

## Глава 2. Определенный интеграл.

### 2.1. Понятие определенного интеграла.

В первой главе мы изучали *неопределенный интеграл*, представляющий собой множество первообразных заданной функции. Теперь настала пора познакомиться с понятием *определенного интеграла*, потребность в изучении которого возникла в связи с необходимостью решать геометрические и физические задачи. Помимо этого, дальше в пособии мы встретимся с двойными, тройными, криволинейными интегралами; а еще в математике встречаются однокоренные понятия, такие как «интегральные кривые», «интегральные многообразия», «интегральные преобразования» и т.д. Общий корень всех этих математических терминов произошел от латинского "integratio" = «восстановление, возобновление», и впервые был предложен *Я. Бернулли* в 1690 году (правда, пальму его первенства оспаривал другой представитель той же семьи – *И. Бернулли*).

Для того чтобы понять, откуда возникает определенный интеграл, обратимся к физической задаче. Пусть автомобиль с неработающим датчиком пройденного пути (одометром) движется по шоссе, на котором нет километровых столбов. (Вместо автомобиля можно рассматривать самолет или ракету, где, уж точно, отсутствие столбиков не вызывает сомнений). В каждый момент времени есть возможность, взглянув на спидометр, выяснить, какова скорость автомобиля. Есть ли возможность в таком случае определить пройденный автомобилем путь? (Для ракет, конечно, спидометр придумать не просто, но для них созданы датчики ускорения – акселерометры, и задача лишь немного видоизменяется).

Пусть данные измерения скорости автомобиля представлены в таблице (из которой очевидно, что рассматривается процесс разгона, когда скорость автомобиля монотонно растет):

Время (с)	0	2	4	6	8	10
Скорость (м/с)	0	6	11	15	18	20

График зависимости скорости от времени состоит из ряда изолированных точек на плоскости (рис.1). На том же графике непрерывной линией представлена реальное изменение скорости автомобиля.

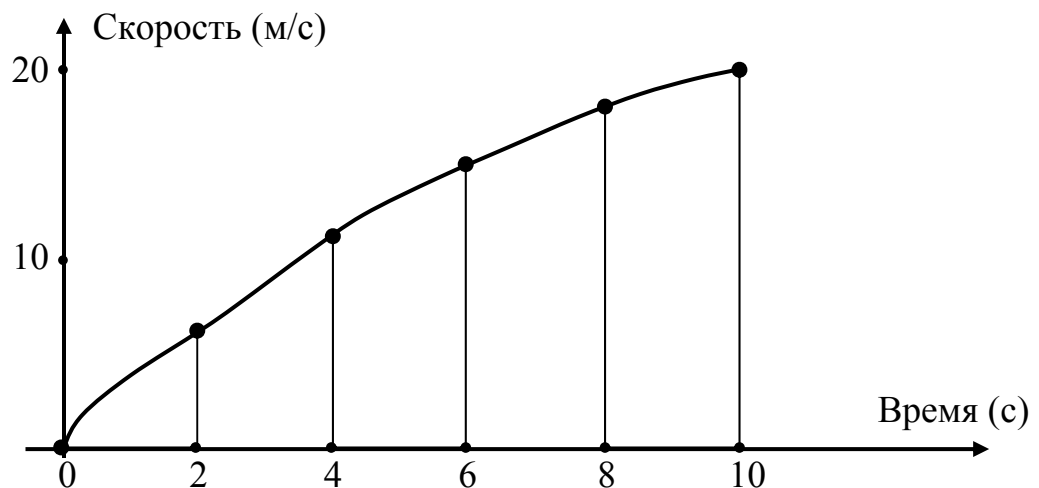


Рис.1. Измерения скорости автомобиля.

Можно представить, по крайней мере, два способа оценки пройденного пути.

**Способ №1 (оценка снизу).** Будем считать, что на каждом интервале времени после замера скорость сохраняла свое значение. Тогда пройденный путь равен величине

$$0 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 18 \cdot 2 = 100 \text{ (м)}.$$

Понятно, что поскольку в данном примере реальная скорость автомобиля возрастала, полученная оценка пути является заниженной, т.е.

$$S > 100 \text{ (м)}.$$

**Способ №2 (оценка сверху).** Предположим теперь, что на каждом интервале скорость совпадала со своим конечным значением на этом интервале. Тогда для пути получаем оценку

$$6 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 140 \text{ (м)}.$$

При таком способе мы переоценили пройденный путь  $S$ , и на самом деле:

$$S < 140 \text{ (м)}.$$

Изобразим графически, как проводилась оценка пути в каждом из двух способов. На рис.2 горизонтальной штриховкой изображена фигура, площадь которой равна заниженной оценке пути по 1 способу, а вертикальной штриховкой представлена завышенная оценка пути по 2 способу.

