} = -(-\infty) - 2 + (+\infty) = +\infty.$$

Интеграл расходится. ▪

Замечание. Пример 3 демонстрирует, как важно начинать исследование несобственного интеграла с определения особых точек. Ведь, если решать его формально по формуле Ньютона – Лейбница для определенных интегралов:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\left.\frac{1}{x-1}\right|_0^2 = -2, \quad (???)$$

был бы получен неверный результат.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций справедливы те же утверждения, что и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Сформулируем, например теоремы сравнения для интеграла вида (2) (для интегралов вида (1) и (3) они формулируются и доказываются аналогично).

Теорема 1. Если для некоторого числа $\delta > 0$ при $a \le x \le a + \delta$ имеет место неравенство:

$$0 \le f(x) \le g(x),$$

то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$, (a – особая точка функции $g(x)$) следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, (a – особая точка функции $f(x)$), а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2. Если существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 \le k \le +\infty,$$

причем для некоторого положительного числа δ при $a \le x \le a + \delta$ справедливы неравенства $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$, то из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ при $0 \le k < \infty$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ при $0 < k \le \infty$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (точка a – особая точка).

Теорема 3. Если сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$, (a – особая точка функции $f(x)$).

Определение 3. Пусть несобственный интеграл (2) сходится. Тогда он называется ***абсолютно сходящимся***, если, наряду с ним, сходится и интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{4}$$

и ***условно сходящимся***, если интеграл (4) расходится.

Замечание. Для исследования сходимости интеграла (2) по теоремам 1 и 2 функцию $f(x)$ часто сравнивают со степенной функцией $1/x^p$ (см. пример 2).

ПРИМЕР 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+4x}\,dx. \tag{5}$$

Здесь точка $x = 0$ – особая точка. В окрестности нуля бесконечно малая функция $\ln(1+x)$ эквивалентна x, а функция $x^2 + 4x^3$ эквивалентна x^2. Тогда, сравнивая подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+4x^3}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{x^2+4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+4x} = 1\ .$$

Но интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится, следовательно, по теореме 2 расходится и интеграл (5). ▪

ПРИМЕР 5. ***Интегралом Эйлера I-го рода***, или ***бета-функцией***, называется интеграл:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\,, \tag{6}$$

где a и b – положительные постоянные.

При $a \ge 1$ и $b \ge 1$ в интеграле (6) особых точек нет, при $a < 1$ особая точка – ноль, при $b < 1$ особая точка – единица.

Разложим интеграл (6) на сумму двух интегралов:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx + \int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = I_1 + I_2,$$

и оценим каждое из слагаемых.

При $x \le 1/2$ и $b < 1$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \dfrac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} \le \dfrac{x^{a-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-b}} = x^{a-1} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{b-1}$.

При $b \ge 1$ и $0 \le x \le 1/2$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \le x^{a-1}$.

Интеграл $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{a-1}dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-a}}$ сходится при $p = 1 - a < 1$, т.е. при $a > 0$.

То же справедливо и для интеграла: $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{a-1}(1/2)^{b-1}dx = (1/2)^{b-1}\int_0^{1/2} x^{a-1}dx$. Следовательно, по теореме 1 интеграл I_1 сходится при $a > 0$ для всех b.

При $x \ge 1/2$ и $a < 1$ имеем:

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} \le \frac{(1-x)^{b-1}}{(1/2)^{1-a}} = (\frac{1}{2})^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

После замены $y = 1 - x$ получаем

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^{b-1}dx = -\int_{1/2}^{0} y^{b-1}dy = \int_0^{1/2} y^{b-1}dy = \int_0^{1/2} \frac{dy}{y^{1-b}}.$$

Этот интеграл сходится при $1 - b < 1$, т.е. при $b > 0$.

При $a \ge 1$ и $1 \ge x \ge 1/2$ имеем: $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \le (1-x)^{b-1}$.

Следовательно, по теореме 1 интеграл I_2 сходится при $b > 0$.

Таким образом, интеграл Эйлера I-го рода определен (сходится) для любых положительных значений a и b. ▪

ПРИМЕР 6. ***Интегралом Эйлера II-го рода***, или ***гамма-функцией***, называется интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx, \quad a > 0. \tag{7}$$

Для исследования интеграла (7) на сходимость разобьем его на сумму двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = I_1 + I_2.$$

Если $a \geq 1$, то подынтегральная функция непрерывна, а значит, I_1 – собственный интеграл.

