

Российский государственный университет нефти и
газа имени И. М. Губкина

Кафедра высшей математики

В.В. Калинин, И.В. Петрова

МАТЕМАТИКА

в нефтегазовом образовании

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

ВЫПУСК 3. Часть 2.

**Кратные, криволинейные и
поверхностные интегралы**

Москва 2005

В.В. Калинин, И.В. Петрова

МАТЕМАТИКА

в нефтегазовом образовании

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

ВЫПУСК 3. Часть 2.

**Кратные, криволинейные и
поверхностные интегралы**

Допущено Учебно-методическим
объединением по высшему нефтегазовому
образованию в качестве учебного пособия
для студентов вузов нефтегазового профиля

РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
Москва 2005

Калинин В.В., Петрова И.В.

К 18 Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи: Учеб. пособие. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. Вып. 3. Часть 2: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. – 173с.

Пособие продолжает серию учебно-методических изданий по курсу высшей математики. Третий выпуск посвящен одному из фундаментальных понятий математики – понятию интеграла. В пособии подробно изучены всевозможные приложения интегрального исчисления, разобраны многочисленные примеры, приведены теоретические вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей нефтегазового образования, а также магистрантов, аспирантов, занимающихся исследованиями, связанными с применениями математических методов. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

проф. кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина Т.С. Соболева,

проф. кафедры математики МИФИ (технический университет)
д.ф.-м.н. Н.В. Мирошин

© Калинин В.В.,
Петрова И.В., 2005

© Издательство «Нефть и газ»
РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина,
2005

Из предисловия к выпуску 2.

Пособие «Математика. Теория и задачи», выпущенное на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, представляется изданием, которое позволит читателю (студенту, аспиранту, специалисту, преподавателю) остановиться, чтобы осмыслить великую и «ужасную» науку – **МАТЕМАТИКУ**. Пособие уникально в том смысле, что оно может быть полезно и для тех читателей, кто в данное время изучает вузовский курс высшей математики, и для тех из них, которые этот курс формально (давно или недавно) завершили и даже получили вполне устраивающие их оценки, но при этом хотят понять: чему же их, собственно, обучали на заре их студенческой юности – на первом-втором курсах. Несомненна польза этой книги при подготовке к аспирантуре и магистратуре: ведь многим в процессе дальнейшего обучения предстоит решать задачи, связанные с серьезным математическим аппаратом. А уж специалисты, профессионально работающие в математике – преподаватели, исследователи – несомненно, найдут для себя много новых, нестандартно представленных подходов, и получат истинное удовольствие от прочтения рукописи.

Это издание задумал и начал воплощать в жизнь замечательный человек и ученый, заведующий кафедрой высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, профессор Виталий Тимофеевич Харин. В книге представлен результат его многолетнего опыта преподавания математики в нашем университете и в институтах зарубежных стран.

Предисловие к выпуску 3.

Мы предлагаем читателю третий выпуск пособия «Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи». Этот выпуск посвящен одному из самых фундаментальных понятий в математике – понятию интеграла. Термин «интегральное исчисление» впервые был введен в обиход И. Бернулли в самом конце XVII века, а его современное обозначение \int обязано своим происхождением Лейбницу. Это, кстати, было частью компромисса между двумя великими учеными: Лейбниц отказался от названия “*calculus summatorius*” в пользу “*calculus integralis*”, введенного И. Бернулли, но зато сохранил свое обозначение – стилизованное латинское «S».

С тех пор понятие интеграла является широко востребованным в самых разных разделах математики: математическом анализе, дифференциальных уравнениях, функциональном анализе, *etc.* О важности этого понятия знал даже Лев Толстой. В "Анне Карениной" он писал: "Когда бы в университете мне сказали, что другие понимают интегральное вычисление, а я не понимаю, – тут самолюбие. Но тут надо быть убежденным прежде, что нужно иметь известные способности для этих дел и, главное, в том, что все эти дела важны очень."

Авторы надеются, что настоящее пособие будет востребовано людьми творческими, желающими узнать предмет больше и глубже, не ограничиваясь лишь формальным и сухим изложением втузовского учебника, имеющими, как герой Л. Толстого, самолюбие, чтобы овладеть им, или, при возникновении такой необходимости, повторить аппарат интегрального исчисления и его приложений.

В ходе подготовки к печати выпуска 3 пособия «Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи» авторы столкнулись с тем, что объем представленного материала по разделу «Интегральное исчисление» оказался достаточно большим, что создавало определенные сложности в использовании книги. Кроме того, интегральное исчисление в курсе высшей

математики обычно изучается студентами в течение нескольких семестров, а некоторая его часть вообще остается за пределами вузовской программы у ряда специальностей, не требующих особо глубокой математической подготовки. Поэтому было принято решение разбить выпуск 3 пособия на две части. Часть 1 выпуска (главы 1 – 3) содержит материал по неопределенным, определенным, несобственным интегралам и интегралам, зависящим от параметра. В части 2 (главы 4 – 7) излагается теория, связанная с кратными (двойными и тройными), криволинейными и поверхностными интегралами.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:

<http://kvm.gubkin.ru/index.html>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к выпуску 2	1
Предисловие к выпуску 3	2
Оглавление	4
Глава 4. Двойной интеграл.	6
4.1. Понятие двойного интеграла	6
4.2. Вычисление двойного интеграла	14
4.3. Замена переменных в двойных интегралах	26
4.4. Вычисление площади поверхности	33
4.5. Несобственные кратные интегралы	40
Теоретические вопросы к главе 4.	43
Задачи к главе 4.	44
Глава 5. Тройной интеграл.	48
5.1. Определение тройного интеграла	48
5.2. Вычисление тройного интеграла	50
5.3. Замена переменных в тройном интеграле	58
Теоретические вопросы к главе 5.	71
Задачи к главе 5.	71
Глава 6. Криволинейные интегралы.	76
6.1. Криволинейный интеграл I-го рода	76
6.2. Криволинейный интеграл II-го рода	82
6.3. Свойства криволинейных интегралов I и II рода	87
6.4. Связь криволинейных интегралов I и II рода	91
6.5. Формула Грина	93
6.6. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования	106

Теоретические вопросы к главе 6.	116
Задачи к главе 6.	117
Глава 7. Поверхностные интегралы.	121
7.1. Поверхностный интеграл I-го рода	121
7.2. Ориентация поверхности	133
7.3. Поверхностный интеграл II -го рода	139
7.4. Свойства поверхностных интегралов I-го и II-го рода	151
7.5. Формула Остроградского	156
7.6. Формула Стокса	161
Теоретические вопросы к главе 7.	168
Задачи к главе 7.	169
Глоссарий	172