Глава 5. Тройной интеграл.

5.1. Определение тройного интеграла.

После введения в предыдущей главе понятия двойного интеграла естественно было бы провести его дальнейшее обобщение на трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с заданной декартовой системой координат *OXYZ*. Пусть в области V, ограниченной замкнутой поверхностью $\Pi = \Gamma(V)$, определена непрерывная функция $f(x,y,z) \in C(\bar{V})$. (Напомним, что через $\bar{V} = V \cup \Gamma(V)$ обозначается объединение области V и её границы, или ***замыкание*** области V).

Рассмотрим разбиение T области V на подобласти V_i, пересекающиеся только по своим границам. Выберем в каждой из частей V_i произвольным образом по некоторой точке $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Составим интегральную сумму: $S_T = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot |V_i|$, где через $|V_i|$ здесь обозначен объем области V_i. Как и раньше, диаметром разбиения T назовем число $d_T = \max\limits_{1 \le i \le n} d(V_i)$, равное наибольшему из диаметров частей V_i, где $d(V_i) = \sup\limits_{M,N \in V_i} \rho(M,N)$.

Ограничимся рассмотрением лишь таких тел V, границы $\Pi = \Gamma(V)$ которых являются кусочно-гладкими поверхностями, т.е. состоят из конечного числа гладких поверхностей. При этом ***поверхность*** Π будем называть ***гладкой***, если она выражается параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v), \qquad (u,v) \in \Omega,$$

где Ω – ограниченная область на плоскости переменных (u,v), а функции $\varphi,\ \psi,\ \chi \in C^1(\Omega)$, т.е. непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка на Ω. Будем считать, что граница $\Gamma(\Omega)$ области Ω «хорошая» (см. главу 4), а функции φ, ψ, χ осуществляют взаимно-однозначное отображение поверхности Ω на область П, и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix}$$

равен двум.

Наложенные условия, например, будут выполнены, если поверхность состоит из конечного числа поверхностей, задаваемых выражениями: $z = g(x, y)$, $y = h(x, z)$ или $x = q(y, z)$, причем функции, стоящие в правых частях этих выражений непрерывно дифференцируемы на ограниченных плоских областях с «хорошими» границами.

Границы областей $\Gamma(V_i)$ также будем предполагать кусочно-гладкими. В этих предположениях на область V, разбиение T, и функцию $f(x, y, z)$ можно доказать, что существует предел интегральной суммы S_T (при $d_T \to 0$), не зависящий ни от способа разбиения T, ни от выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$. Этот предел называется тройным интегралом от функции f по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(P)dV = \lim_{d_T \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot |V_i|. \qquad (1)$$

Замечание. Все свойства двойного интеграла, которые были сформулированы в главе 4, справедливы и для тройного интеграла с той только разницей, что слово «*площадь*» везде должно быть заменено словом «*объем*». В частности, объем $|V|$ области V может быть найден по формуле

$$|V| = \iiint\limits_V dV. \qquad (2)$$

5.2. Вычисление тройного интеграла.

В главе 4 было показано, что вычисление двойного интеграла можно свести к вычислению соответствующих повторных интегралов. Ряд аналогичных утверждений имеет место и для тройного интеграла:

Теорема 1. Если тело V заключено между плоскостями $z=a$ и $z=b$ (рис. 1), а любое сечение S_z тела V плоскостью $z=const$ ограничено «хорошей кривой» (см. п. 4.1), то тройной интеграл можно найти по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b F(z)dz = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_{S_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz . \qquad (1)$$

Здесь при каждом фиксированном z величина $F(z) = \iint\limits_{S_z} f(x,y,z)\, dxdy$ представляет собой обычный двойной интеграл.

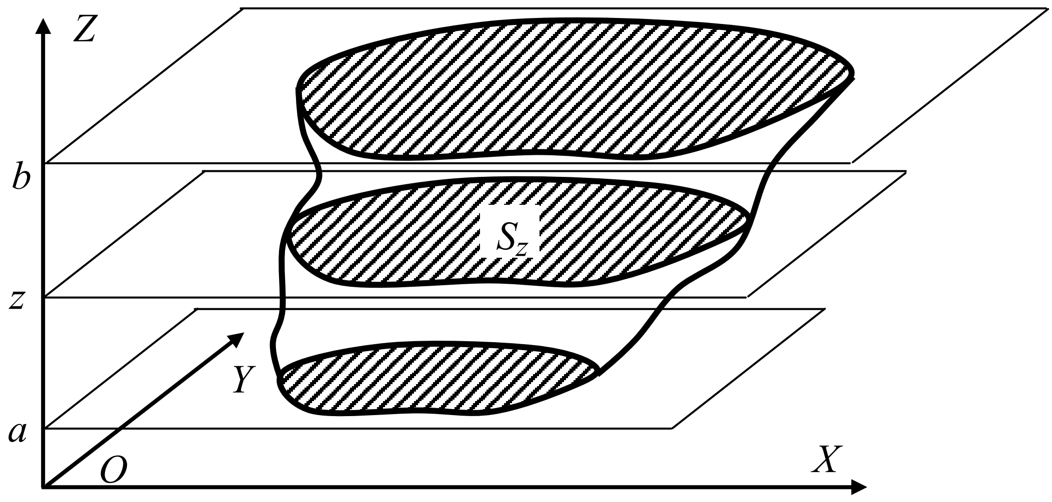

Рис.1. К теореме 1.

Замечание. Отметим, что как и для случая двойного интеграла, при записи тройного интеграла в декартовых координатах может использоваться стандартное обозначение:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz .$$

ПРИМЕР 1. Вычислить тройной интеграл от функции $x^2\,\mathrm{sh}(xy)$ по области, ограниченной плоскостями: $x = 2$, $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ (рис.2).

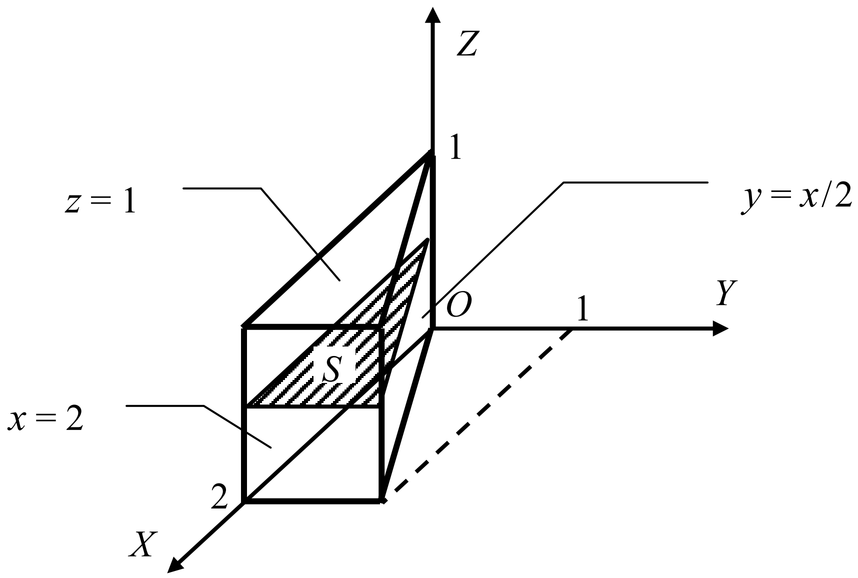

Рис.2. К примеру 1.

Здесь область V представляет собой прямую призму. Сечение тела V плоскостью $z = const$ представляет собой треугольник с границами $x = 2$, $y = x/2$, $y = 0$. Тогда, применяя формулу (1), получаем

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_S x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dxdy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{x/2} \mathrm{sh}(xy)\,dy =$$

$$= z\Big|_0^1 \cdot \int\limits_0^2 x^2 \left(\frac{\mathrm{ch}(xy)}{x}\right)\Bigg|_0^{x/2} dx = \int\limits_0^2 x\,\mathrm{ch}\frac{x^2}{2}\,dx = \mathrm{sh}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = \mathrm{sh}\,2 - 1. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V y^2\cos(xy)\,dxdydz$, где область V ограничена плоскостями $x = 0$, $y = -1$, $y = x$, $z = 0$, $z = 2$.