Если полученная точность измерения пройденного пути ( $100 < S < 140$ ) кажется нам недостаточно хорошей, то возникает вопрос: возможно ли увеличить эту точность и как? А возможно ли, вообще, нахождение реального значения пути автомобиля?

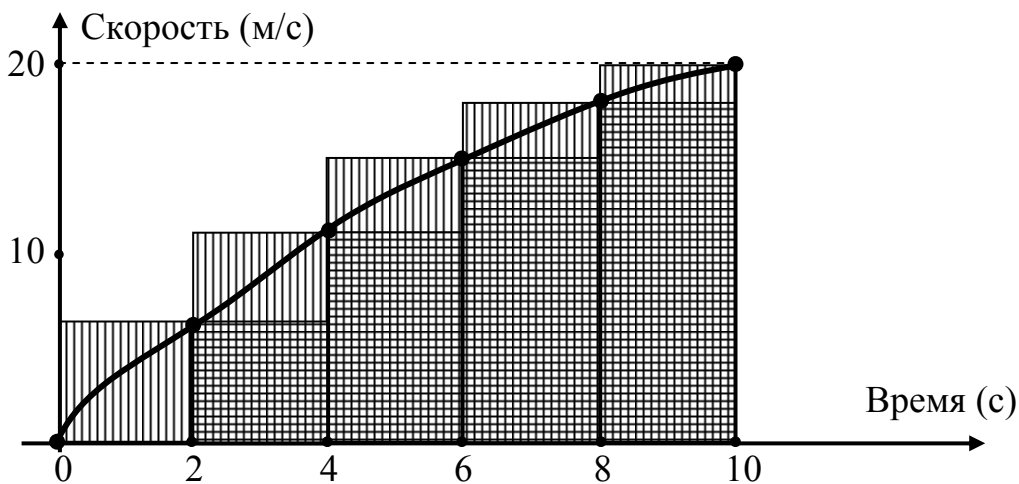


Рис.2. Оценка пройденного пути.

Понятно, что для более аккуратных оценок пути исходной таблицы недостаточно – измерения скорости надо проводить чаще. Пусть соответствующие данные представлены в новой таблице:

Время (с)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скорость (м/с)	0	4	6	9	11	13	15	17	18	19	20

Теперь можно опять построить график зависимости скорости автомобиля от времени и провести оценки пути снизу (заниженную) и сверху (завышенную). Соответствующие заштрихованные фигуры, дающие эти оценки, нарисованы на рис.3.

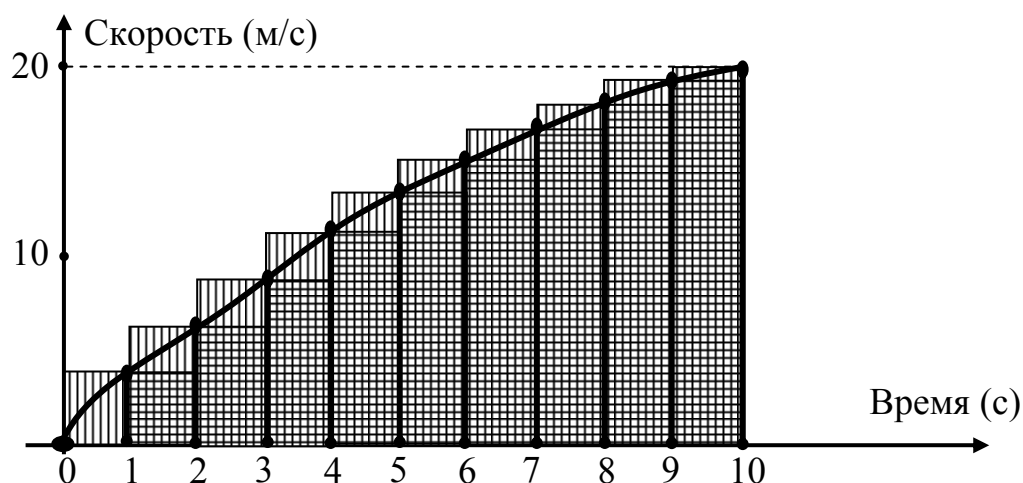


Рис.3. Улучшенная оценка пройденного пути.