При $0 < a < 1$ и $x \geq 0$ имеем $x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a-1}$. Поэтому в силу теоремы 1 интеграл $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$ сходится, если сходится интеграл $\int_0^1 x^{a-1} dx$, т.е. при $a > 0$ (подробнее см. пример 2).

Исследуем теперь на сходимость интеграл I_2.

Известно, что для достаточно больших значениий x (т.е. при $x >> 1$) и при любом положительном числе λ справедливо соотношение: $\ln x < x^{\lambda} < e^{x}$. Поэтому, приняв $\lambda = 2a$, получим: $e^{x/2} > x^{a}$ при $a > 0$. Тогда подынтегральная функция в (7) удовлетворяет неравенству: $x^{a-1} e^{-x} = \dfrac{x^a}{xe^{x/2}} \cdot \dfrac{1}{e^{x/2}} < \dfrac{1}{e^{x/2}}$. Поскольку $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x/2} dx = -2e^{-x/2}\Big|_1^{\infty} = 2e^{-1/2} < \infty$, то по теореме 1 п. 3.3 интеграл I_2 сходится при $a > 0$.

Таким образом, доказано, что интеграл Эйлера II-го рода (7) сходится при любом положительном значении параметра a. ▪

Замечание. Отметим важное свойство гамма-функции. Имеем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Для любого натурального значения n, применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}de^{-x} = -\left(x^{n-1}\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx^{n-1} \right) =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{+\infty} x^{n-2} \cdot e^{-x}dx = (n-1)\cdot\Gamma(n-1).$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям, приходим к формуле

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2) = \ldots$$

$$= (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\Gamma(1).$$

Отсюда получаем известное соотношение, связывающее гамму-функцию натурального аргумента n и факториал этого числа:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Таким образом, гамма-функция представляет собой обобщение понятия факториала на множество неотрицательных чисел.

3.5. Интегралы, зависящие от параметра.

Интегралы Эйлера представляют собой пример несобственных интегралов, зависящих от параметра. Такие интегралы можно рассматривать в качестве функции, аргументом которой является параметр. Тогда с этой функцией можно производить операции, известные из курса математического анализа, в частности, интегрировать или дифференцировать. Сформулируем некоторые получающиеся при этом результаты.

Интегрирование под знаком интеграла.

Исследуем интеграл:

$$I(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

в котором и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят от параметра y. В этом случае и результат интегрирования будет представлять собой функцию переменной y.

Пусть функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны, а функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности своих переменных. В этом случае существует интеграл:

$$\int\limits_c^d I(y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

В частном случае, если функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ есть постоянные: $\varphi_1(y)\equiv a$; $\varphi_2(y)\equiv b$, то в равенстве (2) можно поменять порядок интегрирования:

$$\int\limits_c^d I(y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{3}$$

Дифференцирование под знаком интеграла.

Теорема 1. Пусть функция $I(y)$ задана равенством:

$$I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx, \tag{4}$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике: $a\le x\le b$, $c\le y\le d$.

Тогда существует производная функции (4), причем

$$I'(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx. \tag{5}$$

ПРИМЕР 1. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx.$

Имеем по формуле (5):

$$I'(y)=\int\limits_0^1\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y dx=\int\limits_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}. \ \blacksquare$$

Теорема 2. Пусть функция $I(y)$ задается формулой (1):

$$I(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx,$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $a\le x\le b,\ c\le y\le d$, функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны при $c\le y\le d$ и принимают значения в интервале от a до b. Тогда функция $I(y)$ непрерывна при $c\le y\le d$.

Если к тому же в указанном прямоугольнике существует и непрерывна частная производная $f'_y(x,y)$, а также существуют производные $\varphi'_1(y)$ и $\varphi'_2(y)$, то производная интеграла $I(y)$ существует определяется по формуле

$$I'(y)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y\left(x,y\right)dx+\varphi'_2(y)\cdot f\left(\varphi_2(y),y\right)-\varphi'_1(y)\cdot f\left(\varphi_1(y),y\right). \qquad (6)$$

ПРИМЕР 2. Найти производную функции $I(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{yx^2}\,dx$.