Область V – прямая призма, основание которой представляет собой треугольник D, лежащий в плоскости OXY (рис. 3).

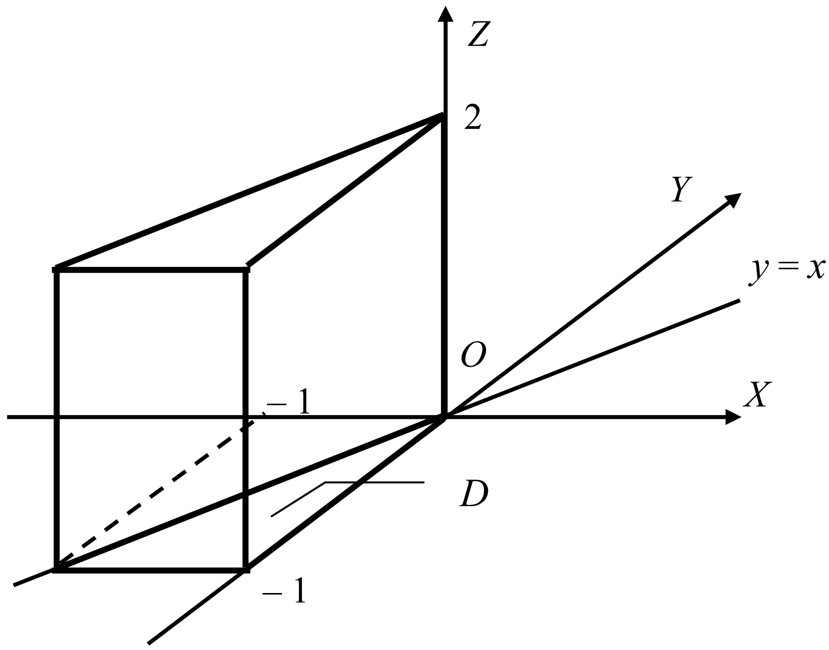

Рис.3. К примеру 2.

Поэтому

$$\int_0^2 dz \iint_D y^2 \cos(xy)dxdy = \int_0^2 dz \int_{-1}^0 dy \cdot y^2 \int_y^0 \cos(xy)dx =$$

$$= \int_0^2 dz \int_{-1}^0 y^2 dy \left.\frac{\sin(xy)}{y}\right|_y^0 = -\int_0^2 dz \int_{-1}^0 \sin\left(y^2\right) y dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 dz \int_{-1}^0 \sin\left(y^2\right) dy^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 dz \left(\left.\cos\left(y^2\right)\right|_{-1}^0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} z\Big|_0^2 \cdot (\cos 0 - \cos 1) = (1 - \cos 1)(2 - 0) \cdot \frac{1}{2} = 1 - \cos 1. \blacksquare$$

Теорема 2. Пусть тело V представляет собой «***цилиндрический брус***», т. е. ограничено с боков цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси OZ, и направляющей $\Gamma(D)$ (границей области D на плоскости OXY), а сверху и снизу – поверхностями $z = \varphi(x,y)$, $z = \psi(x,y)$, где функции φ и ψ непрерывны на замыкании $\bar{D}$ области D и $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ при $(x, y) \in D$ (рис.4). Тогда:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \Phi(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy, \qquad (2)$$

где для каждой фиксированной пары точек (x,y) функция $\Phi(x,y) = \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$ – обычный определенный интеграл.

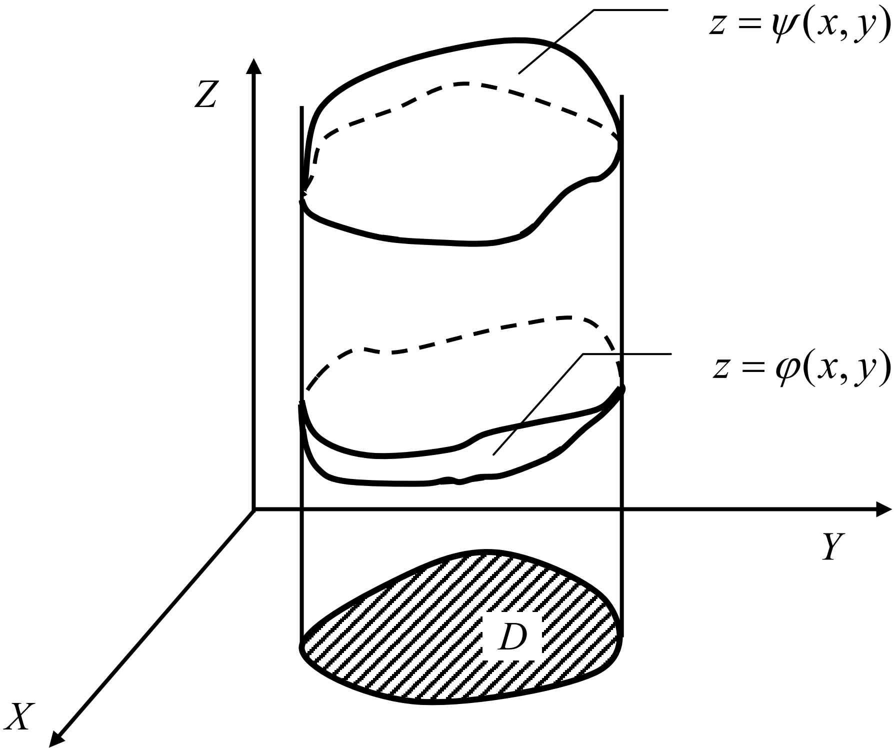

Рис.4. К теореме 2.

ПРИМЕР 3. Вычислить тройной интеграл от функции $f(x,y,z) = x^2 z$ по области V, ограниченной плоскостями: $y = 3x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0$ (рис. 5).

Здесь направляющая цилиндрической поверхности представляет собой границу треугольника D на плоскости OXY (рис. 6), а функции $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = xy$. Поскольку при $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 3x$ выполнено неравенство $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$, тройной интеграл может быть вычислен по формуле (2):

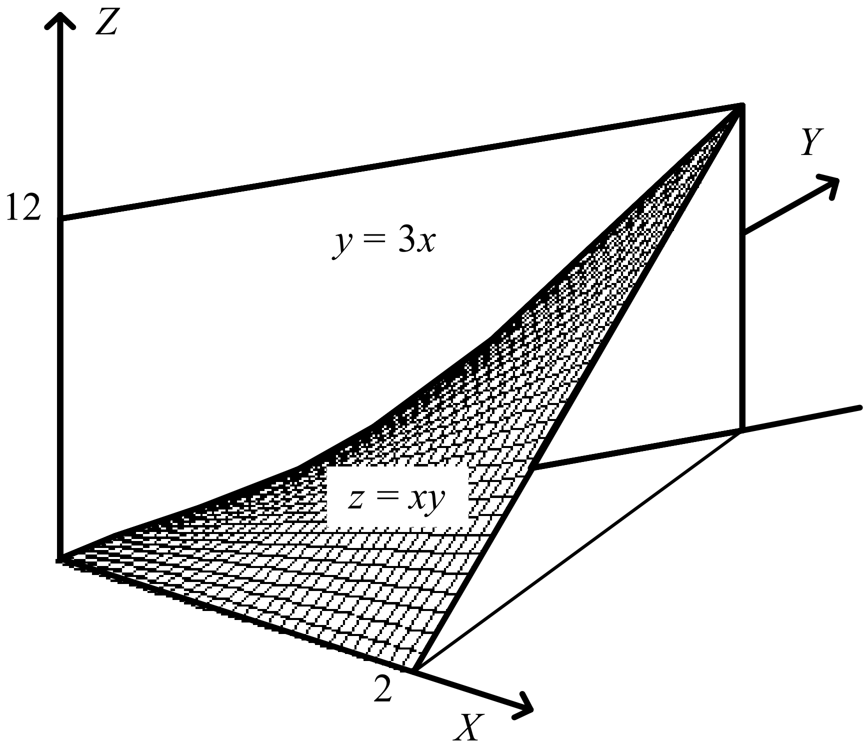

Рис.5. К примеру 3.