Площадь фигуры с горизонтальной штриховкой равна

$$0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 18 \cdot 1 + 19 \cdot 1 = 112 \text{ (м)}.$$

Площадь фигуры с вертикальной штриховкой равна

$$4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 18 \cdot 1 + 19 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 132 \text{ (м)}.$$

Пройденный автомобилем путь больше площади «описанной» ступенчатой фигуры с горизонтальной штриховкой, но меньше площади «вписанной» ступенчатой фигуры с вертикальной штриховкой. Таким образом, теперь для пройденного пути мы получили улучшенную оценку

$$112 < S < 132.$$

Для того, чтобы дать еще более точную оценку величины пути автомобиля, нам пришлось бы еще более часто проводить измерения его скорости. При этом площадь вписанной ступенчатой фигуры, дающей нижнюю оценку пути, увеличивалась бы, а площадь описанной ступенчатой фигуры, дающей верхнюю оценку, уменьшалась. Из физических соображений понятно, что с увеличением частоты измерений эти две оценки должны сойтись (ведь существует же точное значение пути, пройденного автомобилем). Но тогда это точное значение пройденного пути должно представлять собой не что иное, как площадь криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком зависимости скорости от времени, снизу – осью абсцисс, а с боков – вертикальными прямыми, отвечающими начальному и конечному времени движения (рис.3).

Вот теперь можно непосредственно перейти к самому понятию определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$ . Для удобства изложения пока будем считать, что  $a < b$  и  $f(x) > 0$  (рис.4).

Проведем произвольным образом разбиение отрезка  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ . Введем обозначения для длин получившихся отрезков:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \dots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}. \quad (1)$$

Для каждого из отрезков  $[x_{i+1}, x_i]$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) введем обозначения  $\underline{x}_i$  и  $\bar{x}_i$  для точек, отвечающих, соответственно, наименьшему и наибольшему значениям функции  $f(x)$  на этом отрезке. Сами указанные значения функции обозначим так:

$$f(\underline{x}_i) = m_i, \quad f(\bar{x}_i) = M_i.$$

Кроме того, на каждом интервале  $(x_{i+1}, x_i)$  выберем произвольным образом по точке  $\xi_i$ .

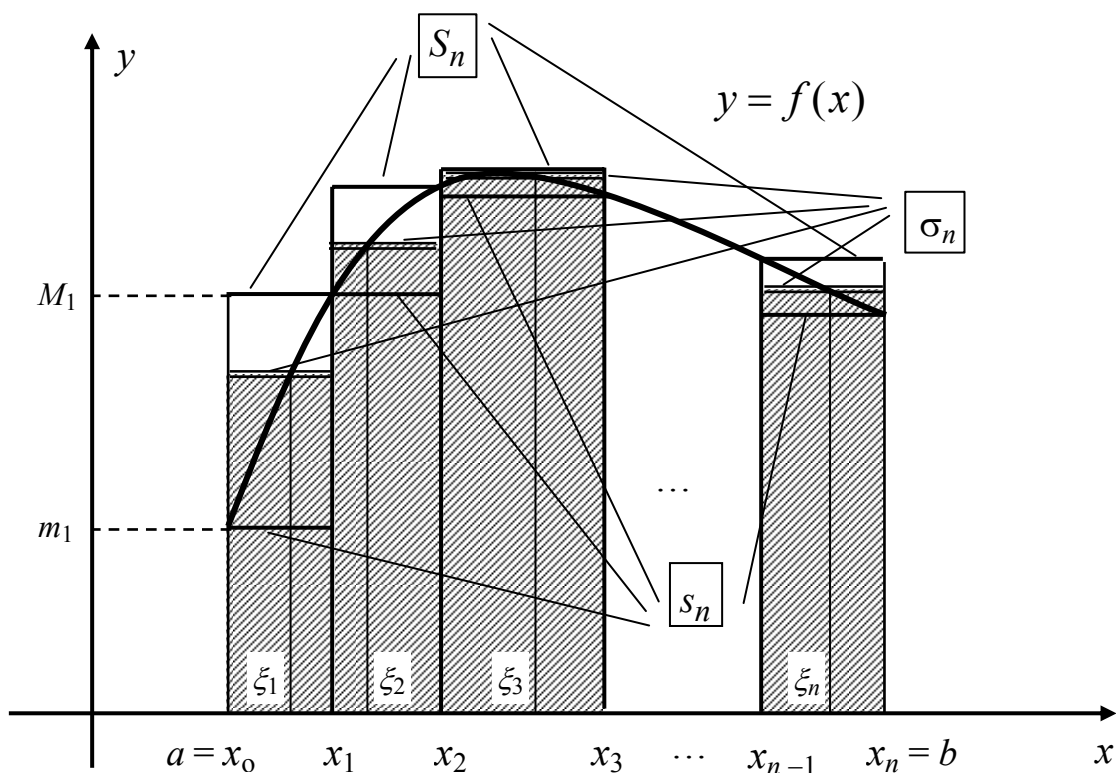


Рис. 4. К определению понятия определенного интеграла.

