Глава 4. Двойной интеграл.

4.1. Понятие двойного интеграла.

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Вместо функции одной переменной $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$ здесь мы будем рассматривать функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную на некоторой ограниченной области D декартовой плоскости OXY. На область D будем накладывать ряд требований.

Прежде всего, потребуем, чтобы область D обладала конечной площадью. Например, площадь определена для такой области D, граница $\Gamma(D)$ которой составлена из конечного числа графиков непрерывных функций $y = \varphi_i(x)$ или $x = \psi_j(y)$. Далее такие кривые, для удобства, будем называть ***«хорошими»***. Площадь области D будем обозначить через $|\boldsymbol{D}|$. ***Замыканием*** $\bar{D}$ области D назовем объединение области и её границы:

$$\bar{D} = D \cup \Gamma(D).$$

Будем считать, что для всех точек $(x, y) \in \bar{D}$ определена и непрерывна функция $f(x,y)$.

Рассмотрим разбиение T области D на подобласти $D_1, D_2, \ldots, D_n$, удовлетворяющие свойствам (рис.1):

1) объединение подобластей D_i полностью покрывает область D;
2) подобласти D_i могут пересекаться только по своим граничным точкам;
3) границы $\Gamma(D_i)$ подобластей D_i представляют собой «*хорошие*» кривые, т.е. определены их площади $|D_i|$.

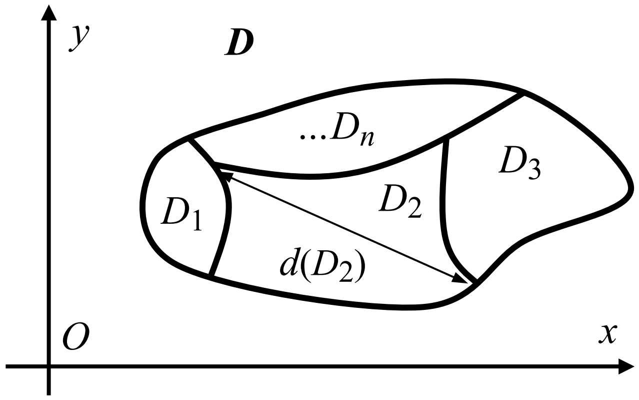

Рис. 1. Область ***D*** и ее разбиение на части.

Определим ***диаметр*** множества D_i как наибольшее из расстояний $\rho(M, N)$ между точками M и N множества D_i. Отметим, что в некоторых случаях это наибольшее расстояние может не существовать. Приведем подобный пример.

Пусть расстояния между точками некоторой области принимают значения:

$$\{1, 3/2, 5/3, 7/4, \ldots, (2n - 1)/n, \ldots\}.$$

Очевидно, что последовательность расстояний $a_n = (2n - 1)/n$ стремится к числу 2, оставаясь меньше этого числа, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. При этом самого значения “2“ среди расстояний нет. Поэтому нельзя написать:

$$\max_{n\in N} a_n = 2.$$

В подобных случаях записывают:

$$\sup_{n\in N} a_n = \sup_{n\in N} \frac{2n-1}{n} = 2,$$

где обозначение "**sup**" происходит от латинского "***supremum***" ("*наивысший*").

Запись:

$$\sup_{a\in A} f(a) = b$$

означает, что для всех точек $a \in A$ значение функции $f(a)$ не больше, чем b, но при этом для любого значения $\varepsilon > 0$ найдётся такая точка $a_\varepsilon \in A$, что $f(a_\varepsilon)$ будет больше, чем величина $b - \varepsilon$. Другими словами, значения функции $f(a)$ могут быть как угодно близкими к величине b, не превосходя, тем не менее, самой этой величины.

Диаметр множества D_i определим следующим образом:

$$d(D_i) = \sup_{M,N \in D_i} \rho(M,N).$$

Диаметром d_T всего разбиения T назовем наибольшее из чисел $d(D_i)$:

$$d_T = \max_{1 \le i \le n} d(D_i).$$

Продолжим теперь процедуру определения двойного интеграла, знакомую нам по понятию определенного интеграла из главы 2. Выберем в каждой части D_i произвольным образом точку P_i с координатами (ξ_i, η_i), и составим сумму:

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |D_i|, \tag{1}$$

которую назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y)$ в области D.

Теперь, наконец, можно ввести понятие двойного интеграла.

Определение. Если существует предел интегральных сумм (1) при стремлении к нулю диаметра разбиений d_T, причем он не зависит ни от выбора разбиений T, ни от выбора точек P_i в областях D_i, то такой предел называется ***двойным интегралом от функции f (x,y) по области D***:

$$\iint_D f(x,y)dD = \lim_{d_T \to 0} S_T = \lim_{d_T \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |D_i|. \tag{2}$$

Замечание. Существует еще одно общепринятое и, в ряде случаев, более удобное обозначение двойного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy,$$

которое в дальнейшем будет использоваться наряду с обозначением (2).

Осталось ответить на вопрос, не слишком ли обременительными являются требования, сформулированные в определении двойного интеграла. Сформулируем без доказательства теорему:

Теорема 1. Если область D ограничена «*хорошими*» кривыми и функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на замыкании $\bar{D}$ области D, то двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dD$ существует.

Геометрический смысл двойного интеграла.

Пусть область D на плоскости OXY и определенная на ней неотрицательная функция $f(x,y)$ удовлетворяют всем допущениям п.4.1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ тело (**"*криволинейный цилиндр*"**), ограниченное сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – плоскостью OXY, а по бокам – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси OZ, в качестве направляющей которой взята граница $\Gamma(D)$ области D (рис. 2).

Разобьём область D на части D_i «хорошими» кривыми (в частности, например, в качестве таких кривых могут быть взяты прямые, параллельные осям OX и OY). Обозначим через ΔV_i объем части тела, расположенной над областью D_i. Очевидно, что объём V всего тела равен сумме элементарных объёмов ΔV_i:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i\,. \tag{3}$$

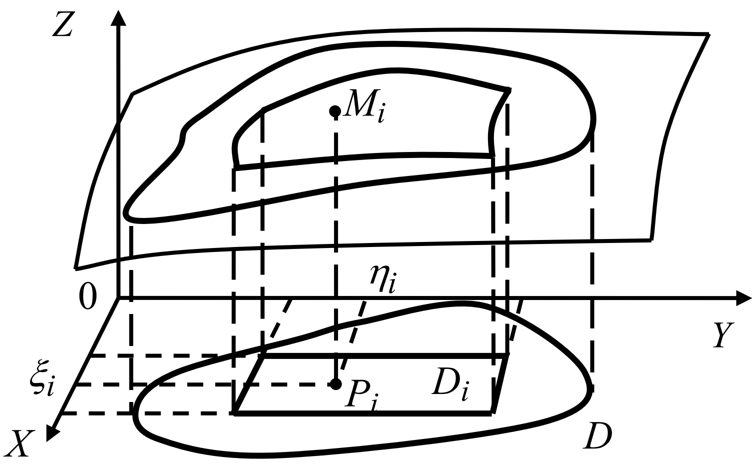

Рис. 2. К геометрическому смыслу двойного интеграла.

Если диаметр разбиения d_T достаточно мал, то каждый элементарный криволинейный цилиндр с основанием D_i можно заменить на прямой цилиндр с высотой, равной значению функции $f(x,y)$ в произвольной точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$ основания. (Для этого у элементарного цилиндра нужно срезать "шапочку", т.е. его верхнюю криволинейную часть, по плоскости, параллельной плоскости OXY). Объем полученного прямого цилиндра равен площади его основания $|D_i|$, умноженной на высоту $f(\xi_i,\eta_i)$. Тогда для каждого элементарного объема имеем

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\cdot|D_i|.$$

Объем всего тела в соответствии с равенством (3) получаем суммированием всех элементарных объемов:

$$V = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot|D_i|. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) есть интегральная сумма функции $f(x,y)$ в области D. Перейдем в соотношении (4) к пределу, устремляя к нулю диаметр разбиений d_T. Тогда по определению двойного интеграла имеем:

$$V = \lim_{d_T\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot|D_i| = \iint\limits_D f(x,y)dD. \tag{5}$$

Таким образом, нами показано, что в случае неотрицательной функции $f(x,y)$ двойной интеграл по области D представляет собой объём криволинейного цилиндра, построенного на области D и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

Свойства двойных интегралов, которые будут сформулированы ниже, во многом аналогичны свойствам определенных интегралов:

Свойства двойных интегралов:

❶. Если D – ограниченная область с «хорошей» границей, то

$$\iint_D dD = |D| \, ,$$

где $|D|$ – площадь области D.

Действительно, для этого двойного интеграла $S_T = \sum_{i=1}^{n} |D_i| = |D| = const$.

Тогда $\iint_D dD = \lim_{d_T \to 0} |D| = |D|$, (как предел постоянной величины).

❷. Линейность двойного интеграла:

$$\iint_D (Af(x,y) + Bg(x,y))dD = A\iint_D f(x,y)dD + B\iint_D g(x,y)dD,$$

где A и B – постоянные, а функции f и g интегрируемы на ограниченной области D с «хорошей» границей.

❸. Если ограниченная область D с «хорошей» границей разрезана «хорошей» кривой на части D_1 и D_2, а функция $f(x, y)$ интегрируема на области D, то

$$\iint_D f(x,y)dD = \iint_{D_1} f(x,y)dD + \iint_{D_2} f(x,y)dD.$$

❹. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы на ограниченной области D с «хорошей» границей и $f(x, y) \le g(x, y)$ для всех $(x, y) \in D$, то

$$\iint\limits_D f(x, y) dD \le \iint\limits_D g(x, y) dD.$$

Следствие 1. $\left| \iint\limits_D f(x, y)\, dD \right| \le \iint\limits_D |f(x, y)|\, dD.$

Следствие 2. Если $m \le f(x, y) \le M$ для всех точек $(x, y) \in \overline{D}$, то

$$m \cdot |D| \le \iint\limits_D f(x, y)\, dD \le M \cdot |D|.$$

Доказательства свойств 2–4 дословно повторяют доказательства соответствующих свойств для определённого интеграла и поэтому не приводятся.

❺. Теорема о среднем.

Формулировка этого свойства для двойных интегралов потребует предварительного введения нового понятия.