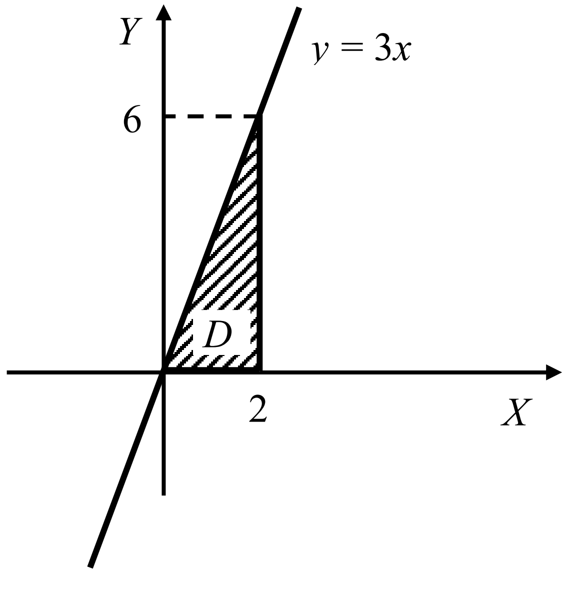

Рис 6. К примеру 3.

$$\iiint\limits_V x^2 z\,dzdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{xy} x^2 z\,dz = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{3x} dy \left(\frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{xy} =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{3x} \frac{x^2 y^2}{2} dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 x^4 dx \int\limits_0^{3x} y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 x^4 dx \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{3x} = \frac{9}{2} \int\limits_0^2 x^7 dx = 144. \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Вычислить тройной интеграл: $I = \iiint\limits_V (27 + 54y^3)\,dxdydz$ по области $V: y = x,\ x = 1,\ z = 0,\ z = \sqrt{xy}.$

Тело V ограничено снизу плоскостью OXY ($z = 0$), с боков – плоскостями $y = x$ и $x = 1$, а сверху – поверхностью $z = \sqrt{xy} \geq 0$ (рис.7).

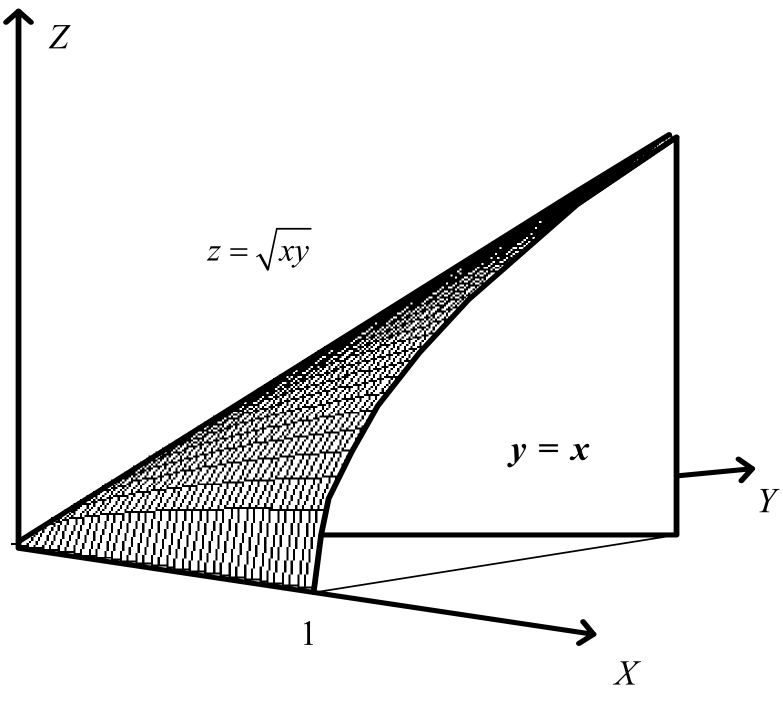

Рис. 7. К примеру 4.

Проекция тела V на плоскость OXY представляет собой треугольник D (рис. 8).

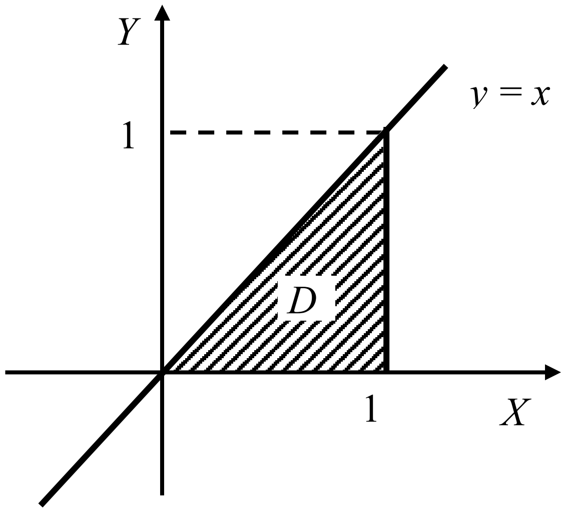

Рис. 8. К примеру 4.

Тогда искомый интеграл равен

$$I=\iint\limits_{D}dxdy\int\limits_{0}^{\sqrt{xy}}(27+54y^{3})dz=\iint\limits_{D}(27+54y^{3})\cdot z\Big|_{0}^{\sqrt{xy}}dxdy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x}(27+54y^{3})\sqrt{xy}\,dxdy=27\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}dx\int\limits_{0}^{x}(\sqrt{y}+2y^{3}\sqrt{y})dy=$$

$$=27\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}dx(y^{3/2}\cdot\frac{2}{3}+2y^{9/2}\cdot\frac{2}{9})\Big|_{0}^{x}=27\int\limits_{0}^{1}(\sqrt{x}\cdot(\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}+\frac{4}{9}\cdot x^{9/2})dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(18x^{2}+12x^{5})dx=(6x^{3}+2x^{6})\Big|_{0}^{1}=6+2=8.\blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x=16\sqrt{2y},\ x=\sqrt{2y},\ z+y=2,\ z=0.$$

Цилиндрическая поверхность с направляющими $x=16\sqrt{2y}$ и $x=\sqrt{2y}$ в плоскости OXY и образующими, параллельными оси z, ограничена снизу плоскостью OXY ($z=0$), а сверху плоскостью $z+y=2$ (рис.9). Сечение тела плоскостью OXY изображено на рис. 10.

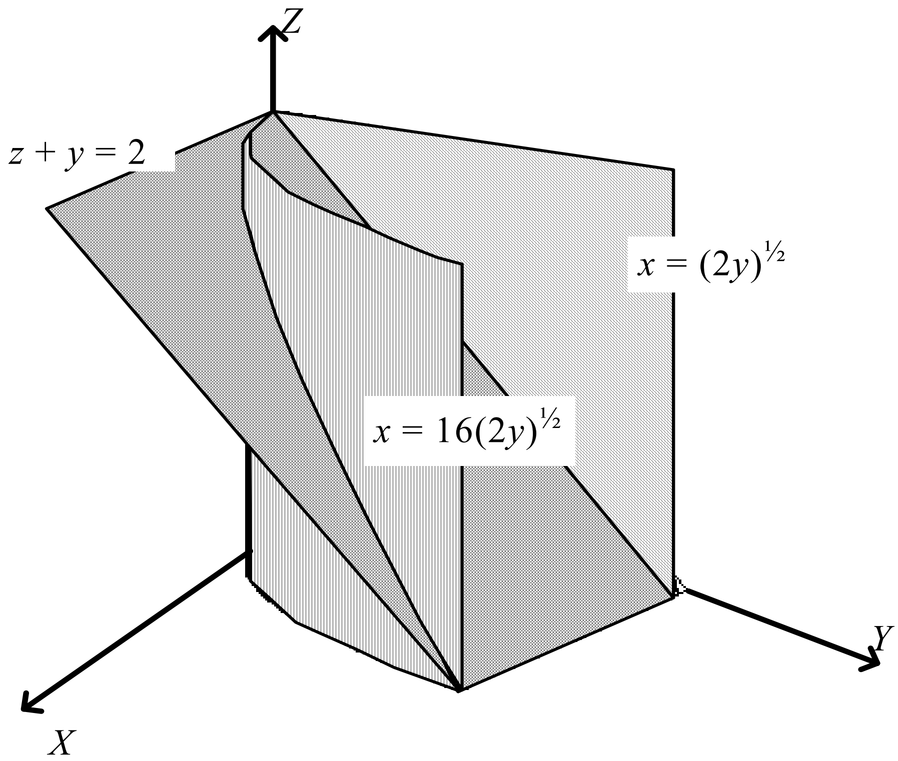

Рис. 9. К примеру 5.