Теперь можно образовать следующие суммы:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n,$$

*(нижняя интегральная сумма)*

$$S_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n, \quad (2)$$

*(верхняя интегральная сумма)*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n.$$

*(интегральная сумма)*

На рис. 4 заштрихованная ступенчатая фигура имеет площадь, равную интегральной сумме  $\sigma_n$ . Нижняя интегральная сумма представлена площадью

вписанной ступенчатой фигуры, расположенной под кривой  $y = f(x)$ , а верхняя интегральная сумма – площадью описанной фигуры, расположенной выше этой кривой.

Очевидно, что определенные в (1) интегральные суммы связаны неравенствами

$$s_n \leq \sigma_n \leq S_n. \quad (3)$$

Важной характеристикой проведенного разбиения отрезка  $[a, b]$  является максимальная длина отрезков разбиения (1):

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i. \quad (4)$$

Величину  $\lambda$  обычно называют *диаметром разбиения*.

Рассмотрим теперь вопрос, о том, как ведут себя интегральные суммы (3) при уменьшении диаметра разбиения  $\lambda$  отрезка  $[a, b]$ . Для того чтобы не утомлять читателей сложными оценками, рассмотрим случай, когда функция  $y = f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  конечное число интервалов монотонности, и на каждом из таких интервалов разбиение проводится на отрезки равной длины. (Для функции, изображенной на рис.4 есть два интервала монотонности: вначале, на интервале  $(a, \bar{x}_2)$ , функция возрастает, а на интервале  $(\bar{x}_2, b)$  – убывает).

Пусть на каком-то из интервалов  $(c, d)$  монотонности (для определенности, интервале возрастания) проведено разбиение на  $n$  равных отрезков, длина каждого из которых равна

$$\Delta x = \frac{d - c}{n}.$$

Для возрастающей функции наименьшее значение достигается на левом конце интервала определения, а наибольшее – на правом. Поэтому

$$m_1 = f(x_0), \quad m_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad m_n = f(x_{n-1});$$

$$M_1 = f(x_1), \quad M_2 = f(x_2), \quad \dots, \quad M_n = f(x_n).$$

Теперь можно записать верхнюю и нижнюю интегральные суммы функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[c, d]$ :

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \dots + m_n \Delta x = \Delta x (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}));$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + \dots + M_n \Delta x = \Delta x (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

Рассмотрим разность между верхней и нижней интегральными суммами (для примера с движением автомобиля такая разность характеризовала бы точность определения пройденного пути):

$$\Delta S = S_n - s_n = \Delta x [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_0) - f(x_1) - \dots - f(x_{n-1})].$$

Или

$$\Delta S = S_n - s_n = \Delta x [f(x_n) - f(x_0)] = \Delta x [f(d) - f(c)] = [f(d) - f(c)] \cdot \frac{d-c}{n}.$$

Теперь понятно, что с увеличением количества  $n$  отрезков разбиения, величина  $\Delta S$  стремится к нулю, а значит, верхняя и нижняя интегральные суммы стремятся к одному и тому же пределу при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (5)$$

Поскольку, мы предположили, что на всем отрезке  $[a, b]$  определения функции  $y = f(x)$  имеется конечное число интервалов монотонности, а на каждом из них при разбиении на отрезки равной длины справедливо условие (5), то и для интегральных сумм (2) функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  также имеет место равенство

$$\lim_{\lambda = \max_i \Delta x \rightarrow 0} \Delta S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_n - s_n) = 0.$$

Таким образом, верхняя и нижняя интегральные суммы функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  при стремлении к нулю диаметра  $\lambda$  разбиений (4) имеют один и тот же предел  $I$ :



$$\lim_{\lambda=\max_i \Delta x \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda=\max_i \Delta x \rightarrow 0} s_n = I. \quad (6)$$

Если теперь вспомнить известную теорему «О двух милиционерах» (см. главу 1 выпуска 1 настоящего пособия), то становится ясно, что и произвольная интегральная сумма  $\sigma_n$ , в силу ограничений (3), должна иметь тот же самый предел:

$$\lim_{\lambda=\max_i \Delta x \rightarrow 0} \sigma_n = I. \quad (7)$$

Теперь мы подошли к определению понятия определенного интеграла.