Назовем ***связным множеством*** (на плоскости или в пространстве) такое множество, у которого любые две точки можно соединить непрерывной кривой, полностью лежащей внутри этого множества. Пример связного множества представлен на рисунке 3а, пример несвязного – на рисунке 3б.

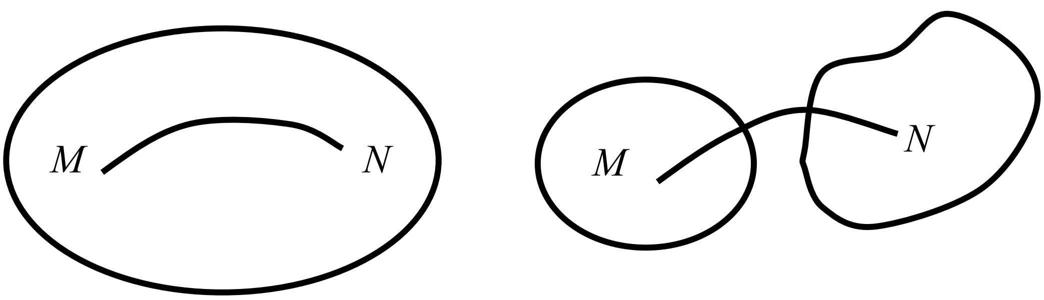

Рис.3а. Связное множество. Рис.3б. Несвязное множество.

Теперь может быть сформулирована

Теорема о среднем. Пусть D – связная ограниченная область с «хорошей» границей и пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на замыкании $\bar{D}$ области D. Тогда существует точка $(\tilde{x},\tilde{y})\in D$, для которой выполнено равенство:

$$\iint\limits_D f(x,y)dD = f(\tilde{x},\tilde{y})\cdot|D|. \qquad (6)$$

Доказательство. Любая непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве достигает своего наибольшего и своего наименьшего значений. Следовательно существуют точки $A(x_0, y_0)\in\bar{D}$ и $B(x_1, y_1)\in\bar{D}$ такие, что $m=\min f(x,y)=f(x_0,y_0)$ и $M=\max f(x,y)=f(x_1,y_1)$. Из связности D существует непрерывная кривая, соединяющая точки A и B. Запишем эту кривую в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[t_0,t_1], \text{ где } \begin{cases} x(t_0)=x_0, \\ y(t_0)=y_0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x(t_1)=x_1, \\ y(t_1)=y_1. \end{cases}$$

Функция $F(t)=f(x(t), y(t))$ непрерывна как суперпозиция (сложная функция) непрерывных функций и принимает на концах отрезка $[t_0, t_1]$ значения m и M. По свойству непрерывной функции для любого числа C, лежащего между m и M, $(m < C < M)$, существует такая точка $t_c\in[t_0, t_1]$, что $F(t_c) = C$.

Теперь осталось вспомнить следствие 2 свойства 4:

$$m\cdot|D|\le\iint\limits_D f(x,y)\,dD\le M\cdot|D|,$$

или

$$m\le\frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x,y)\,dD\le M.$$

Возьмём в качестве числа C величину

$$C=\frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x,y)\,dD. \qquad (7)$$

Тогда существует такое значение t_c, что

$$C=F(t_c)=f(x(t_c),y(t_c))=f(\tilde{x},\tilde{y}), \qquad (8)$$

где мы обозначили $\tilde{x} = x(t_c)$, $\tilde{y} = y(t_c)$.

Из выражений (7) и (8) получаем формулу (6). Число $C = f(\tilde{x}, \tilde{y})$ называют ***средним значением*** функции $f(x,y)$ на области D.

4. 2. Вычисление двойного интеграла.

Рассмотрим на плоскости OXY область D, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где функции φ_1, φ_2 непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, (рис. 4). Такую область будем называть ***правильной областью первого типа***. Пусть также задана функция $f(x, y)$, непрерывная на $\overline{D}$.

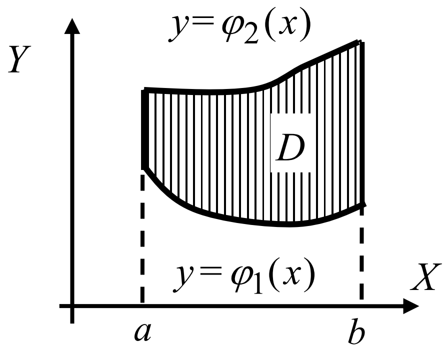

Рис.4. Правильная область первого типа.

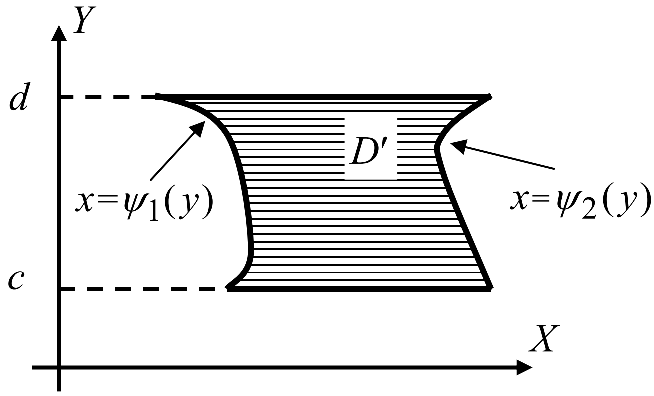

Рис.5. Правильная область второго типа.

Для любого фиксированного значения $x \in [a, b]$ можно определить функцию

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \tag{1}$$

Функция $F(x)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, b]$. Назовем ***повторным интегралом*** значение определённого интеграла от функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$I_D = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (2)$$

Аналогично может быть рассмотрена область D', ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, (рис. 5), где функции ψ_1 и ψ_2 непрерывны на отрезке $[c, d]$, причем $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$. Такая область называется ***правильной областью второго типа***.

Для непрерывной функции $f(x,y)$ можно определить повторный интеграл, аналогичный интегралу (2), но с другим порядком интегрирования по переменным x и y:

$$I'_{D'} = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (3)$$

ПРИМЕР 1. Вычислить повторный интеграл $\int_1^3 dx \int_x^{x^3} \left(x^2 + xy\right)dy$.

Область интегрирования изображена на рис. 6. Вычислим вначале внутренний интеграл:

$$\int_x^{x^3} \left(x^2 + xy\right)dy = x^2 \cdot \int_x^{x^3} dy + x \cdot \int_x^{x^3} y\,dy = x^2 \cdot y\Big|_x^{x^3} + x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{x^3} =$$

$$= x^2(x^3 - x) + \frac{x}{2}\cdot(x^6 - x^2) = \left(x^5 - x^3 + \frac{x^7}{2} - \frac{x^3}{2}\right).$$

Заметим, что в результате вычисления внутреннего интеграла получена функция переменной x. Эта функция должна быть взята в качестве подынтегральной для внешнего интеграла:

$$\int_1^3 \left(x^5 - x^3 + \frac{x^7}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{1504}{3}.$$

Это и есть искомый повторный интеграл. ▪

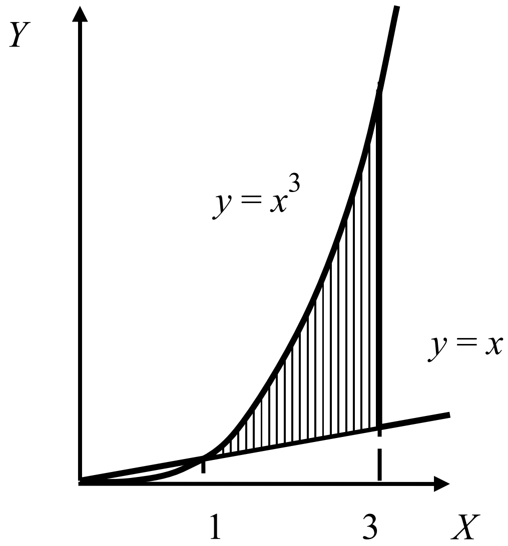

Рис. 6. К примеру 1.

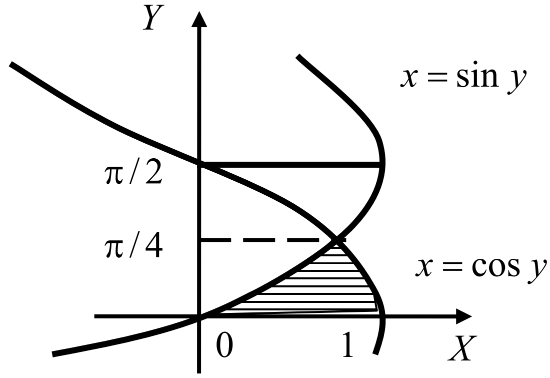

Рис.7. К примеру 2.

ПРИМЕР 2. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_{\sin y}^{\cos y} (x+y)\,dx$.

Имеем (см. рис.7):

$$\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_{\sin y}^{\cos y} (x+y)\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} dy \cdot \left(\frac{x^2}{2} + y\,x \right)\Bigg|_{\sin y}^{\cos y} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{2} + y \cdot (\cos y - \sin y) \right) dy = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}. \ ▪$$

Теперь осталось выяснить вопрос о том, как связаны повторные интегралы (2) и (3) по переменным x и y, взятые в том или ином порядке, с введенным выше двойным интегралом по соответствующей области. Эта зависимость устанавливается следующими теоремами:

Теорема 1. Пусть правильная область D (первого типа) ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где функции φ_1, φ_2 непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, а функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\bar{D}$ области D. Тогда двойной интеграл от этой функции по области D совпадает с повторным:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{4}$$

Доказательство теоремы основано на трех леммах.

Лемма 1. Пусть $a < c < b$. Тогда:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{5}$$

Эта лемма представляет собой следствие свойства определенного интеграла от функции $F(x)$, определенной равенством (1).