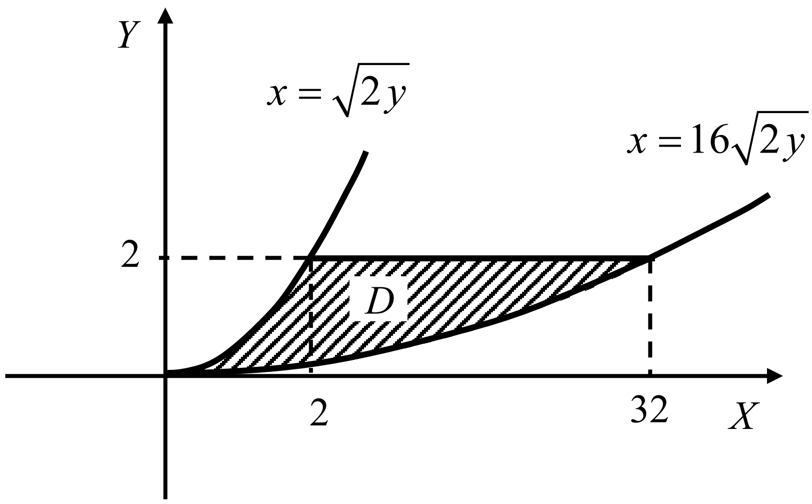

Рис. 10. К примеру 5.

По формуле (2) с учетом замечания из п.5.1 получаем искомый объем:

$$\left|V\right|=\iiint\limits_{V}dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int\limits_{0}^{2-y}dz=\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{\sqrt{2y}}^{16\sqrt{2y}}dx\left(z\Big|_{0}^{2-y}\right)=$$

$$=\int_0^2 dy\cdot(x\Big|_{\sqrt{2y}}^{16\sqrt{2y}}\cdot(2-y))=\int_0^2(16\sqrt{2y}-\sqrt{2y})(2-y)dy=$$

$$=15\sqrt{2}\int_0^2(2-y)\sqrt{y}dy=15\sqrt{2}(\frac{4}{3}y^{3/2}-y^{5/2}\cdot\frac{2}{5})\Big|_0^2=$$

$$=15\sqrt{2}(\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2})=5\cdot 16-3\cdot 16=32. \blacksquare$$

5.3. Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть в трехмерном пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) задана область V, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью $\Pi = \Gamma(V)$, а в пространстве (u, v, w) задана область U, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью $\Omega = \Gamma(U)$. Предположим, что на замыкании $\overline{U}$ области U заданы непрерывно дифференцируемые функции ξ, η и ζ, взаимно однозначно отображающие область U на область V таким образом, что граница Ω области U переходит в границу Π области V:

$$x=\xi(u, v, w),\ y=\eta(u, v, w),\ z=\zeta(u, v, w). \qquad (1)$$

Числа (u, v, w) будем называть ***криволинейными координатами*** точки $P(x, y, z)$, если ее декартовы координаты (x, y, z) заданы через координаты u, v и w с помощью формул (1).

Теорема. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на замыкании $\overline{V}$ области V, то тройной интеграл функции $f(x,y,z)$ по области V может быть выражен через тройной интеграл функции $f\left(\xi(u,v,w),\eta(u,v,w),\zeta(u,v,w)\right)$ по области U следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=$$
$$=\iiint\limits_U f\left(\xi(u,v,w),\eta(u,v,w),\zeta(u,v,w)\right)\cdot\left|J(u,v,w)\right|\cdot dudvdw, \qquad (2)$$

где через $J(u,v,w)$ обозначен ***якобиан*** замены переменных (1):

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \xi'_u & \xi'_v & \xi'_w \\ \eta'_u & \eta'_v & \eta'_w \\ \zeta'_u & \zeta'_v & \zeta'_w \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Рассмотрим два частных случая общей формулы (3).

1. Цилиндрические координаты.

Пусть в одном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы декартовы координаты (x, y, z), а в другом пространстве $\mathbb{R}^3$ – координаты (r, φ, z), причем связь координат установлена соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (4)$$

Координаты (r, φ, z) называются ***цилиндрическими***. Заметим, что при этом пара (r, φ) представляет собой полярные координаты точки $M_1(x, y)$, являющейся ортогональной проекцией точки $M(x, y, z)$ на плоскость OXY (рис.11).

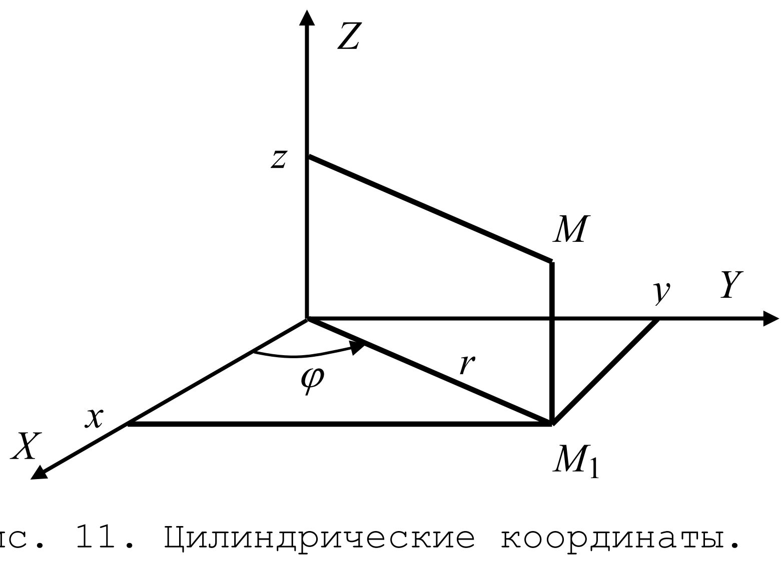

Рис. 11. Цилиндрические координаты.

Ограничимся рассмотрением в пространстве (r, φ, z) только таких областей U, координаты точек которых удовлетворяют условиям: $\{0 \le \varphi < 2\pi,\ r \ge 0\}$, а в пространстве (x, y, z) – областей V, не содержащих ось OZ (на ней $x = y = 0$ и угол φ не определен), а также малую окрестность этой оси. Тогда выполнены условия, предъявляемые к замене координат, а якобиан преобразования к цилиндрическим координатам имеет значение

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$$

Соотношение (2) дает формулу вычисления ***тройного интеграла в цилиндрических координатах***:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_U f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)r\,drd\varphi dz. \qquad (5)$$

ПРИМЕР 1. Вычислить объем тела, ограниченного полусферой $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$ и конусом $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ (рис.12):