По формуле (6) получаем

$$I'(y)=\int\limits_y^{y^2}(e^{yx^2})'_y\,dx+(y^2)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Big|_{x=y^2}-(y)'_y\cdot\left(e^{yx^2}\right)\Big|_{x=y}=$$

$$=\int\limits_y^{y^2}x^2e^{yx^2}\,dx+2ye^{y^5}-e^{y^3}. \ \blacksquare$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру в несобственных интегралах.

Введем вначале важное понятие равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Определение. Несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{7}$$

и

$$\int_a^{b} f(x,y)dx\,,\ \ (a \text{ – особая точка}) \tag{8}$$

называются ***сходящимися равномерно*** по переменной y, принадлежащей некоторой области U, если они сходятся при любом фиксированном значении $y \in U$ и величина δ в критерии сходимости несобственного интеграла (см. п. 3.3) не зависит от значения y, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left| \int_{b'}^{b''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \ \text{ для } \forall b', b'' > \delta \ \text{ и } \forall y \in U$$

– для интеграла (7),

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left| \int_{a+b'}^{a+b''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \ \text{ для } \forall b', b'' : 0 < b', b'' < \delta \ \text{ и } \forall y \in U$$

– для интеграла (8).

Сформулируем **свойства равномерно сходящегося интеграла** (7). (Аналогичные свойства справедливы и для интеграла (8)):

❶. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \ge a$ и $c \le y \le d$ и интеграл (7) сходится равномерно при $c \le y \le d$, то функция $I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ непрерывна по y при $c \le y \le d$.

❷. При условиях, сформулированных в свойстве 1, справедлива формула интегрирования под знаком интеграла:

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy .$$

❸. Если функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны, несобственный интеграл (7) сходится, а интеграл $\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно, то имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty f'_y(x,y)dx \ .$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру иногда позволяет значительно упростить процедуру вычисления определенных интегралов:

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $A = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не может быть выражен в элементарных функциях, он носит название ***интегрального синуса***.

Для вычисления искомого интеграла A рассмотрим функцию

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx, \quad t \ge 0 .$$

Тогда $A = I(0)$.

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$I'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx .$$

Этот интеграл легко вычисляется при $t > 0$:

$$I'(t)=\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\sin x\,de^{-tx}=\frac{1}{t}\left(\sin x\,e^{-tx}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-tx}\cos x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{t^2}\int_0^{\infty}\cos x\,de^{-tx}=\frac{1}{t^2}\left(\cos x\,e^{-tx}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-tx}\sin x\,dx\right)=\frac{1}{t^2}\big(-1-I'(t)\big).$$

Отсюда

$$I'(t)=-\frac{1}{1+t^2}.$$

Интегрируя полученное соотношение, находим

$$I(t)=-\int\frac{1}{1+t^2}dt=-\operatorname{arctg}t+C.$$

Постоянную интегрирования C можно определить из условия $I(+\infty)=0$:

$$0=-\frac{\pi}{2}+C \quad\Rightarrow\quad C=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $I(t)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t$. По свойству 1 функция $I(t)$ непрерывна, поэтому искомый интеграл может быть найден в результате предельного перехода:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I(0)=\lim_{t\to 0}I(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}t\right)=\frac{\pi}{2}.\ ■$$

Теоретические вопросы к главе 3.

1. Дать определения несобственного интеграла с бесконечным пределом.
2. Дать определение несобственного интеграла от неограниченной функции.
3. В каком случае интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2+4x+4}$ является несобственным?
4. Какие интегралы называются интегралами Эйлера? При каких значениях параметра они сходятся?
5. Справедлива ли следующая запись
$$\int\limits_{-e+1}^{e+1} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_{-e+1}^{e+1} = \ln|e| - \ln|-e| = 1 - 1 = 0\,?$$
6. Найти производную функции $I(y) = \int\limits_y^5 \sin(xy)dx$ двумя способами: 1) вычислив предварительно интеграл; 2) используя формулу (6) из раздела 3.5. Сравнить результаты.

Задачи к главе 3.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx$.
5. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x} \sin x\, dx$.
6. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x} dx$.
7. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$.
8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$.
9. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x^2+1} dx$.

10. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

11. $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$.

12. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

13. $\int\limits_{0}^{\infty}x^2e^{-x}dx$.

14. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

15. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^3}dx$.

16. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$.

17. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln x}}$.

18. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^{3/2}}$.

19. $\int\limits_{1}^{\infty}\ln x dx$.

20. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

21. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

22. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 2x}$.

23. $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{x\ln 2x(\ln(\ln 2x))^3}$.

24. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

25. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$.

26. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\operatorname{arctg}x^3dx}{1+x^6}$.

27. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{\left(x^4+5\right)^{1/2}}$.

28. $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-2x}dx$.

29. $\int\limits_{2}^{\infty}\ln 3x dx$.

30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x\, dx}{1+x^2}$.

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

31. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^4}$.

32. $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln x}}$.

33. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(2x-1)^{3/2}}$.

34. $\int\limits_{0}^{1}\ln x dx$.

35. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

36. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

37. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

38. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x\ln x}$.

39. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x}$.

40. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

41. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x}$.

42. $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

43. $\int\limits_{e}^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x\left(\ln\ln x\right)^2}$.

44. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

45. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^2+1}{x^3}dx$.

46. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

47. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x\left(x-2\right)^2}$.

48. $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{dx}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$.

49. $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

50. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

51. $\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

52. $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

53. $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{dx}{x\left(x-1\right)^2}$.

54. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{4x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$.

55. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}$.

56. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$.

57. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\left(2x+5\right)dx}{x^2+5x}$.

58. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\left(4x+3\sqrt{x}\right)dx}{\left(x^2+x\sqrt{x}\right)^2}$.

59. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{3x\ln^3 x}$.

60. $\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{\cos dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Исследовать интегралы на сходимость:

61. $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{x^3+\sqrt{x^2+4}}{3x^2+x^4+5}dx$.

62. $\int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{x^3+1}-2x\sqrt{x}}{x^2+4}dx$.

63. $\int\limits_{3}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2x^3+3x+4}+2\sqrt[3]{x^2+6}}{3\sqrt[3]{x^8+24}+10}dx$.

64. $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{3x^3+8x+6}-2x+\sqrt{x^2+8}}{3\sqrt[3]{x^4+4x^6}+x^2}dx$.

65. $\int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{3x+8x^2+\sqrt{x^3+4}}{3x^8+2\sqrt{x^2+4}}dx$.

66. $\int\limits_{3}^{\infty} \dfrac{2x\sqrt[3]{x^4+5}+5x}{6x^6+4x^4+2\sqrt{x^2+1}}dx$.

67. $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{2x\sqrt[3]{x^2+4}+3\sqrt{x\sqrt{x}}}{3x^4+25x^2+6}dx$.

68. $\int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{2x\sqrt[3]{3x^2+8}+5x}{3x^2+28}dx$.

69. $\int\limits_{3}^{\infty} \dfrac{3x+\sqrt{x^3+4}}{5x^2+16x^4+3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

70. $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{3x\sqrt{x}-16\sqrt{x^2+4}}{5x^8+16x^2+25\sqrt[3]{x^{12}+4}}dx$.

71. $\int\limits_2^{\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+6}+18}{\sqrt[3]{x^{12}+5}+2x^2}dx$.

72. $\int\limits_3^{\infty} \frac{3x^2+5x+6}{3x^2+\sqrt{x^6+8}}dx$.

73. $\int\limits_4^{\infty} \frac{2x+3x^{18}+\sqrt{x}}{3x^2+16+2\sqrt[3]{x^2}}dx$.

74. $\int\limits_5^{\infty} \frac{5x\sqrt{x}-6x+3}{5x^2+8x^4+\sqrt[3]{x^{12}+4}}dx$.

75. $\int\limits_1^{\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+4}+5x-6}{3\sqrt[3]{x^8+6}+\sqrt{x^{10}+4}}dx$.

76. $\int\limits_2^{\infty} \frac{3x^2\sqrt{x+5}+8x}{3\sqrt[3]{x^4+25}+\sqrt[5]{x^{20}+4}}dx$.

77. $\int\limits_3^{\infty} \frac{8x^2\sqrt{x+5}-4x}{2\sqrt[3]{x^8+6}+24x^4}dx$.

78. $\int\limits_4^{\infty} \frac{2x\sqrt{x}+5}{3\sqrt[3]{x^{12}+4}+5x^2+6}dx$.