Лемма 2. Пусть функции φ_1, φ_2 и ψ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $\varphi_1(x) \le \psi(x) \le \varphi_2(x)$, и пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на $\bar{D}$. Тогда

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy + \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{6}$$

Чтобы доказать это утверждение, зададим для любого фиксированного x некоторую первообразную $\Phi(x, y)$ функции $f(x, y)$. По формуле Ньютона – Лейбница при фиксированном x получаем:

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \Phi(x,h(x)) - \Phi(x,g(x)). \tag{7}$$

Приме́ним формулу (7) отдельно к левой и правой частям формулы (6). Тогда получим *левая часть* (6) =

$$=\int_a^b dx(\Phi(x,\varphi_2(x))-\Phi(x,\varphi_1(x)))=\int_a^b \Phi(x,\varphi_2(x))dx-\int_a^b \Phi(x,\varphi_1(x))dx\,;$$

правая часть (6) =

$$=\int_a^b dx(\Phi(x,\psi(x))-\Phi(x,\varphi_1(x)))+\int_a^b dx(\Phi(x,\varphi_2(x))-\Phi(x,\psi(x)))=$$

$$=\int_a^b \Phi(x,\psi(x))dx-\int_a^b \Phi(x,\varphi_1(x))dx+\int_a^b \Phi(x,\varphi_2(x))dx-\int_a^b \Phi(x,\psi(x))dx=$$

= *левой части* (6).

Лемма 3. (Теорема о среднем для повторного интеграла). Существует точка $(\tilde{x},\tilde{y})\in\overline{D}$ такая, что:

$$I_D=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=f(\tilde{x},\tilde{y})\cdot|D|,$$

где $|D|$ – площадь области D.

Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы о среднем для двойного интеграла (свойство 5).

Теперь можно доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Разобьем область D на подобласти D_i прямыми, параллельными оси Oy: $x=c_q$, $(q=1, 2, \ldots, \ell+1)$, где $a=c_1<c_2<\ldots<$ $<c_\ell<c_{\ell+1}=b$, и кривыми: $y=\psi_j(x)$, $(j=1, 2, \ldots, k+1)$, где $\varphi_1(x)=\psi_1(x)<\psi_2(x)<$ $<\ldots<\psi_k(x)<\psi_{k+1}(x)=\varphi_2(x)$ (рис. 8). В результате область D оказывается разбитой на n, $(n=\ell\cdot k)$, криволинейных трапеций с основаниями, параллельными оси Oy.

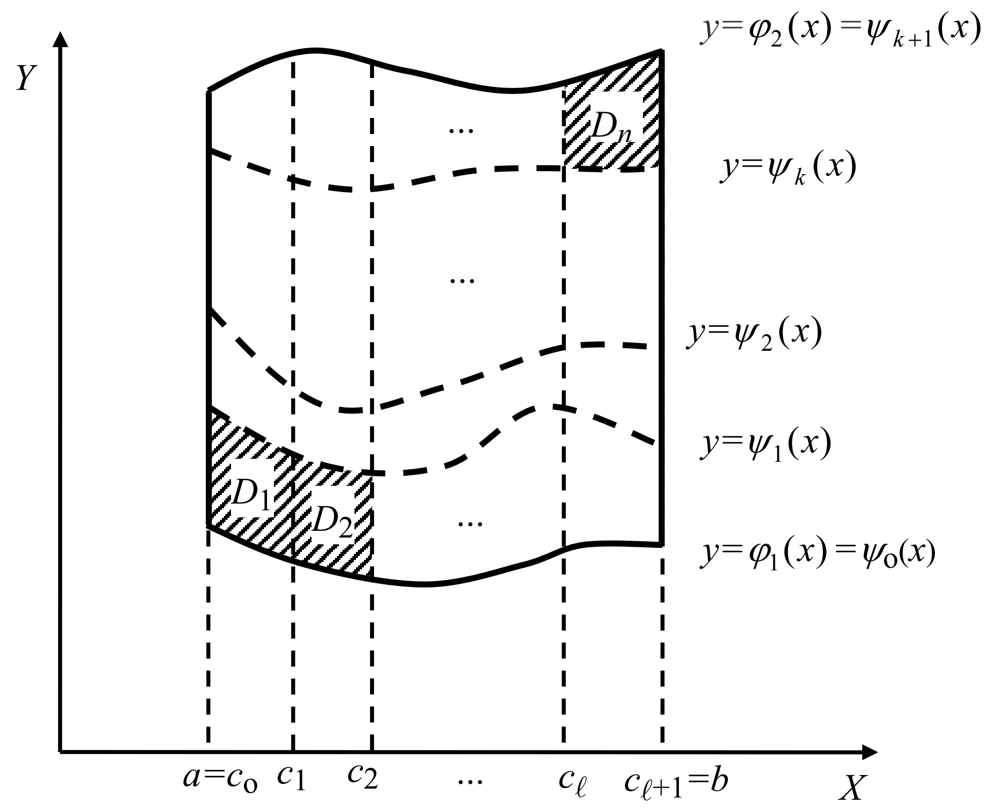

Рис.8. К доказательству теоремы 1.

Из лемм 1 и 2 следует, что повторный интеграл по области D будет равен сумме повторных интегралов:

$$I_D = \sum_{i=1}^{n} I_{D_i} = \sum_{q=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{k} \int_{c_q}^{c_{q+1}} dx \int_{\psi_j(x)}^{\psi_{j+1}(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

По лемме 3 существует точка $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in \overline{D_i}$ такая, что $I_{D_i} = f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \cdot |D_i|$. Следовательно,

$$I_D = \sum_{i=1}^{n} I_{D_i} = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \cdot |D_i| = S_T\,. \qquad (8)$$

В правой части выражения (8) стоит интегральная сумма S_T для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Следовательно, при неограниченном уменьшении частей D_i, в пределе получим

$$\lim_{d_T \to 0} S_T = \iint_D f(x,y)dxdy \ .$$

Но выражение под знаком предела есть постоянная, равная I_D , а значит,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{d_T \to 0} S_T = I_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \, .$$

Теорема доказана.

Приведем также геометрическое доказательство того же утверждения для случая $f(x,y) \geq 0$. Как было показано выше, для этого случая двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ равен объему криволинейного цилиндра U, изображенного на рис. 2 и рис. 9. С другой стороны, если обозначить через $S(x_o)$ площадь сечения тела U плоскостью $x = x_o = \text{const}$, то, как известно из свойств определенного интеграла, объем тела можно найти интегрированием:

$$V = \int_a^b S(x)dx \, .$$

Рассмотрим сечение тела U плоскостью $x = x_o$ (рис. 9). Это сечение ограничено отрезками AB и CD, параллельными оси Oz, отрезком AC, параллельным оси Oy и кривой BD с уравнением $z = f(x_o,y)$, (точки A и C имеют, соответственно, координаты: $A(x_o, \varphi_1(x_o))$, $C(x_o, \varphi_2(x_o))$ в плоскости OXY). Площадь сечения вычисляется по формуле

$$S(x_o) = \int_{\varphi_1(x_o)}^{\varphi_2(x_o)} f(x_o, y)dy \, .$$

Следовательно,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = |U| = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \, .$$

Теорема доказана.

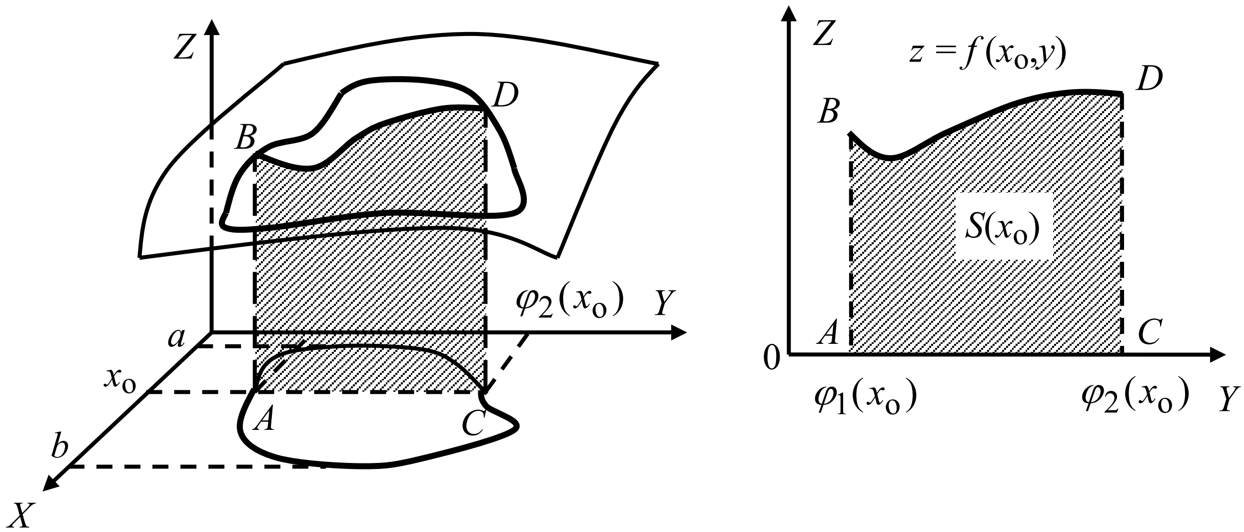

Рис.9. К выводу формулы для двойного интеграла: а)сечение тела *U* плоскостью; б)площадь сечения.

Аналогично формулируется и соответствующая теорема для случая правильной области второго типа:

Теорема 2. Для правильной области второго типа D' (рис. 5) при ограничениях, аналогичных сформулированным в теореме 1, двойной интеграл совпадает с повторным:

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{9}$$

ПРИМЕР 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

$$I = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

В данном интеграле область интегрирования D – правильная область первого типа (рис.10). По теореме 1 интеграл I записывается в виде двойного интеграла: $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Равенство $y = 2-\sqrt{4-x^2}$ означает, что точка

(x, y) лежит на окружности $x^2+(y-2)^2=4$. Если $y=\sqrt{4-x^2}$, то точка (x, y) лежит на окружности $x^2+y^2=4$. Две эти окружности пересекаются в точках, для которых $(y-2)^2=y^2$, или при $y=1$. Подставляя это значение y в уравнение $x^2+y^2=4$, получаем $x=\pm\sqrt{3}$.

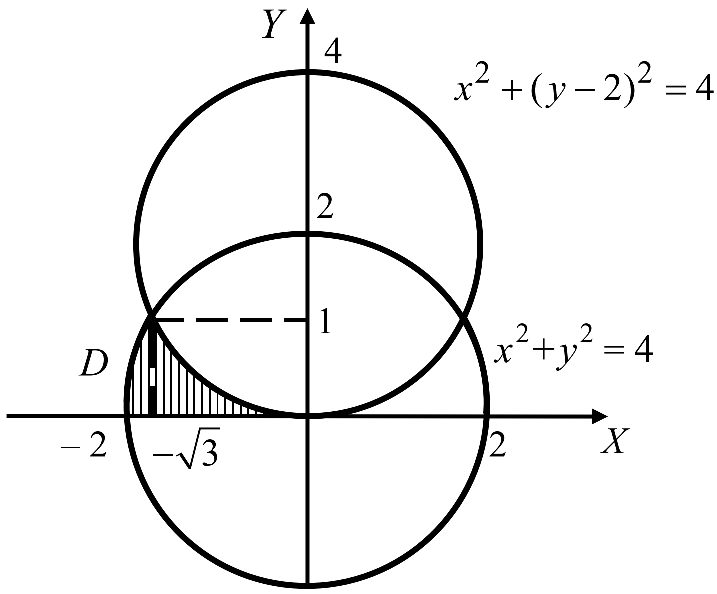

Рис.10. К примеру 3.