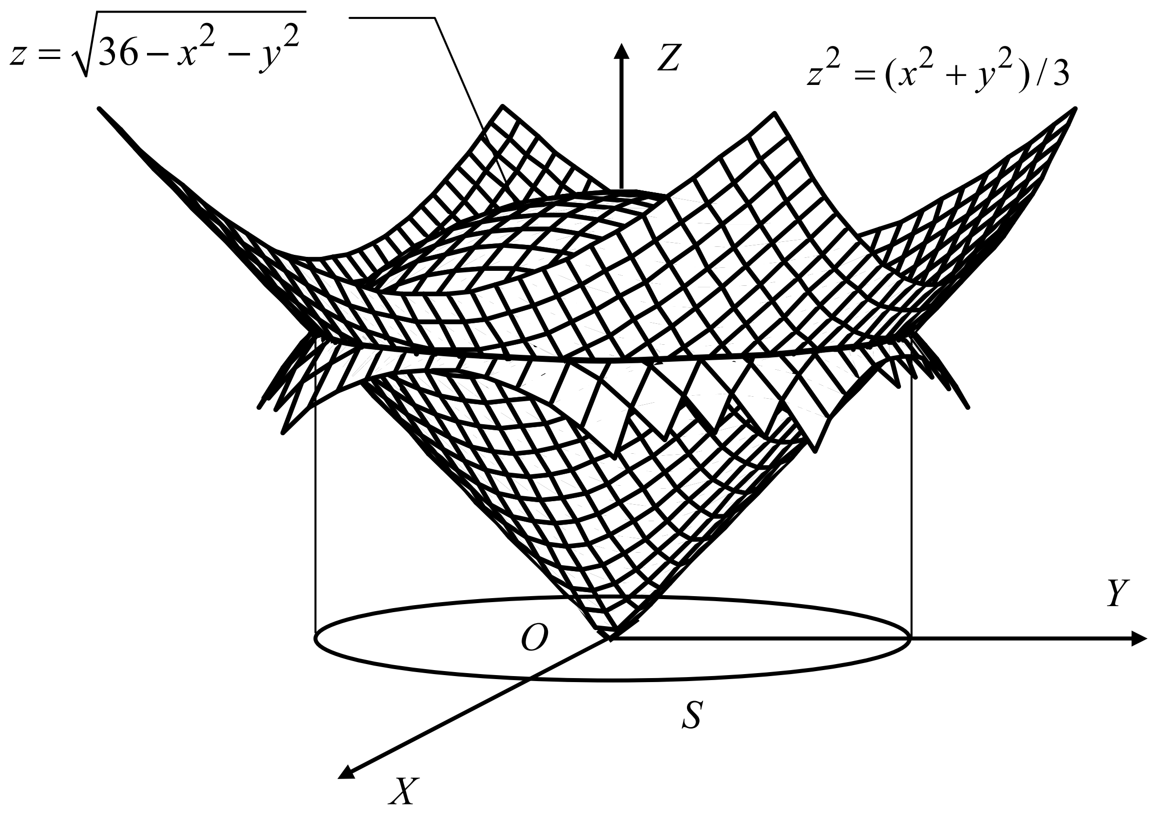

Рис. 12. К примеру 1.

Решим задачу, воспользовавшись переходом к цилиндрическим координатам. В этих координатах уравнения поверхностей имеют вид:

$$z = \sqrt{36 - r^2}, \quad z = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Для координат точек, лежащих на пересечении полусферы и конуса, справедливы соотношения: $r^2 = 3z^2 = 36 - z^2$. Отсюда $z = 3$ (т.к. $z > 0$).

Объем тела найдем, воспользовавшись формулой (3) из п. 5.2. и формулой (5) перехода к цилиндрическим координатам. При этом учтем, что при $0 < z < 3$ плоскость $z = \text{const}$ пересекает конус по окружности радиуса $z\sqrt{3}$, ограничивающей область S_z, а при $3 \le z < 6$ плоскость $z = \text{const}$ пересекает сферу по окружности радиуса $\sqrt{36 - z^2}$, ограничивающей область S'_z. Поэтому в формуле (3) тройной интеграл необходимо разбить на два слагаемых, одно из которых соответствует части тела, расположенной ниже плоскости $z = 3$, а другое – выше этой плоскости:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^3 dz \iint\limits_{S_z} dxdy + \int\limits_3^6 dz \iint\limits_{S'_z} dxdy = \left(\int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{z\sqrt{3}} rdr \right) +$$

$$+ \left(\int\limits_3^6 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{36-z^2}} rdr \right) = \frac{2\pi}{2} \cdot \int\limits_0^3 3z^2 dz + \frac{2\pi}{2} \cdot \int\limits_3^6 \left(36 - z^2\right) dz = 72\pi.$$

Объем тела можно было подсчитать и другим способом: на основе формулы (4) из п. 5.2. Действительно, пусть D – область в плоскости OXY, ограниченная окружностью S, в которую проектируется линия пересечения конуса и сферы (рис. 12). Поскольку на этой линии пересечения $z = 3$, а $r = z \cdot \sqrt{3}$, то радиус окружности равен $3\sqrt{3}$. Поэтому:

$$V=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{36-x^2-y^2}}dz=\iint\limits_D rdrd\varphi\int\limits_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-r^2}}dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{3\sqrt{3}}rdr\int\limits_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-r^2}}dz=2\pi\int\limits_0^{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{36-r^2}-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)rdr=$$

$$=-\frac{2\pi}{2}\int\limits_0^{3\sqrt{3}}\sqrt{36-r^2}\,d\left(36-r^2\right)-2\pi\frac{r^3}{3\sqrt{3}}\Bigg|_0^{3\sqrt{3}}=72\pi.\blacksquare$$

Тот же самый результат! Вопрос о преимуществе одного из двух предложенных способов оставляем на усмотрение читателя.

ПРИМЕР 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2=8x,\ x^2+y^2=11x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0,\ (y\le 0).$$

На плоскости OXY кривые $x^2+y^2=8x \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=16$ и $x^2+y^2=11x \Leftrightarrow (x-\frac{11}{2})^2+y^2=\frac{121}{4}$ представляют собой окружности, центры которых расположены на оси OX в точках 4 и $11/2$, а радиусы равны 4 и $11/2$, соответственно. Таким образом, заданное тело ограничено: с боков – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси OZ, снизу – плоскостью OXY, а сверху – конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис.13). Сечение цилиндрической поверхности плоскостью OXY изображено на рис. 14.

Искомый объем определяется тройным интегралом

$$\left|V\right|=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}}dz.$$

Для вычисления этого интеграла удобно перейти к цилиндрическим координатам, записав в них уравнения поверхностей, ограничивающих тело:

$$x^2 + y^2 = 8x \quad \Rightarrow \quad r^2 = 8r\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad r = 8\cos\varphi,$$
$$x^2 + y^2 = 11x \quad \Rightarrow \quad r = 11\cos\varphi,$$
$$z = r.$$

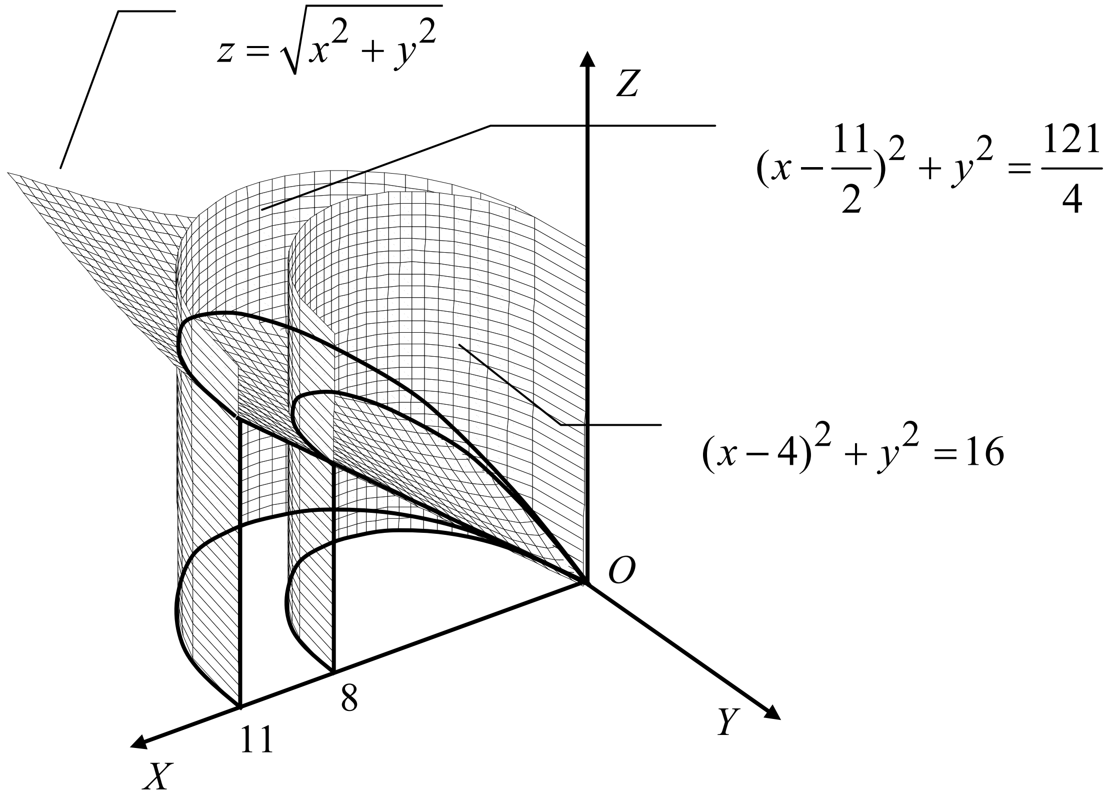

Рис. 13. К примеру 2.