**Определение.** Если для любой последовательности разбиений отрезка  $[a, b]$  такой, что диаметр разбиений  $\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$  стремится к нулю, и при произвольном

выборе точек  $\xi_i$  на интервалах разбиения  $(x_{i-1}, x_i)$  интегральные

суммы  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$  функции  $f(x)$

стремятся к одному и тому же пределу  $I$ , то этот предел называется **определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$** :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda=\max_i \Delta x \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\lambda=\max_i \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (8)$$

Число  $a$  в выражении (8) называется **нижним пределом**, а число  $b$  – **верхним пределом** интеграла.

Если определенный интеграл (8) существует, то функция  $f(x)$  называется **интегрируемой** на отрезке  $[a, b]$ .

Если бы не рассуждения, проведенные нами выше, данное определение определенного интеграла могло бы породить целый ряд вопросов, например:

– не слишком ли строги требования, предъявляемые к функции  $f(x)$ , для существования определенного интеграла: ведь и точки деления отрезка выби-

рались произвольным образом, и сами выбранные на каждом интервале точки также могли быть любыми?

– не слишком ли ограничен набор функций, для которых при данном определении вообще существует определенный интеграл?

– почему введенное понятие называется *интегралом*, ведь ранее уже был определен неопределенный интеграл как семейство первообразных, а определение (8), на первый взгляд, никак не связано с первообразной функции  $f(x)$ ?

Полученные выше оценки (5) – (7) интегральных сумм (хотя они и были нами обоснованы только для функций с конечным числом интервалов монотонности), позволяют легко ответить на первые два из сформулированных вопросов. Действительно, справедлива следующая теорема (ее доказательство выходит за рамки данного пособия и будет опущено):

**Теорема 1.** Для любой функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , су-

ществует определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ .

Ответ на вопрос о том, что общего у определенного и неопределенного интегралов, будет получен несколько позже. Перед проведением дальнейшего исследования необходимо сделать два важных для понимания замечания.

**Замечание 1.** Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt .$$

Действительно, определенный интеграл представляет собой предел интегральных сумм, а при вычислении предела не имеет значения, как обозначена переменная.

**Замечание 2. (Геометрический смысл определенного интеграла).** В случае положительной на отрезке  $[a, b]$  непрерывной функции  $f(x)$  оп-

ределенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  представляет собой площадь криволинейной

трапеции, ограниченной сверху графиком функции  $y = f(x)$ , снизу – осью  $Ox$ , слева – прямой  $y = a$  и справа прямой  $y = b$  (рис. 5):

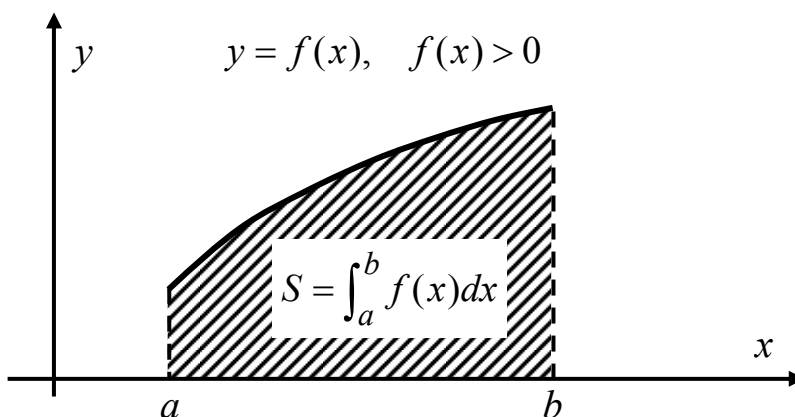


Рис. 5. Геометрический смысл определенного интеграла.

Сформулируем теперь общие

### ***Свойства определенного интеграла:***

❶. Для постоянной на  $[a, b]$  функции

$$\int_a^b k dx = k(b - a). \quad (9)$$

**Доказательство.** Все интегральные суммы (2) функции  $f(x) = k$  являются постоянной величиной:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n k \Delta x_i = k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = k(b - a).$$

Следовательно, и их предел (определенный интеграл) равен той же величине.

2. Определенный интеграл от суммы двух интегрируемых функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (10)$$

3. Определенный интеграл тем больше, чем больше функция:

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx, \quad (a < b). \quad (11)$$

4. Если  $m$  – наименьшее, а  $M$  – наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , где  $a < b$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (12)$$

(Свойства 2 – 4 легко доказываются на основе определения определенного интеграла и свойств пределов функции).

5. (Теорема о среднем). Для непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$  существует такая точка  $\xi \in [a, b]$ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a). \quad (13)$$

*Доказательство.* По свойству 4 при  $a < b$  справедливо неравенство  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ . Как известно, непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция принимает на этом отрезке любое значение, заключенное между своими наименьшим и наибольшим значениями (см. гл.1 выпуска 2 настоящего пособия).