Для обоих интегралов переменная x принимает только отрицательные значения. Значит для точек (x, y), лежащих на первой окружности, справедливо равенство $x=-\sqrt{4-(y-2)^2}$, а для точек второй окружности $x=-\sqrt{4-y^2}$.

Теперь, если рассмотреть область интегрирования D как правильную область второго типа, то согласно теореме 2 интеграл I записывается в виде

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x,y)dx. \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy$,

где область D ограничена кривыми $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$ (рис.11).

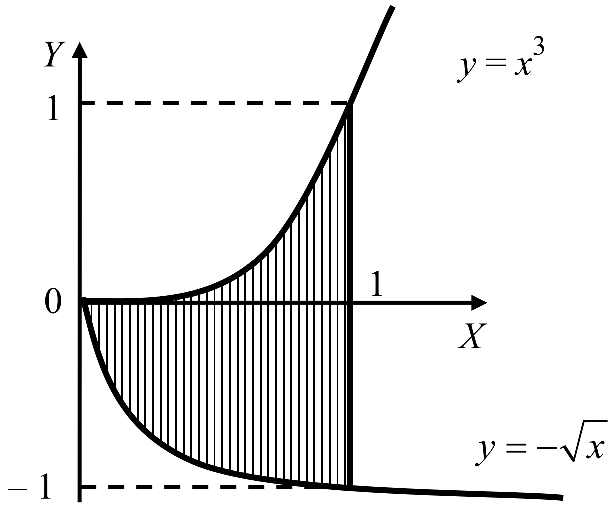

Рис.11. К примеру 4.

Записывая двойной интеграл через повторный, получим

$$\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \cdot \left(18x^2y^3 + 30x^4y^5\right)\Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} = \int\limits_0^1 \left(18\left(x^{11} + x^{7/2}\right) + 30\left(x^{19} + x^{13/2}\right)\right)dx = 11. \blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy$, где область D ограничена прямыми: $y = \ln 3$, $y = \ln 4$, $x = 1/6$, $x = 1/3$ (рис.12).

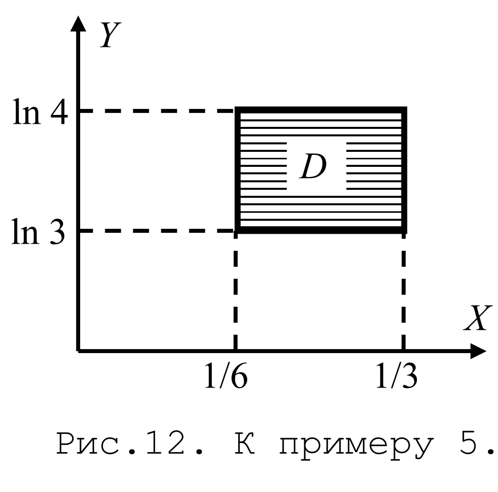

Рис.12. К примеру 5.

Рассматривая область D как правильную область 2-го типа, получим

$$\iint_D 12ye^{6xy}dxdy = \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}dx =$$

$$=12\int_{\ln 3}^{\ln 4} ydy \int_{1/6}^{1/3} e^{6xy}dx = 12\int_{\ln 3}^{\ln 4} ydy \cdot \left.\frac{e^{6xy}}{6y}\right|_{1/6}^{1/3} = 2\int_{\ln 3}^{\ln 4}\left(e^{2y}-e^{y}\right)dy = 5.$$

Этот же двойной интеграл можно найти и при помощи повторного интеграла (9) с обратным порядком интегрирования $\int_{1/6}^{1/3} dx \int_{\ln 3}^{\ln 4} 12e^{6xy}ydy$, т.е. считая D областью 1-го типа, но в этом случае сложность преобразований значительно выше. ▪

Замечание. Обычно, при вычислении двойных интегралов, предварительно оценивают трудоемкость интегрирования подынтегральной функции по переменным x и y, взятым в том или ином порядке. В зависимости от результата такого анализа, область интегрирования нужно записать либо как правильную область первого типа, либо как правильную область второго типа. Иногда для этого приходится разбивать область на <u>несколько</u> правильных частей.

ПРИМЕР 6. Найти площадь области, ограниченной линиями
$x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$, $x\geq 0$ (рис.13).

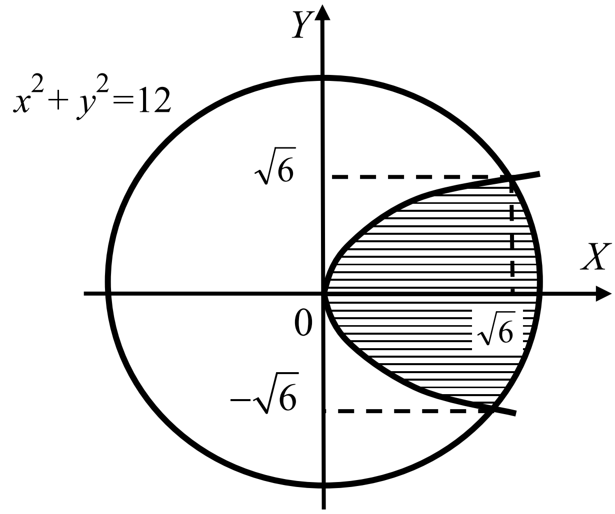

Рис.13. К примеру 6.

По свойству 1 двойного интеграла площадь области D равна

$$|D| = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - y^2/\sqrt{6}\right) dy = 3\pi + 2. \blacksquare$$

ПРИМЕР 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z + y = 1/2$, $z = 0$, $x = 17\sqrt{2y}$, $x = 2\sqrt{2y}$ (рис.14).

Заданное тело представляет собой криволинейный цилиндр с образующей, параллельной оси OZ. Направляющей цилиндрической поверхности служат две ветви (при $x > 0$) парабол $x = 17\sqrt{2y}$ и $x = 2\sqrt{2y}$. Нижним основанием тела служит плоскость OXY, а сверху оно ограничено плоскостью $z + y = 1/2$.

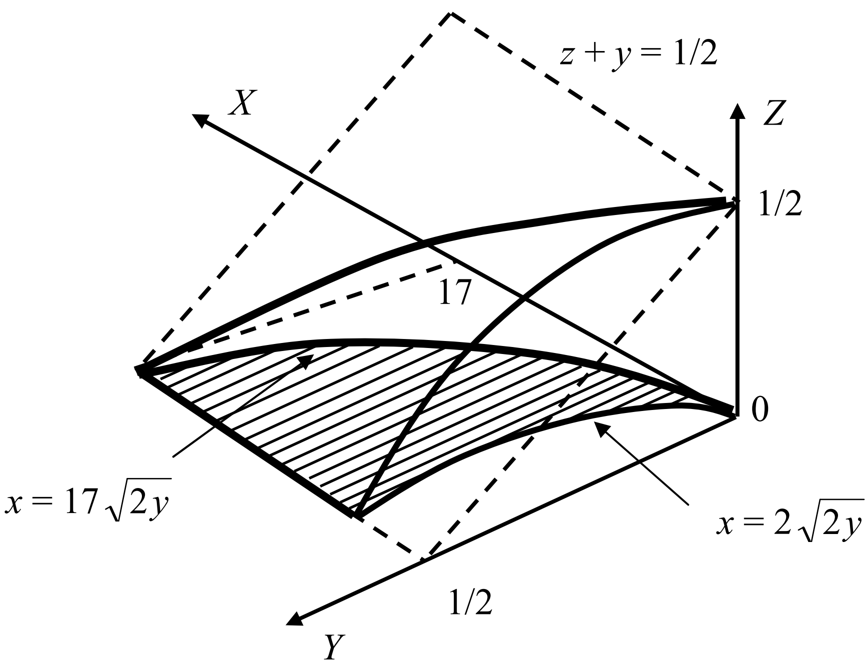

Рис.14. К примеру 7.

Как отмечалось выше в п. 4.1 объем такого криволинейного цилиндра выражается через двойной интеграл (рис. 14):

$$V = \iint\limits_D (1/2 - y)\,dxdy = \int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} (1/2 - y)\,dx = \int\limits_0^{1/2} (1/2 - y)\cdot 15\sqrt{2y}\,dy = 1. \blacksquare$$

4. 3. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть на плоскости OXY задана область D, ограниченная «хорошей» (как это было определено в п. 4.1) кривой $L = \Gamma(D)$. Предположим, что декартовы координаты (x, y) в плоскости OXY являются функциями двух новых переменных (u,v):

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \tag{1}$$

причем функции φ и ψ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в ограниченной области $\Omega\,(u, v)$ с «хорошей» границей $\Gamma(\Omega)$. Для краткости, для функций, обладающих такими свойствами, введем обозначение: $\boldsymbol{\varphi, \psi \in C^1(\Omega)}$.

Будем считать, что отображение (1) взаимно однозначно отображает область Ω на область D, причем граница $\Gamma(\Omega)$ области Ω при этом отображении переходит в границу $\Gamma(D)$ области D.

Зададим также функцию $f(x, y) \in C\left(\overline{D}\right)$, т.е. функцию, непрерывную на замыкании области D.

Теорема 1. Для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ при заданных выше ограничениях на функции и области справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \left|J\right| dudv\,, \tag{2}$$

где через $|\,J\,|$ обозначен модуль ***определителя Якоби***, или ***якобиана***, задающегося формулой

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $P(x,y)$ – произвольная точка плоскости OXY. Отображение (1) ставит этой точке в соответствие точку $P'(u, v)$ плоскости $O'UV$ с декартовыми координатами (u, v) так, что $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$. Числа (u,v) называются ***криволинейными координатами*** точки P.