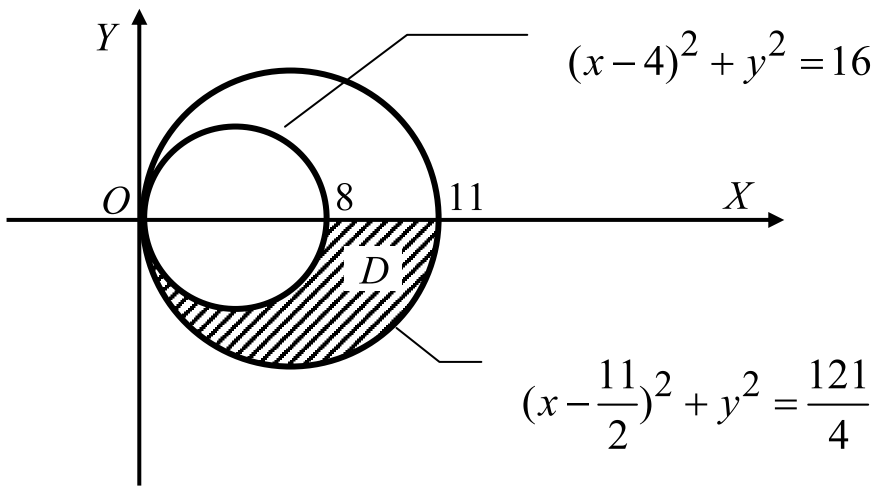

Рис. 14. К примеру 2.

Теперь может быть найден искомый объем:

$$|V| = \iint\limits_D r\,dr\,d\varphi \int\limits_0^r dz = \int\limits_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int\limits_{8\cos\varphi}^{11\cos\varphi} r\,dr \cdot z\Big|_0^r = \int\limits_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int\limits_{8\cos\varphi}^{11\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{0} d\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_{8\cos\varphi}^{11\cos\varphi} = \int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{(11^3 - 8^3)}{3}\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= 273 \int\limits_{-\pi/2}^{0} (1 - \sin^2\varphi)\, d\sin\varphi = 273(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3})\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 273(1 - \frac{1}{3}) = 182. \blacksquare$$

2. Сферические координаты.

Рассмотрим опять два экземпляра пространства $\mathbb{R}^3$, в одном из которых заданы декартовы координаты (x, y, z), а в другом – координаты (r, φ, θ). Соответствие между координатами установим по формулам:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta. \qquad (6)$$

Координаты (r, φ, θ) называются ***сферическими***.

Геометрическая интерпретация сферических координат представлена на рис. 15. Пусть точка $M(x, y, z)$ имеет декартовы координаты (x, y, z), а $r = |\overrightarrow{OM}|$ – длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Если M_1 – ортогональная проекция точки M на плоскость OXY, то θ – угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_1}$, отсчитываемый от $\overrightarrow{OM_1}$ к $\overrightarrow{OM}$, (т. е. $\theta > 0$, если координата z точки M положительна, и $\theta < 0$, если она отрицательна). Очевидно, что угол θ расположен в пределах $-\pi/2 \le \theta \le$ $\le \pi/2$.

Переменная φ, $(0 \le \varphi < 2\pi)$ представляет собой угол, отсчитываемый в плоскости OXY от положительного направления оси OX к вектору $\overrightarrow{OM_1}$.

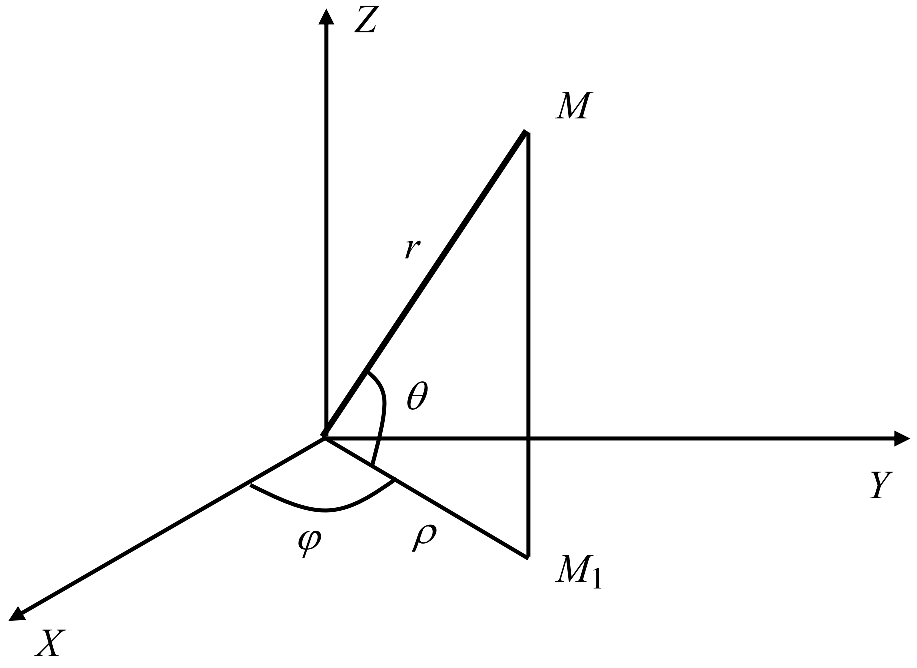

Рис. 15. Сферические координаты.

Будем в пространстве (r, φ, θ) рассматривать только такие области U, координаты точек которых удовлетворяют соотношениям: $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $r \ge 0$. В пространстве (x, y, z) будем рассматривать области, не содержащие точку (0, 0, 0) вместе с ее малой окрестностью (в точке (0, 0, 0) не определены значения углов φ и θ). Для указанных областей соответствие (6) удовлетворяет условиям, накладываемым при замене координат.

Для перехода к сферическим координатам в тройном интеграле можно воспользоваться формулами (2) и (3), где ***якобиан*** преобразования (6) имеет вид:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -r\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta \\ -r\cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \cdot \cos\theta. \qquad (7)$$

Поскольку $\cos\theta \ge 0$ при $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, то абсолютная величина якобиана равна $r^2\cos\theta$, и, следовательно, ***тройной интеграл в сферических координатах*** записывается в виде

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_U f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \quad (8)$$

ПРИМЕР 3. Найти объем тела, заданного неравенствами:

$$16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, \quad 0 \le z \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}, \quad y \le 0, \quad y \le -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Введем сферические координаты. Неравенства $y \le 0$, $y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$ задают двугранный угол, образованный плоскостями, проходящими через ось OZ, и имеющий в плоскости OXY сечение, изображенное на рис. 16а. Точки, лежащие в двугранном угле, имеют координату φ, лежащую в пределах от π до $11\pi/6$.