Тогда найдется точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Отсюда и следует утверждение теоремы о среднем.

6. Для интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$  и точки  $c \in (a, b)$

выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (14)$$

Геометрическая интерпретация свойства 6 представлена на рис. 6, а доказательство предоставляется читателям для самостоятельной работы.

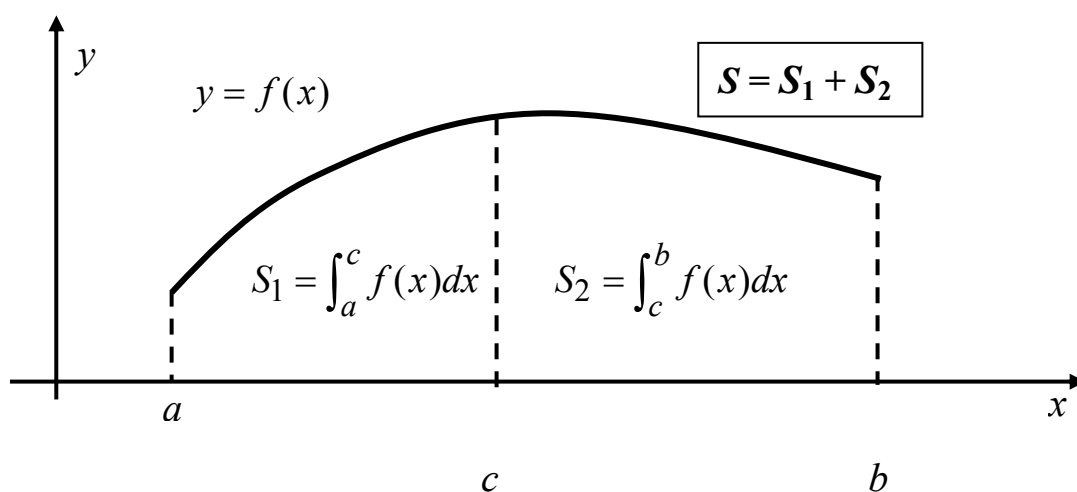


Рис. 6. К свойству 6:  $S = \int_a^b f(x) dx = S_1 + S_2$ .

До сих пор при записи определенного интеграла мы предполагали, что его нижний предел  $a$  меньше верхнего предела  $b$ . Для того, чтобы снять этого ограничение, положим по определению (!):

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx, \quad (a > b), \quad (15)$$

а также

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (16)$$

Хотя математические определения и не принято обсуждать, тем не менее, основной довод в пользу того или иного определения состоит в его разумности.

Желательно, в частности, чтобы при расширении некоторого понятия на более широкий класс объектов были выполнены свойства, справедливые для более узкого класса. К примеру, именно таким образом в элементарной математике определили степень с отрицательным показателем:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , ( $n > 0$ ), хотя понятно, что исходное определение степени  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$  в данном случае не

работоспособно: пытаться умножить число  $a$  на само себя «минус три раза» бессмысленно. Вместе с тем, при таком определении, оказались справедливыми все свойства степеней с положительными показателями. Точно так же и определения (15) и (16) позволяют сохранить справедливость свойств 1, 2, 5, 6 определенных интегралов вне зависимости от того, какой из пределов интегрирования больше другого. В частности, само свойство (16) немедленно «следует» из (15) при  $a = b$ . (В кавычках – потому, что определение (15) не предусматривает возможности совпадения верхнего и нижнего пределов интегрирования).

## 2.2. Вычисление определенного интеграла.

После данных выше определений можно перейти к вопросу о том, как научиться вычислять определенные интегралы, и как определенные интегралы связаны с неопределенными.

Рассмотрим функцию  $f(t)$ , непрерывную на отрезке  $[a, b]$ . Выберем на интервале  $(a, b)$  произвольную точку  $x$ . Тогда на отрезке  $[a, x]$  существует определенный интеграл от функции  $f(t)$ . (Для того чтобы избежать путаницы с обозначениями переменных, переменную интегрирования будем обозначать через  $t$ , сохраняя обозначение  $x$  для верхнего предела интеграла). Этот интеграл, естественно, зависит не только от вида функции  $f(t)$ , но и от переменной  $x$ , т.е. представляет собой функцию переменной  $x$  – верхнего предела интегрирования:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

Геометрически, в случае положительной функции  $f(t)$ , величина  $\Phi(x)$  представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью  $OX$  и прямыми  $t = a$  и  $t = b$  (рис. 7).