Разобьем область Ω на прямоугольные площадки $\Omega_1, \Omega_2,\ldots, \Omega_n$ прямыми, параллельными координатным осям OU и OV (рис. 15), т.е. прямыми $u = u_o=$ $=\text{const}$ и $v = v_o = \text{const}$. На плоскости OXY этим прямым соответствуют некоторые непрерывные кривые $\{x = \varphi(u_o,v),\ y = \psi(u_o,v)\}$, ($v$ – параметр) и $\{x =$ $= \varphi(u, v_o)\ ,\ y = \psi(u, v_o)\}$, ($u$ – параметр), которые разбивают область D на части $D_1, D_2,\ldots D_n$. Ограничимся рассмотрением только тех областей Ω_i (и, соответственно, D_i), которые целиком лежат внутри области Ω (соответственно, области D), т.е. не содержат внутри себя точек границы области Ω (или D).

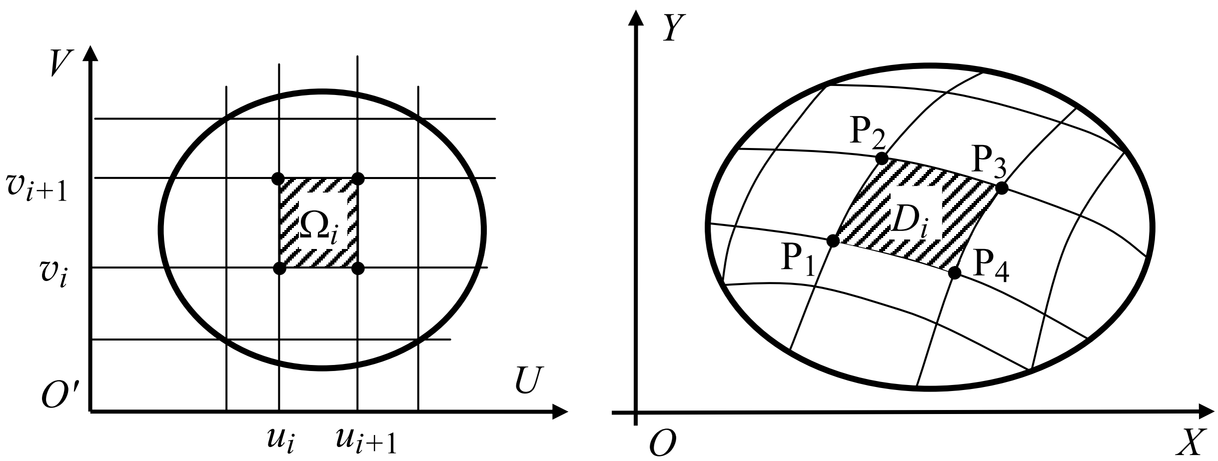

Рис.15. К доказательству теоремы 1.

Зафиксируем произвольную прямоугольную площадку Ω_i, ограниченную четырьмя прямыми: $u = u_i$, $u = u_{i+1} = u_i + \Delta u$, $v = v_i$, $v = v_{i+1} = v_i + \Delta v$. Координаты вершин этого прямоугольника, соответственно, имеют значения: (u_i,v_i), $(u_i, v_i{+}\Delta v)$, $(u_i{+}\Delta u, v_i{+}\Delta v)$, $(u_i{+}\Delta u, v_i)$. При отображении (1) эта площадка переходит в площадку D_i, представляющую из себя криволинейный четырехугольник с вершинами в точках $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, $P_4(x_4,y_4)$.

Поскольку (u, v) – декартовы координаты в плоскости $O'UV$, то площадь $|\Omega_i|$ площадки Ω_i равна $|\Omega_i| = \Delta u \cdot \Delta v$ (площадь прямоугольника).

Пусть $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Составим интегральную сумму для проведенного выше разбиения области D, выбрав в качестве отмеченных точек (ξ_i, η_i) (см. определение интеграла в п.4.1) для каждой области D_i точку с координатами $(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i))$ (точка P_1 на рис. 15).

Запишем интегральную сумму:

$$S_T \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |D_i| = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot |D_i|. \tag{4}$$

Равенство в (4) приближенное, т.к. мы отбросили элементарные области, содержащие части границы. Однако при малых Δu и Δv отброшенные члены имеют более высокий порядок малости по сравнению с оставленными. С той же точностью можно считать, что четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ образован попарно параллельными прямыми, т.е. является параллелограммом, и что приращения функций Δu и Δv равны дифференциалам du и dv.

Площадь параллелограмма $P_1P_2P_3P_4$ при этих допущениях выразится через векторное произведение векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_4}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0\} = \\
&= \{\varphi(u_i, v_i + \Delta v) - \varphi(u_i, v_i),\ \psi(u_i, v_i + \Delta v) - \psi(u_i, v_i),\ 0\} \approx \\
&\approx \{\varphi'_v(u_i, v_i)\Delta v,\ \psi'_v(u_i, v_i)\Delta v,\ 0\}; \\
\overrightarrow{P_1P_4} &= \{x_4 - x_1, y_4 - y_1, 0\} = \\
&= \{\varphi(u_i + \Delta u, v_i) - \varphi(u_i, v_i), \psi(u_i + \Delta u, v_i) - \psi(u_i, v_i), 0\} \approx \\
&\approx \{\varphi'_u(u_i, v_i)\Delta u,\ \psi'_u(u_i, v_i)\Delta u,\ 0\}.
\end{aligned}$$

Третья координата этих векторов равна нулю, т.к. они оба лежат в плоскости OXY. Векторное произведение векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_4}$ может быть найдена по формуле:

$$\overrightarrow{P_1P_4} \times \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \varphi'_u(u_i, v_i)\Delta u & \psi'_u\left(u_i, v_i\right)\Delta u & 0 \\ \varphi'_v\left(u_i, v_i\right)\Delta v & \psi'_v\left(u_i, v_i\right)\Delta v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{e_3} \begin{vmatrix} \varphi'_u\left(u_i, v_i\right) & \psi'_u\left(u_i, v_i\right) \\ \varphi'_v\left(u_i, v_i\right) & \psi'_v\left(u_i, v_i\right) \end{vmatrix} \Delta u \Delta v =$$

$$= J\left(u_i, v_i\right)\Delta u \Delta v \cdot \overrightarrow{e_3},$$

где якобиан $J(u_i,v_i)$ определяется выражением (3).

Следовательно, учитывая формулу для площади $|\,\Omega_i\,|$, площадь четырехугольника D_i, можно выразить формулой:

$$|\,D_i\,| \approx \left|\overrightarrow{P_1P_4} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|J\left(u_i, v_i\right)\right| \cdot \Delta u \Delta v = \left|J(u_i, v_i)\right| \cdot |\,\Omega_i\,|. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в интегральную сумму (4), получим

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot \left|J\left(u_i, v_i\right)\right| \cdot |\,\Omega_i\,|. \qquad (6)$$

Выражение (6) представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла от функции $F(u,v) \cdot |\,J(u,v)\,|$ по области Ω. При стремлении диаметра разбиения к нулю интегральная сумма (6) сходится к двойному интегралу:

$$\iint\limits_{\Omega} F(u,v) \cdot \left|J\left(u,v\right)\right| du\,dv = \iint\limits_{\Omega} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left|J\right| du\,dv,$$

а равная ей интегральная сумма (4) при том же условии сходится к двойному интегралу $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$.

Следовательно, верна формула (2), что и требовалось доказать.

Переход к полярным координатам в двойном интеграле.

Применима ли теорема 1 при переходе от декартовых координат к полярным? Известно, что эти системы координат не находятся во взаимно однозначном соответствии. Действительно, соотношения

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi \tag{7}$$

определяют угол φ с точностью до $2k\pi$, и к тому же точке $O(0,0)$ отвечает любой угол φ.

Однако если рассматривать в плоскости (r,φ) только области Ω, лежащие в полуполосе $\{0 \le \varphi < 2\pi,\ r > 0\}$, а в плоскости (x, y) – области D, не включающие в себя точку (0,0) (рис. 16), то можно считать, что условия теоремы выполнены и формулу (2) можно применять.

Из соотношений (7) получаем в этом случае якобиан (3):

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\,,$$

и формула (2) для **двойного интеграла в полярных координатах** принимает вид:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi.} \tag{8}$$

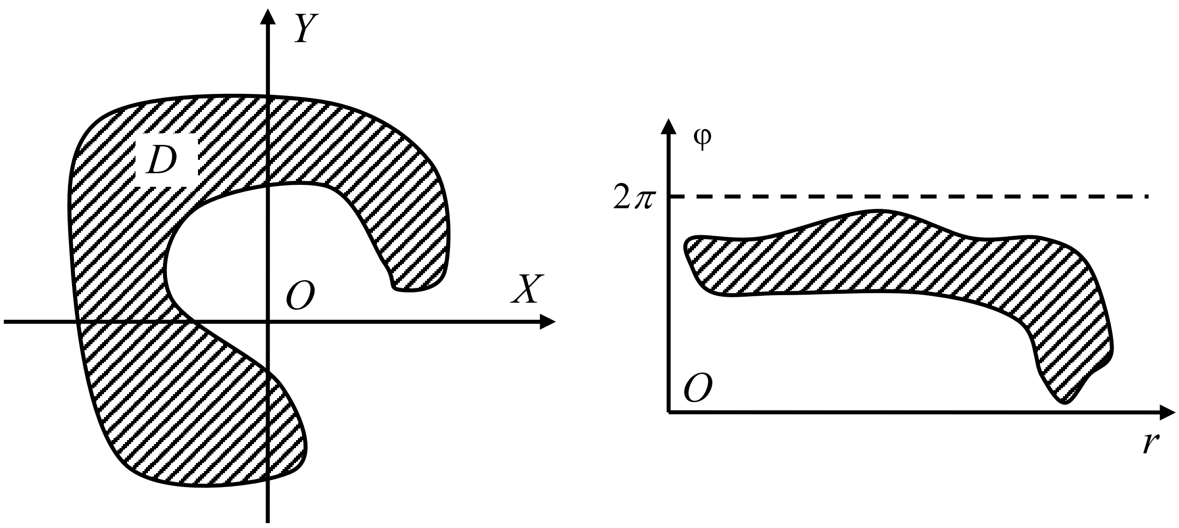

Рис.16. Области, для которых справедлива формула (8).

ПРИМЕР 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2-4y=0$, $x^2+y^2-8y=0$, $x=0$, $y=x/\sqrt{3}$ (рис.17).