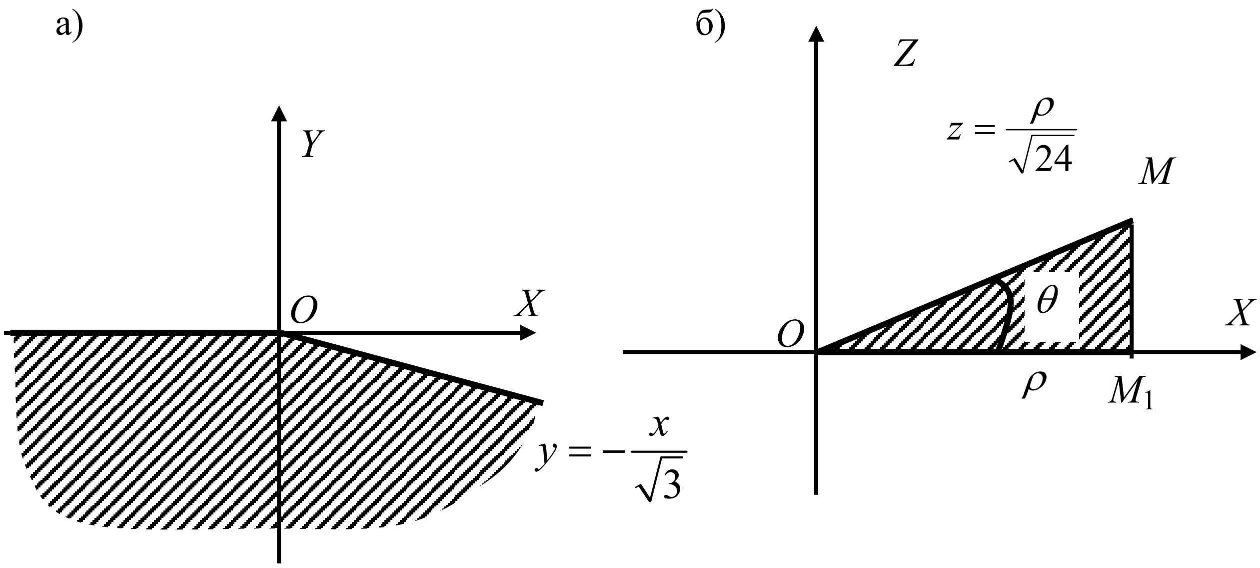

Рис.16. К примеру 3.

Пусть $\rho^2 = x^2 + y^2$, где ρ – длина вектора $\overrightarrow{OM_1}$ (см. рис.15). Тогда область $0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} = \dfrac{\rho}{2\sqrt{6}}$ в плоскости OMM_1 имеет сечение, изображенное на рис 16б. Угол θ определяется из треугольника OMM_1: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{z}{\rho}$. Следовательно, в рассматриваемой области значения угла θ меняются в пределах от 0 до $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Неравенства $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100$ задают шаровой слой между сферами $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Для точек, лежащих в этом шаровом слое координата r принимает значения: $4 \le r \le 10$.

Вычисляя объем в сферических координатах по формуле (8), получаем:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_U r^2 \cos\theta drd\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_4^{10} r^2 dr \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}} \cos\theta d\theta \int\limits_{\pi}^{\frac{11\pi}{6}} d\varphi = \left.\frac{r^3}{3}\right|_4^{10} \cdot \left.\sin\theta\right|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}} \cdot \left.\varphi\right|_{\pi}^{\frac{11\pi}{6}} = 52\pi. \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x = -2y^2 + 5;\ z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2};\ z = 2 - \sqrt{x^2 + 25y^2};\ x = 3.$$

Воспользуемся формулой (4) из раздела 5.2 вычисления тройного интеграла для «цилиндрического бруса»:

$$|V| = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{2-\sqrt{x^2+25y^2}}^{5-\sqrt{x^2+25y^2}} dz,$$

где область D изображена на рис. 17.

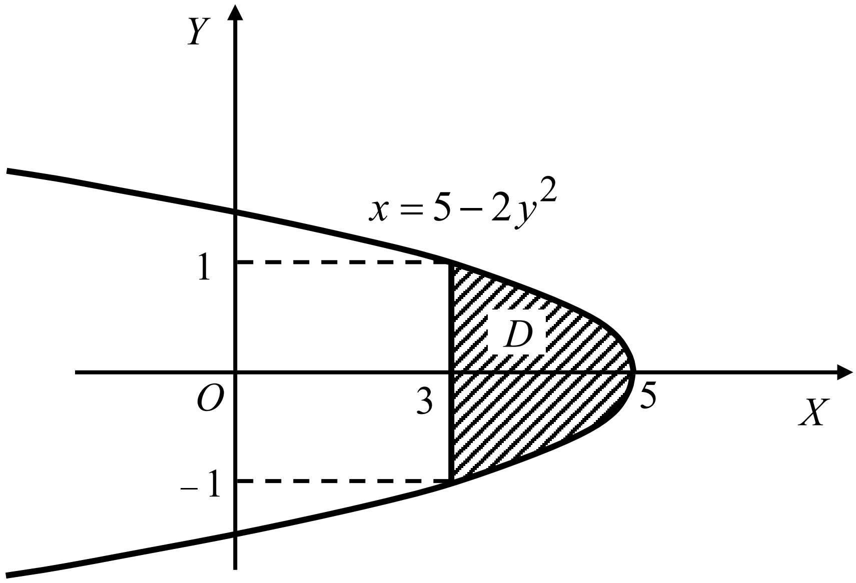

Рис. 17. К примеру 4.

Тогда

$$|V| = \int_{-1}^{1} dy \int_{3}^{5-2y^2} dx \cdot z\Big|_{2-\sqrt{x^2+25y^2}}^{5-\sqrt{x^2+25y^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \int_{3}^{5-2y^2} (5 - \sqrt{x^2 + 25y^2} - 2 + \sqrt{x^2 + 25y^2})dx =$$

$$= 3\int_{-1}^{1} dy \cdot x\Big|_{3}^{5-2y^2} = 3\int_{-1}^{1} (5 - 2y^2 - 3)dy = 3 \cdot 2\int_{-1}^{1} (1 - y^2)dy =$$

$$= 6(y - \frac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = 6(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8. \blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $z = 8(x^2 + y^2) + 3$; $z = 16x + 3$.

Плоскость $z = 16x + 3$ проходит через прямую $z = 16x + 3$ в плоскости OXZ, параллельна оси OY и отсекает от параболоида $z = 8(x^2 + y^2) + 3$ область V (рис. 18). Проекция сечения на плоскость OXY задается уравнением

$$16x + 3 = 8(x^2 + y^2) + 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

т.е. представляет собой окружность (рис. 19). В полярных координатах уравнение этой окружности имеет вид

$$r^2 = 2r\cos\varphi .$$

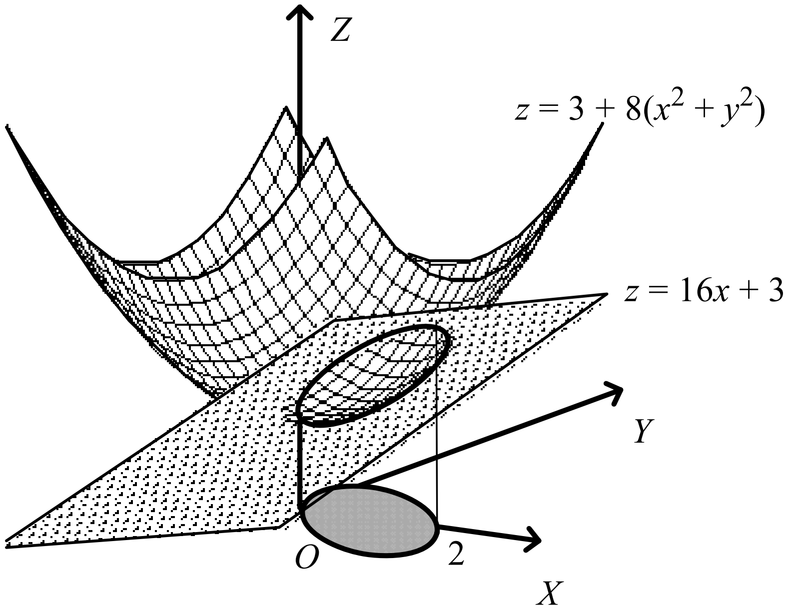

Рис. 18. К примеру 5.