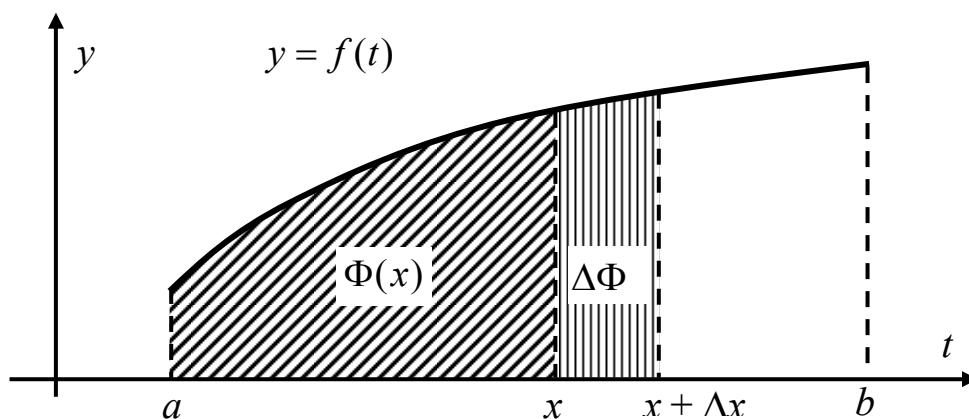


Рис. 7. К вычислению определенного интеграла.

Пусть теперь независимая переменная  $x$  получила приращение  $\Delta x$ . Тогда имеем приращение функции  $\Phi(x)$ :

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

Используя свойства 6 и 5 определенных интегралов, получим

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \cdot \Delta x, \quad \xi \in [x, x + \Delta x]. \quad (2)$$

(На рис. 7 приращение  $\Delta\Phi$  представляет собой площадь фигуры с вертикальной штриховкой).

Теперь, окончательно, можно установить связь понятий неопределенного и определенного интегралов. Эта связь основана на следующих двух теоремах:

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $\Phi(x)$  определена на интервале  $(a, b)$  как определенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

тогда функция  $\Phi(x)$  представляет собой первообразную функции  $f(x)$ :

$$\Phi'(x) = f(x). \quad (3)$$

*Доказательство* теоремы немедленно вытекает из равенства (2). Действительно, имеем

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

**Следствие.** Следствием из теоремы 1 является утверждение, сформулированное без доказательства при изучении неопределенных интегралов: *любая непрерывная функция имеет первообразную.* (Первообразная непрерывной функции  $f(x)$  может быть получена по формуле (1)).

**Теорема 2. (Формула Ньютона – Лейбница).** Если функция  $F(t)$  является первообразной непрерывной функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

*Доказательство.* По теореме 1 функция  $\Phi(x)$ , определенная по формуле (1), также является первообразной для  $f(x)$ . Следовательно, по теореме о первообразных (см. главу 1) функции  $\Phi(x)$  и  $F(x)$  отличаются на постоянную величину:

$$\Phi(x) - F(x) = C = \text{const}.$$

Имеем при  $x = a$ :

$$C = \Phi(a) - F(a) = -F(a).$$

Тогда



$$\Phi(x) = C + F(x) = F(x) - F(a).$$

Теперь при подстановке в последнее равенство значения  $x = b$ , получим

$$\Phi(b) = F(b) - F(a),$$

что, по определению функции  $\Phi(x)$ , приводит к равенству (4).

Формула Ньютона – Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы для функций, первообразные которых известны.

**ПРИМЕР 1.** 
$$\int_0^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}. \blacksquare$$

**ПРИМЕР 2.** 
$$\int_{-1}^{-e} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{-e} = \ln|-e| - \ln|-1| = \ln e - \ln 1 = 1. \blacksquare$$

**ПРИМЕР 3.** Вычислить определенный интеграл  $\int_0^2 x e^{-x^2} dx$ .

Здесь удобнее вначале найти первообразную (неопределенный интеграл):

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Тогда

$$\int_0^2 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} (e^{-4} - 1) = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}). \blacksquare$$

**ПРИМЕР 4.** Найти  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx$ , ( $m$  и  $n$  – целые).

Для случая  $n \neq m$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

При  $n = m$  интеграл вычисляется иначе:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi - (-\pi)) = \pi.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

(Заметим, что если определить скалярное произведение двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с помощью формулы

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) \, dx,$$

то полученный в примере результат свидетельствует об **ортogonalности** функций  $\sin nx$  и  $\sin mx$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  при  $n \neq m$ ). ■