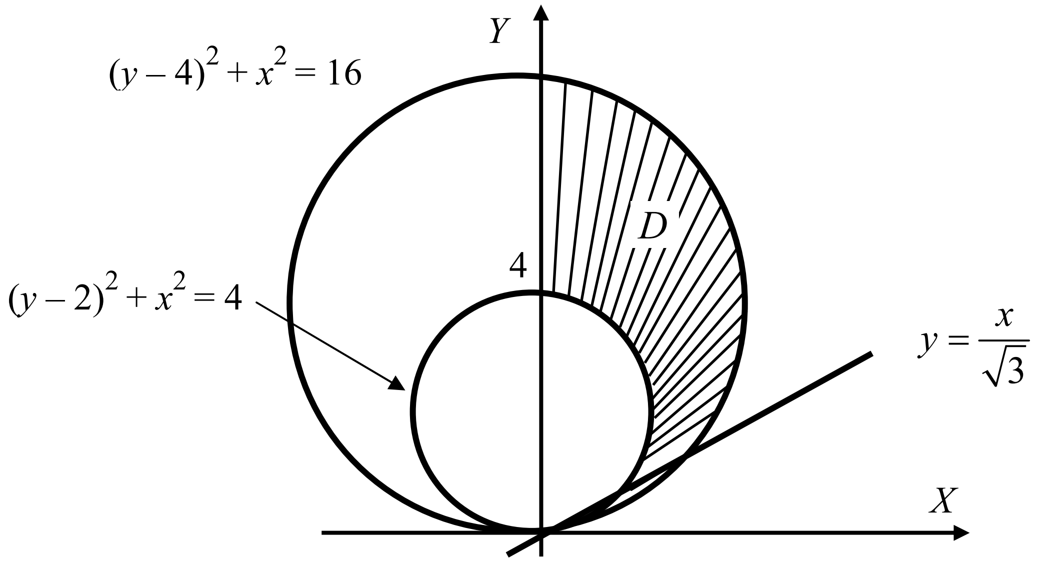

Рис.17. К примеру 1.

Пользуясь формулами (7), легко установить, что границы фигуры в полярных координатах описываются уравнениями: $r=4\sin\varphi$, $r=8\sin\varphi$, $\varphi=\pi/2$ и $\varphi=\pi/6$. (Последнее уравнение вытекает из соотношения $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$).

Тогда

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_\Omega rdrd\varphi=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}r\,dr=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 48\cdot\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi=4\pi+3\sqrt{3}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Найти массу однородной пластинки, форма которой задается неравенствами: $1\le(x^2/16)+y^2\le 3$, $x\ge 0$, $y\ge x/4$, а поверхностная плотность $\mu=x/y^5$ (рис. 18).

Масса пластинки D с поверхностной плотностью μ ищется по формуле

$$m=\iint\limits_D \mu\,dxdy\,.$$

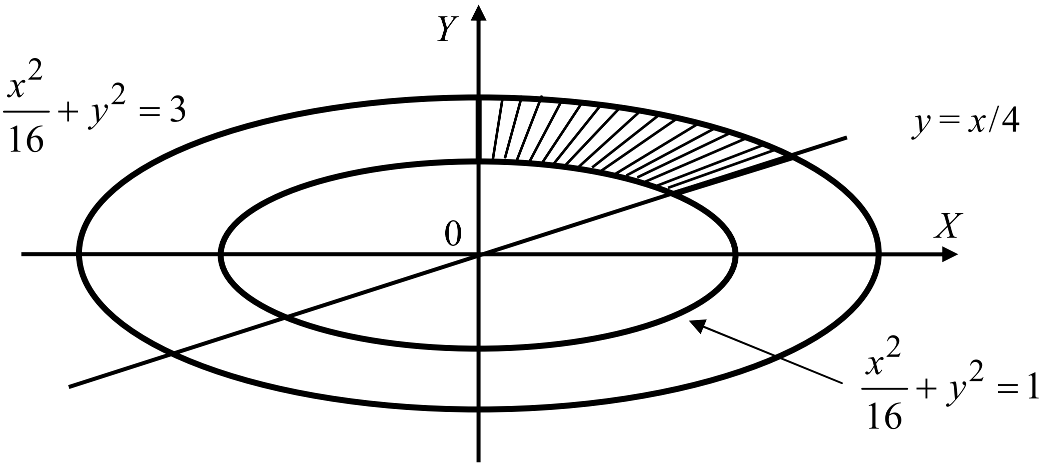

Рис.18. К примеру 2.

Для области, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

при вычислении двойного интеграла удобно использовать, так называемые, ***обобщенные полярные координаты***:

$$x = a \cdot r\cos\varphi, \qquad y = b \cdot r\sin\varphi. \tag{9}$$

Якобиан для этой замены координат имеет выражение

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Поэтому по формуле (2) получаем:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_\Omega f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\cdot r\,drd\varphi.$$

В нашем примере $a = 4, b = 1;$ границы области в новых координатах задаются соотношениями: $1 \le r^2 \le 3$; $y/x = (b/a)$ tg φ = 1/4, т.е. $\varphi = \pi/4$; $\varphi = \pi/2$. Отсюда

$$m = ab\iint\limits_\Omega \mu\cdot r\,drd\varphi = 16\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{r\cos\varphi}{r^5\sin^5\varphi} r\,dr =$$

$$= 16\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^5\varphi}\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dr}{r^3} = 16\frac{1}{4\sin^4\varphi}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}\cdot\frac{1}{2r^2}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = 4. ■$$

4. 4. Вычисление площади поверхности.

Пусть функция $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ задает поверхность $z = f(x, y)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Нашей задачей будет нахождение площади части поверхности Ω, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma = \Gamma(\Omega)$.

Попробуем определить площадь поверхности аналогично тому, как ранее определялась длина дуги. Длиной дуги мы называли предел периметра вписанной в нее ломаной при условии, что длины сторон ломаной стремятся к нулю.

В случае поверхности было бы естественно вписывать в неё многогранную поверхность и определять площадь как предел площади поверхности многогранника при стремлении к нулю диаметров всех граней.

Однако, как было показано в конце XIX века математиком Г. Шварцом, это определение некорректно. Он сумел в обычный прямой круговой цилиндр с высотой h и радиусом R (площадь поверхности которого, как известно из школы, равна $2\pi Rh$) вписать многогранник, сумма площадей граней которого стремится к бесконечности, даже если диаметры граней стремятся к нулю.

Этот многогранник называется ***сапогом Шварца*** и строится следующим образом (рис. 19):

1) делим высоту h на m равных частей и через точки деления проводим плоскости, параллельные основанию. В сечениях получаем окружности.

   Каждую полученную окружность делим на n равных частей, так что точки деления каждой нижней окружности лежат <u>под серединами</u> дуг деления вышележащей окружности. Соединяя соседние точки деления отрезками, получаем поверхность из треугольников, похожую на смятое голенище сапога. Несложно доказать, что площадь полученного многогранника равна:

$$S_{мн.} = 2\pi R\sqrt{h^2 + \frac{R^2\pi^4}{4}\cdot\left(\frac{m}{n^2}\right)^2}\,.$$

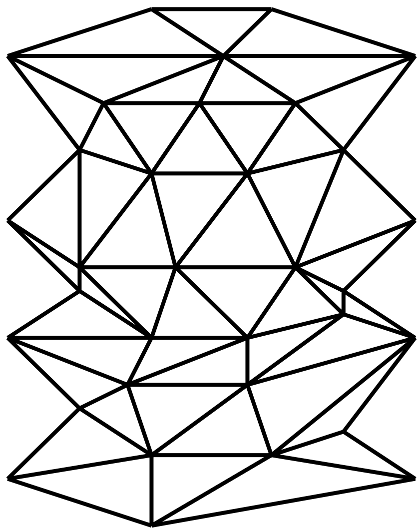

Рис.19. Сапог Шварца.

2) Пусть отношение m/n^2 близко к нулю, т.е. m мало, а n велико. Тогда площадь $S_{мн.}$ близка к известному значению площади цилиндра $2\pi Rh$. Если же отношение m/n^2 велико (а это случится для сильно смятого голенища сапога, т.е. при малом значении n и большом m), то площадь многогранника $S_{мн.}$ может принять сколь угодно большое значение.

Таким образом, очевидно, что построенный многогранник не может быть использован для определения площади цилиндра. Почему же определение, бывшее удачным для кривой, не подходит для поверхности?

Всё дело в том, что в случае плоской кривой малый отрезок секущей всегда близок к соответствующей касательной. Для рассмотренного примера касательная плоскость к цилиндрической поверхности параллельна оси OZ. В то же время многогранники, образующие *сапог Шварца*, для случая $m/n^2 \to \infty$ становятся практически перпендикулярными оси OZ, т.е. далекими от касательной плоскости.

Введем более строгое определение площади поверхности. Пусть D – ортогональная проекция области Ω на плоскость OXY. Границы $\Gamma(D)$ и $\Gamma(\Omega)$ будем считать «хорошими» (в смысле определения п.4.1). Разобьём область D кусочно-гладкими кривыми, на подобласти D_1, D_2,… D_n. В каждой элементарной области D_i выберем произвольным образом точку P_i с координатами (ξ_i,η_i). На поверхности точке P_i соответствует точка M_i с координатами $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i,\eta_i))$. Проведём через точку M_i касательную плоскость к поверхности $z - f(x,y) = 0$. На касательной плоскости рассмотрим площадку ω_i, которая проектируется в площадку D_i (рис.20).