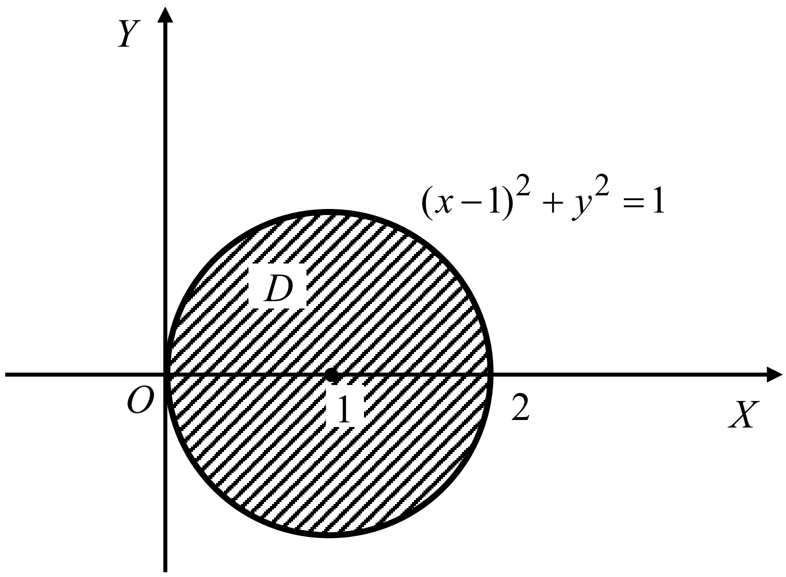

Рис. 19. К примеру 5.

Тогда искомый объем задается тройным интегралом:

$$|V|=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{8(x^2+y^2)+3}^{16x+3}dz=$$

$$=\iint\limits_D dxdy(16x+3-8(x^2+y^2)-3).$$

Полученный двойной интеграл удобно вычислить, переходя к полярным координатам:

$$|V|=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}(16r\cos\varphi-8r^2)r\,dr=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(16\cos\varphi\cdot\frac{r^3}{3}-8\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{16\cdot 8}{3}\cos^4\varphi-32\cos^4\varphi\right)d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{8}{3}\left(\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{8}{3}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=4\pi.$$

Таким образом, искомый объем тела равен 4π. ▪

Упражнение. Вычислить объем тела из примера 6 с помощью перехода к сферическим координатам.

Теоретические вопросы к главе 5.

1. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ через повторные интегралы различными способами, если область V ограничена поверхностями $x = 0$, $x = 2$, $z = 2y$, $y = 1$.
2. Какой из интегралов больше $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x, y, z)dz$ или $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y f(x, y, z)dz$, если $f(x, y, z) > 0$?
3. Оценить величину интеграла $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$, где область V задается неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, причем $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.
4. Какова формула перехода в тройном интеграле к цилиндрическим координатам?
5. Какова формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле?
6. Криволинейные координаты (u, v, w) в трехмерном пространстве задаются соотношениями $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$, $z = w$. Записать формулу перехода к таким координатам в тройном интеграле.

Задачи к главе 5.

Записать тройные интегралы с помощью повторных интегралов вида $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ и вычислить их:

1. $\iiint\limits_V zdxdydz$; V – часть пространства, ограниченная плоскостями $z = 0$, $x = 1$, $x = y$, $y = 0$ и полуконусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. $\iiint\limits_V zdxdydz;$ V – часть пространства, заключенная между плоскостями $y=0,\ x=5, y=5x,\ z=0$ и параболоидом $z=\sqrt{xy}$.

3. $\iiint\limits_V \sqrt{z}dxdydz;$ V – множество точек, заключенных между плоскостями $y=0,\ x=2,\ z=2-x,\ z=4-2x$ и цилиндром $y=2\sqrt{x}$.

Вычислить тройные интегралы:

4. $\iiint\limits_V x^2 z\cdot\sin\frac{xyz}{3}dxdydz;\quad V:\{x=1, y=4, z=\pi; x=0, y=0, z=0\}.$

5. $\iiint\limits_V y^2\cdot\cos\frac{\pi xy}{4}dxdydz;\quad V:\left\{\ x=0, y=-1, z=-\pi^2, y=x/2, z=0\right\}.$

6. $\iiint\limits_V (8y+12z)dxdydz;\quad V:\left\{x=1, y=x, z=3x^2+2y^2, y=0, z=0\right\}.$

7. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6};\quad V:\left\{\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1\ ; x=0, y=0, z=0\right\}.$

8. $\iiint\limits_V \left(x+2y^2+3z^3\right)dxdydz;\quad V:\left\{x=3, y=5x, z=x^2+5xy, y=0, z=0\right\}.$

Вычислить интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам:

9. $\iiint\limits_V xdxdydz;$ V – часть цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенная между плоскостями $z=a,\ z=b.$

10. $\iiint\limits_V zdxdydz;$ V – часть цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенная между плоскостями $z=a,\ z=b.$

11. $\iiint\limits_V ydxdydz;$ V – часть цилиндра $(x-1)^2+(y-3)^2=10$, заключенная между плоскостями $z=0,\ z=5.$

Вычислить повторные интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам:

12. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$

13. $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

14. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h} \sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

15. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)dz.$

Вычислить интегралы, перейдя к сферическим координатам:

16. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; V – шаровой слой, заключенный между сферами радиусов r и R, с центрами в начале координат.

17. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$; V – верхняя часть шара с центром в начале координат радиуса R, вырезаемая из него конусом $x^2+y^2=z^2$.

Вычислить повторные интегралы, перейдя к сферическим координатам:

18. $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$

19. $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,dz.$

20. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{z}\, dz.$

Найти объем тел, заданных ограничивающими их поверхностями:

21. $V:\left\{ y=5\sqrt{x},\;\; y=5x/3,\; z=0,\; z=5+5\sqrt{x}/3 \right\}.$

22. $V:\left\{ x+y=2,\; z=12x/5,\; z=0,\; x=0\;\; x=\sqrt{y} \right\}.$

23. $V:\left\{ x=15\sqrt{y},\;\; x=15y,\; z=0,\; z=15\left(1+\sqrt{y}\right) \right\}.$

24. $V:\left\{ y=\sqrt{5x},\;\; y=0,\; z=0,\; x^2+y^2=50,\; z=3x/11 \right\}.$

25. $V:\left\{ z=0,\; x^2+y^2=y,\; x^2+y^2=4y,\; z=\sqrt{x^2+y^2} \right\}.$

26. $V:\left\{ y=5,\; x^2+3=y,\; z=2x^2-y^2+1,\; z=2x^2-y^2+5 \right\}.$

27. $V:\left\{ x=2y^2-3,\; x=-7y^2+6,\; z=1+\sqrt{x^2+16y^2}, z=-3+\sqrt{x^2+16y^2} \right\}.$

28. $V:\left\{ x=4y^2+2,\; x=6,\; z=x^2+4y^2+y+1, z=x^2+4y^2+y+4 \right\}.$

29. $V:\left\{ y=3x^2-5,\; y=-6x^2+4,\; z=10x^2-y^2+2,\; z=10x^2-y^2-2 \right\}.$

30. $V:\left\{ 6z=x^2+y^2,\; z=\sqrt{16-x^2-y^2} \right\}.$

31. $V:\left\{ z=22-x^2-y^2,\; z=9\sqrt{x^2+y^2} \right\}.$

32. $V:\left\{ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{80}},\; z=\sqrt{9-x^2-y^2} \right\}.$

33. $V:\left\{ 4\le x^2+y^2+z^2\le 25,\; z\le\sqrt{x^2+y^2},\; -x\le y\le -x/\sqrt{3} \right\}.$

34. $V:\left\{16 \le x^2+y^2+z^2 \le 100,\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ x\sqrt{3} \le y \le 0\right\}.$

35. $V:\left\{36 \le x^2+y^2+z^2 \le 144,\ 0 \ge z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \ge x\sqrt{3},\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}.$

36. $V:\left\{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)},\ -x\sqrt{3} \le y \le 0\right\}.$

Найти массу тела V с плотностью μ, ограниченного поверхностью П:

37. $\mu = 2(x^2+y^2)$, П: $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, $z=0$, $z\ge 0$, $y \ge 0$.

38. $\mu = |z|$, П: $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2\le 4$, $x=0$, $x\ge 0$.

39. $\mu = 5yz$, П: $x^2+y^2=16z^2$, $x^2+y^2=4z$, $x=0$, $y=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

40. $\mu = x+2y+4z$, П: $0\le x\le 10$, $0\le y\le 20$, $0\le z\le 40$.