79. $\int\limits_1^{\infty} \frac{16\sqrt[3]{x^2+4x^3+8}+3\sqrt{x}}{25x^4+13x^2+6}dx$.

80. $\int\limits_0^{\infty} \frac{2\sqrt{x^3+8x-4}+\sqrt[3]{x^2+3}}{x^4+2x^2+10}dx$.

81. $\int\limits_1^{\infty} \frac{3x^2+5x+16}{16x^4+32\sqrt[3]{x^{12}+8x^2+4}}dx$.

82. $\int\limits_2^{\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+4x+3}}{5x^4+30x^2+16\sqrt{x^2+1}}dx$.

83. $\int\limits_3^{\infty} \frac{3x^5+4x^3+2}{3\sqrt[3]{x^6+8}+4x^2+5}dx$.

84. $\int\limits_4^{\infty} \frac{x^3+2x+4}{2\sqrt[3]{x^{12}+4}+x^4+3}dx$.

85. $\int\limits_5^{\infty} \frac{3x^2+8x^{3/2}+6}{3\sqrt[3]{x^{16}+5}+5x^{10}}dx$.

86. $\int\limits_6^{\infty} \frac{2x^2+\sqrt[3]{3x^4+1}+2\sqrt{x^3}}{2x^{16}+5x^{10}+8}dx$.

87. $\int\limits_1^{\infty} \frac{2x^3+3x^2-8}{25\sqrt{x^8+2x^4}+3\sqrt{x^2+4}}dx$.

88. $\int\limits_2^{\infty} \frac{2x^2+3\sqrt[3]{x^4+3}+5x}{x^{16}+25x^8+3}dx$.

89. $\int\limits_3^{\infty} \frac{2\sqrt[3]{2x^5+8x+9}+\sqrt{x+3}}{3x^2+16x^4+5}dx$.

90. $\int\limits_{4,5}^{\infty} \frac{3x^2+4x+5}{3\sqrt[3]{x^4+25x^2+1}+5\sqrt{x^6+8}}dx$.

ГЛОССАРИЙ

Двойной интеграл (*double integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

Диаметр множества (diameter of a set) – наибольшее расстояние между двумя точками множества.

Замыкание области (*closure of a domain*) – объединение области и ее границы.

Криволинейный интеграл (*curvilinear integral*) – обобщение понятия определенного интеграла, связанное с заменой отрезка интегрирования на дугу кривой линии.

Неопределенный интеграл (*indefinite integral*) – множество всех первообразных подынтегральной функции.

Несобственный интеграл (*improper definite integral*) – интеграл, один из пределов интегрирования которого бесконечен, а также интеграл от разрывной функции.

Определенный интеграл (*definite integral*) – предел последовательности интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка интегрирования.

Первообразная (*antiderivative*) функции $f(x)$ – функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Повторный интеграл (*iterated integral*) – интеграл от функции двух переменных, взятый последовательно по одной переменной, а затем по другой.

Потенциал (потенциальная функция) вектора (*potential*) – функция трех переменных, частные производные которой по соответствующим координатам совпадают с координатами вектора.

Правильная область 1-го типа (*regular domain of 1-st type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.

Правильная область 2-го типа (*regular domain of 2-nd type*) – область на плоскости, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$ и $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.

Рациональная дробь (***rational fraction***) – функция вида $f(x)=\dfrac{P(x)}{D(x)}$, где $P(x)$ и $D(x)$ – многочлены.

Сапог Шварца (*Schwarz's boot*) – вписанный в цилиндр многогранник, сумма площадей граней которого стремится к бесконечности при стремлении диаметров граней к нулю.

Связное множество (***connected set***) – множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству.

Тройной интеграл (*triple integral*) – обобщение понятия определенного интеграла на трехмерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

«Хорошая» кривая (*regular curve*) – кривая, граница которой составлена из конечного числа графиков непрерывных функций.

Циркуляция вектора (*circulation*) – криволинейный интеграл II-рода от векторной функции по замкнутому контуру.

Якобиан (*Jacobian*) – определитель, составленный из частных производных n функций, зависящих от n переменных.

Материалы, относящиеся к данному изданию можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

http://kvm.gubkin.ru/index.html