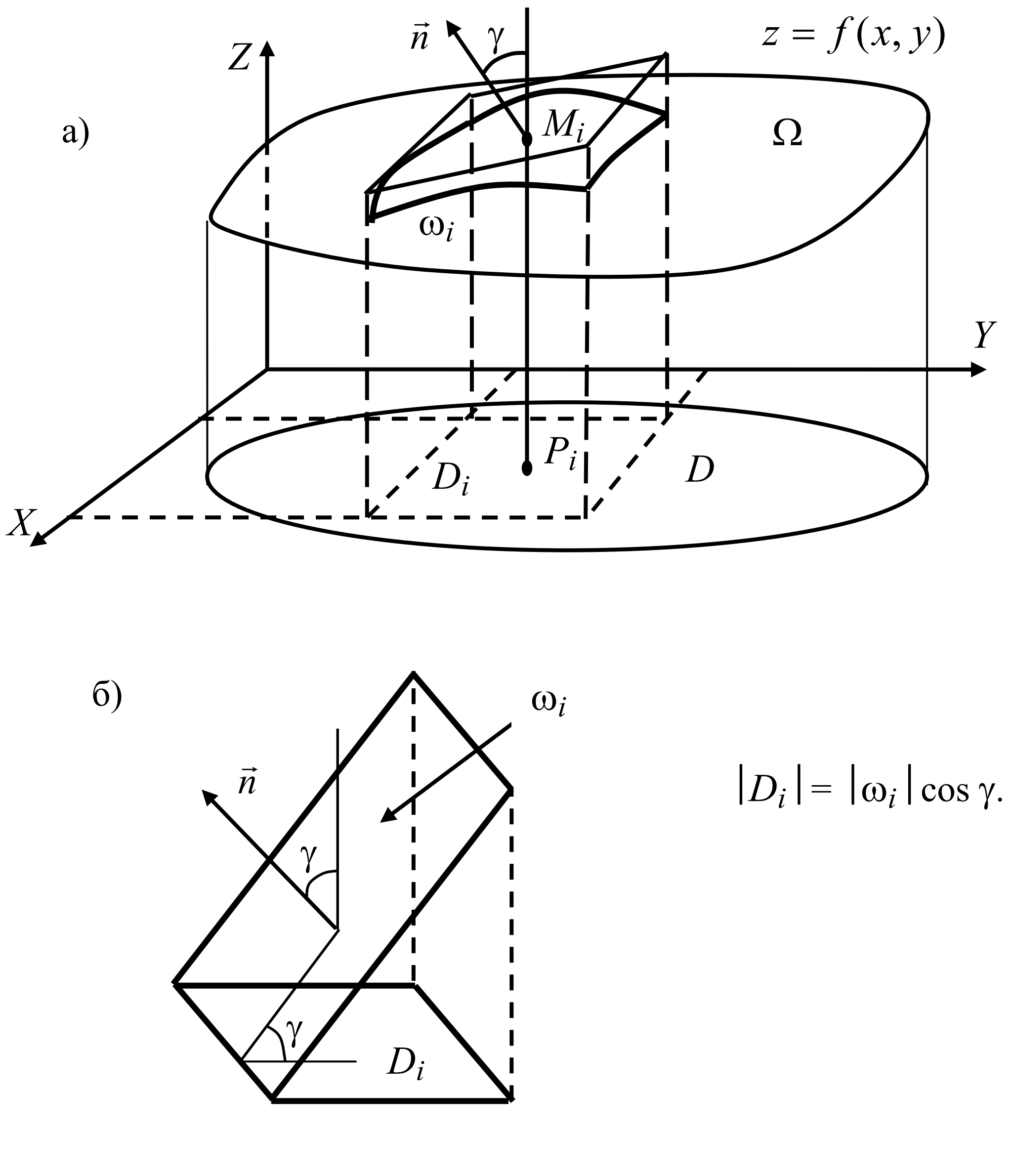

Рис.20. К определению площади поверхности.

Площадью поверхности Ω назовём предел суммы $\omega_T = \sum_{i=1}^{n} |\omega_i|$, где $|\omega_i|$ – площадь площадки ω_i, когда диаметры этих площадок (или, соответственно, площадок D_i) стремятся к нулю, т.е. когда $d_T \to 0$.

Нормаль к поверхности $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ задаётся градиентом в точке M_i:

$$grad\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Запишем единичный вектор $\vec{n}$ нормали:

$$\vec{n} = \frac{grad\, f}{|grad\, f|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \qquad |grad f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\,.$$

Теперь можно найти угол γ, ($\gamma < \pi/2$), который нормаль образует с осью OZ:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}.$$

Поскольку D_i – проекция ω_i на плоскость OXY, то $|D_i| = |\omega_i| \cos\gamma$, (рис. 20б).

Тогда

$$\omega_T = \sum|\omega_i| = \sum\frac{|D_i|}{\cos\gamma} = \sum\frac{1}{\cos\gamma}\cdot|D_i| \underset{d_T\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{d_T\to 0}{\longrightarrow} \iint_D \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy.$$

Таким образом, ***площадь поверхности* Ω**, заданной уравнением $z = f(x,y)$ вычисляется по формуле:

$$|\Omega| = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy, \tag{1}$$

где D – ортогональная проекция области Ω на плоскость OXY.

Отметим без доказательства, что если поверхность Ω на ограниченной области Δ в плоскости переменных (u, v) задана параметрически с помощью соотношений:

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),$$

то ее площадь может быть найдена по формуле:

$$|\Omega| = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\, dudv, \qquad (2)$$

где $E = {\varphi'_u}^2 + {\psi'_u}^2 + {\chi'_u}^2$, $G = {\varphi'_v}^2 + {\psi'_v}^2 + {\chi'_v}^2$, $F = \varphi'_u\varphi'_v + \psi'_u\psi'_v + \chi'_u\chi'_v$ – так называемые ***гауссовские коэффициенты*** поверхности Ω.

ПРИМЕР 1. Найти площадь части Ω сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = b^2$, $b \le a$ (рис. 21).

Из симметрии относительно плоскости OXY для нахождения искомой площади поверхности достаточно вычислить площадь ее части Ω_1, лежащей выше плоскости OXY, и удвоить полученное значение.

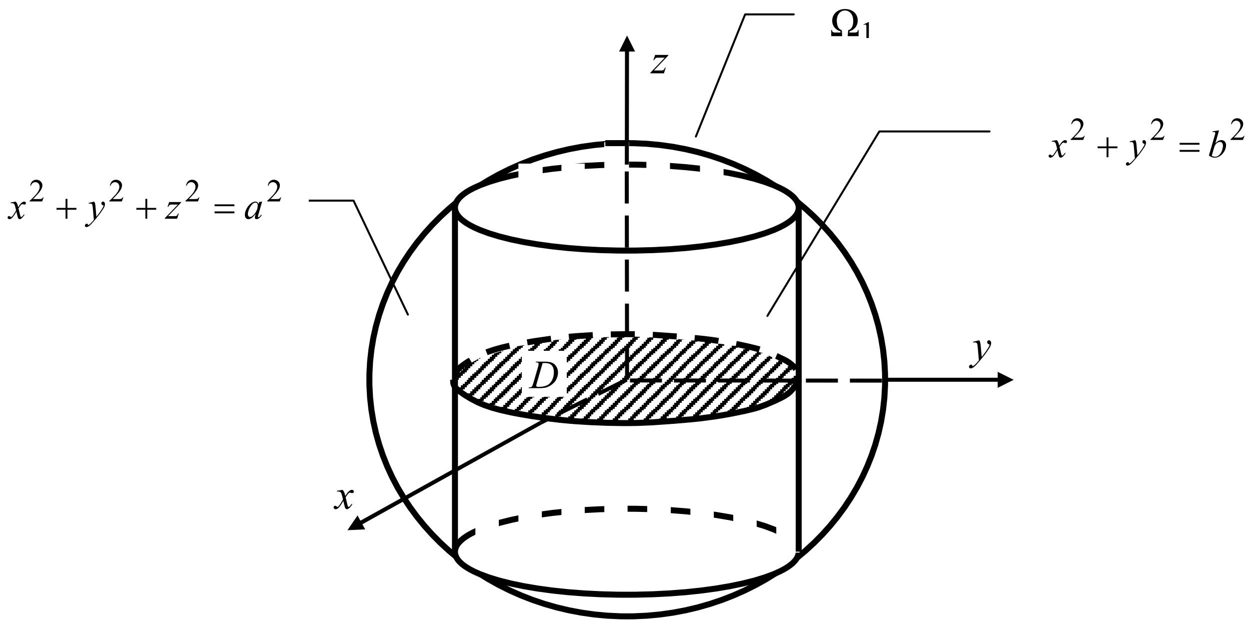

Рис.21. К примеру 1.

Из уравнения верхней полусферы получаем:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \;\Rightarrow\; z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (1), находим

$$|\Omega| = 2|\Omega_1| = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= 2a\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

Здесь D – проекция рассматриваемой поверхности на плоскость OXY, т.е. круг радиуса b с центром в начале координат, который вырезает на плоскости OXY цилиндр $x^2 + y^2 = b^2$. Двойной интеграл был вычислен с помощью перехода к полярным координатам. ▪

Замечание. Строго говоря, область D в примере 1 не удовлетворяет условиям, накладываемым на области при переходе к полярным координатам, а именно, она содержит начало координат (см. рис. 16). Тем не менее, полученный в примере 1 результат остается справедливым. Для его обоснования следовало бы вырезать из области D некоторую малую окрестность точки (0,0), например круг радиуса ε с центром в этой точке, а затем провести предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

ПРИМЕР 2. Найти площадь поверхности ***геликоида*** (рис. 22), заданного параметрическими уравнениями:

$$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; z = b\,\varphi,\; 0 < r \le a,\; 0 \le \varphi < 2\pi.$$

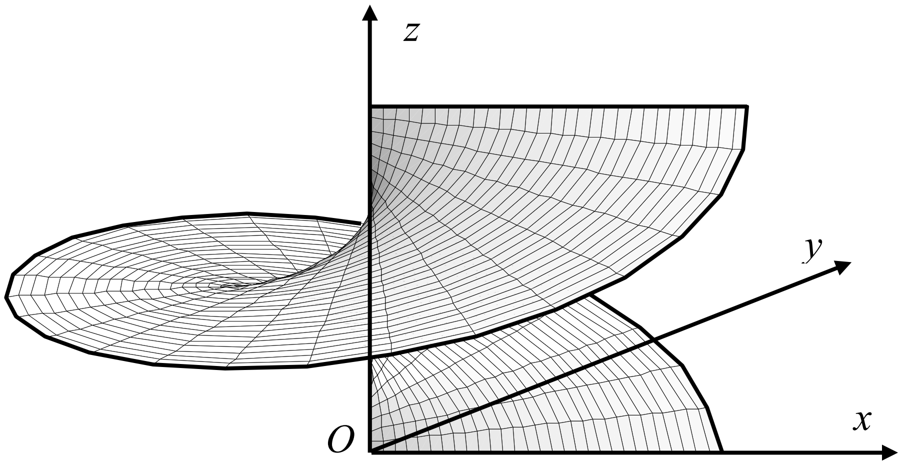

Рис.22. Геликоид.

Поскольку $x'_r = \cos\varphi,\ x'_\varphi = -r\sin\varphi,\ y'_r = \sin\varphi,\ y'_\varphi = r\cos\varphi,\ z'_r = 0,\ z'_\varphi = b$,

получаем по формуле (2):

$$E = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$
$$G = r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + b^2 = r^2 + b^2,$$
$$F = -r\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi + 0\cdot b = 0.$$

Отсюда имеем площадь поверхности геликоида

$$|\Omega| = \iint_\Delta \sqrt{1\cdot\left(r^2+b^2\right)-0}\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2+b^2}\,dr =$$
$$= \pi\left(a\sqrt{a^2+b^2} + b^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

(По поводу справедливости включения в пределы интегрирования точек $r=0$ и $\varphi=2\pi$ см. замечание к примеру 1). ▪

4.5. Несобственные кратные интегралы.

Как и обычные несобственные интегралы, кратные несобственные интегралы бывают двух типов: с неограниченной областью интегрирования и с неограниченной подынтегральной функцией. Рассмотрим каждый из типов таких интегралов:

Несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования. Пусть D – неограниченная область, а $\{D_n\}$ – произвольная последовательность вложенных друг в друга ограниченных областей с «хорошими» границами (определение «хорошей» границы было дано в п. 4.1), причем эта последовательность «*исчерпывает*» область D, т.е $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ и $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ $\ldots \subset D_n \subset \ldots$. Пусть, кроме того, функция $f(x,y)$ непрерывна на области D. Тогда несобственный двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ определяется как предел последовательности интегралов $\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$ при $n \to \infty$. Интеграл считается сходящимся, если этот предел существует, конечен и не зависит от выбора последовательности областей $\{D_n\}$.

Несобственные интегралы с неограниченной подынтегральной функцией. Пусть теперь D – ограниченная область, но при этом функция $f(x,y)$ не ограничена в окрестности точки $M \in D$. Обозначим через Δ_δ окрестность точки M с диаметром δ, лежащую внутри области D. Тогда несобственный двойной интеграл от неограниченной функции $f(x,y)$ определяется как следующий предел:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{D\setminus\Delta_\delta} f(x,y)dxdy,$$

если этот предел существует и не зависит от выбора окрестностей Δ_δ. (Напомним, что область $D\setminus\Delta_\delta$ состоит из точек, принадлежащих области D, но не принадлежащих области Δ_δ).

Аналогично могут быть определены несобственные тройные интегралы.

Для несобственных кратных интегралов, подобно тому, как это делалось ранее, можно определить понятие абсолютной сходимости, а также сформулировать теоремы сравнения.

ПРИМЕР 1. Исследовать на сходимость интеграл $I=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$.

Используем определение. В качестве областей D_n возьмем круги радиусов n, т.е. $D_n=\{x^2+y^2\le n^2\}$. Имеем $D_1\subset D_2\subset D_3\subset\ldots\subset D_n\subset\mathbb{R}^2\ldots$ и $D_n\to\mathbb{R}^2$ при $n\to\infty$. Таким образом, области D_n можно использовать для определения интеграла I:

$$I_n=\iint\limits_{D_n}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}=\iint\limits_{D_n}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(1+\rho^2)^\alpha}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^n\frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^\alpha}=$$

$$=\pi\int\limits_0^n\frac{d(1+\rho^2)}{(1+\rho^2)^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\alpha}\cdot\left(\dfrac{1}{\left(1+n^2\right)^{\alpha-1}}-1\right), & \text{при } \alpha\neq 1;\\ \pi\cdot\ln\left(1+n^2\right), & \text{при } \alpha=1.\end{cases}$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\begin{cases}\infty, & \alpha\le 1;\\ \dfrac{\pi}{\alpha-1}, & \alpha>1.\end{cases}$$

Таким образом, при $\alpha \le 1$ интеграл I расходится, а при $\alpha > 1$ сходится и имеет значение $\dfrac{\pi}{\alpha - 1}$. ▪

Формулы интегрирования под знаком интеграла позволяют, в частности, вычислить важный интеграл Лапласа, подынтегральная функция которого не может быть проинтегрирована в элементарных функциях:

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл Лапласа: $I = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$

Пусть область D представляет собой первый квадрант плоскости OXY. Запишем двойной интеграл

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \times \int\limits_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2 = I^2 .$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам:

$$I^2 = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\infty} rdr \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cdot e^{-r^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr^2 = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда получаем интеграл Лапласа:

$$I = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ ▪$$

Теоретические вопросы к главе 4.

1. По какой переменной взят внешний интеграл в повторном интеграле:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{2x+1} f(x,y) \quad dxdy\,?$$

2. Какой из интегралов больше: $\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$ или $\iint\limits_G \sqrt{1+x^4+y^4}\,dxdy$, если область G – прямоугольник: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$?

3. Показать, что если область G представляет собой прямоугольник: $-1 \le$ $\le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, то двойной интеграл $\iint\limits_G x^m y^n dxdy$ обращается в нуль, если хотя бы одно из чисел m или n нечетно.

4. Доказать формулу Дирихле: $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx$.

5. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство:

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(y)\,dy = \int\limits_0^a (a-y)f(y)\,dy.$$

6. Вычислить интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$, если область G представляет собой прямоугольник: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, а функция $f(x,y) = F_{xy}''(x,y)$.

7. Доказать, что, если G – прямоугольник: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, то

$$\iint\limits_G f(x)g(y)dxdy = \left(\int\limits_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int\limits_c^d g(y)dy\right).$$

8. Найти среднее значение функции $f(x, y)$ в области G :

а) $f(x,y) = \dfrac{\sin^3 x \cdot \sin^3 y}{\cos^8 y}$, G – прямоугольник: $0 \le x \le \pi/4$, $0 \le y \le \pi/4$;

б) $f(x, y) = x \cdot e^{2x+y}$, G – прямоугольник: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$;

в) $f(x, y) = x - 2y$, G – треугольник с вершинами $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$.

9. Оценить величину интеграла: $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \frac{dxdy}{1+\sin^2 x + \cos^2 y}$.

Задачи к главе 4.

Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} dy \int_{5-\sqrt{3+2y-y^2}}^{5+\sqrt{3+2y-y^2}} f(x,y)dx$.

2. $\displaystyle\int_{-4}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)dy + \int_{0}^{4} dx \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy$.

3. $\displaystyle\int_{-2}^{0} dy \int_{-\sqrt{-2y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

4. $\displaystyle\int_{0}^{5} dy \int_{y/5}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

5. $\displaystyle\int_{0}^{4/3} dy \int_{5y-5}^{\sqrt{y^2+1}} f(x,y)dx$.

6. $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}-1} f(x,y)dx$.

7. $\displaystyle\int_{-5/2}^{5/2} dx \int_{x^2-5}^{x^2/5} f(x,y)dy$.

8. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} dx \int_{2/x}^{2x+3} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-2}^{2x+3} f\big(x,y\big)dy$.

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в интегралах:

9. $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$.

10. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}-x^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

11. $\displaystyle\int\limits_{0}^{63/29} dx \int\limits_{3-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{14x-x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

12. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax-x^2}} f\left(x^2+y^2\right) dy + \int\limits_{2a}^{4a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4ax-x^2}} f\left(x^2+y^2\right) dy.$

Вычислить двойные интегралы:

13. $\iint\limits_{G} (2x-y)\,dxdy$, где G – треугольник с вершинами $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(0,1)$

14. $\iint\limits_{G} (3x+2y)\,dxdy$, где G – часть плоскости, ограниченная кривыми $y = x^2/2$ и $y = \sqrt{2x}$.

15. $\iint\limits_{G} xy\,dxdy$, где G – часть плоскости, ограниченная кривыми $x^2+y^2 = ax,\ x^2+y^2 = 2ax$ и $y = 0,\ y \geq 0,\ a \geq 0.$

16. $\iint\limits_{G} 2x^2 y\,dxdy$, где G – часть плоскости, ограниченная линиями $y^2 = ax,\ x^2+y^2 = 2ax,\ y = 0,\ y > 0,\ a > 0.$

Перейти к полярным координатам и вычислить интегралы:

17. $\iint\limits_{G} e^{x^2+y^2}\,dxdy$, G – кольцо, ограниченное концентрическими окружностями: $x^2+y^2 = 1$ и $x^2+y^2 = 4$.

18. $\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, G – часть плоскости, лежащая в первом квадранте и ограниченная окружностью $x^2+y^2=9$ и прямыми $y=0$ и $y=x$.

19. $\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, G – часть плоскости, ограниченная двумя окружностями: $x^2+y^2=4$ и $(x-1)^2+y^2=1$ и осью OY.

20. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, G – часть плоскости, ограниченная окружностями $(x-1)^2+y^2=1$, $(x-2)^2+y^2=4$ и прямой $y=x$.

21. $\iint\limits_G \frac{(2x+y)dxdy}{x^2+y^2}dxdy$, где G ограничена кривыми $x^2+y^2=4$ и $3x=y^2$.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми:

22. $r=a(1-\cos\varphi)$.

23. $x=4-y,\ 2x=y,\ y=0$.

24. $xy=1,\ x=7-y$.

25. $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x\sqrt{3}$.

26. $1\le\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 4$, $y\le 0,\ y\ge x\sqrt{3}$.

27. $y=\sqrt{4-x^2},\ y=2-\sqrt{4-x^2}$.

28. $x^2+y^2=36,\ x^2=y,\ y=0,\ x>0$.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

29. $y=\sqrt{x},\ y=x,\ z=0,\ x+z=4$.

30. $x^2+y^2=4,\ x^2=y,\ z=0,\ z=3x$.

31. $x^2+y^2=6y,\ z=0,\ z=9-x^2$.

32. $x^2 + y^2 = 4y,\ \ x^2 + y^2 = 6y,\ \ z = 0,\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Найти площадь части поверхности Ω_1, вырезанной поверхностью Ω_2:

33. Ω_1: $x^2 + z^2 = y^2$, Ω_2: $y^2 = 2x$.

34. Ω_1: $z = x^2 - y^2$, Ω_2: $x^2 + y^2 = 1$.

35. Ω_1: $z^2 = x^2 + y^2$, Ω_2: $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

36. Ω_1: $z = x^2 + y^2$, Ω_2: $x^2 + y^2 = 4$.