### **Теорема 3. (Замена переменной в определенном интеграле).**

Пусть  $f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция, а функция  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[t_0, t_1]$  и удовлетворяет на концах этого отрезка условиям:  $\varphi(t_0) = a$ ,  $\varphi(t_1) = b$ . Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt. \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , т.е.  $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ . Тогда, по формуле для замены переменной в неопределенном интеграле,  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C$ . Теперь, используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем требуемое утверждение:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} = F(\varphi(t_1)) - F(\varphi(t_0)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

**ПРИМЕР 5.** Найти определенный интеграл  $\int_3^{11} x\sqrt{x-2} dx$ .

Для устранения иррациональности в интеграле удобно выполнить замену переменной  $\sqrt{x-2} = t$ . Тогда по формуле (5) получаем

$$\int_3^{11} x\sqrt{x-2} dx = \left. \begin{array}{l} x = 2 + t^2, \\ dx = 2t dt. \\ x = 3 \Rightarrow t = 1 \\ x = 11 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_1^3 (2 + t^2)t \cdot 2t dt =$$

$$= \int_1^3 (4t^2 + 2t^4) dt = \frac{4}{3}t^3 \Big|_1^3 + \frac{2}{5}t^5 \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{4}{3}(3^3 - 1) + \frac{2}{5}(3^5 - 1) = \frac{1972}{15}. \blacksquare$$

**Замечание.** Отметим, что при всей схожести применения формул замены переменной в неопределенном и определенном интегралах, имеется весьма важное их отличие: при вычислении определенного интеграла не нужно возвращаться к исходной переменной, вместо этого просто производится соответствующее изменение пределов интегрирования.

**ПРИМЕР 6.** Вычислить определенный интеграл  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

Здесь для вычисления интеграла удобно выполнить тригонометрическую подстановку, которая позволяет избавиться от иррациональности:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \equiv \left. \begin{array}{l} x = a \sin t, \\ dx = a \cos t dt. \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left( t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi a^2}{4}. \blacksquare$$

Сформулируем еще один прием вычисления определенных интегралов, аналогичный уже рассмотренному в главе 1 для неопределенных интегралов.

**Теорема 4. (Интегрирование по частям в определенном интеграле).**

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  – непрерывны и имеют непрерывные производные. Тогда

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (6)$$

*Доказательство.* Проинтегрируем обе части равенства  $(uv)' = u'v + uv'$  по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ :

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx.$$

Интеграл в левой части может быть найден по формуле Ньютона–Лейбница, а правая часть преобразована с учетом равенств  $du = u'dx$ ,  $dv = v'dx$ :

$$(uv) \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv.$$

Отсюда и получаем формулу (6).

**ПРИМЕР 7.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 \arcsin x dx$ .

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{\arcsin x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} &= x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{x}_{v} \underbrace{d \arcsin x}_{du} = 1 \cdot \arcsin 1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + (0-1) = \frac{\pi}{2} - 1. \blacksquare \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 8.** Вычислить  $\int_1^e (x+3) \ln x dx$ .

Здесь предварительно нужно внести множитель  $(x+3)$  под знак дифференциала и только затем интегрировать по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^e (x+3) \ln x dx &= \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{d\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)}_{dv} = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)}_v \underbrace{d \ln x}_{du} = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + 3e\right) \ln e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \frac{e^2}{2} + 3e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e - 3x \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^2}{2} + 3e - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - 3e + 3 = \frac{e^2 + 13}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.3. Геометрические приложения определенного интеграла.

Ранее мы уже отмечали геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной положительной функции как площади криволинейной трапеции, расположенной под графиком этой функции. Уже одно это свойство делает оправданным подробное изучение определенных интегралов. Вспомним, как в очень древние времена Архимед (*Archimedes*; около 287–212 до н.э.) путем сложных и громоздких вычислений находил площадь параболического сегмента. Сейчас такая задача доступна среднему ученику средней школы, изучивше-

му основы интегрального исчисления. Понятно, однако, что сфера применения определенных интегралов не ограничивается только задачей нахождения площадей: как мы увидим дальше, с их помощью можно находить другие важные характеристики геометрических фигур (длины дуг, поверхности и объемы тел вращения, и т.д.), а также решать различные механические и физические задачи. Таким образом, в каком-то смысле, определенный интеграл представляет собой универсальный математический аппарат, связывающий математику с реальной жизнью.

### ***1. Вычисление площадей в декартовых координатах.***

Напомним, что для нахождения площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком неотрицательной функции  $y = f(x)$ , снизу – осью ОХ, слева – прямой  $y = a$  и справа – прямой  $y = b$  (рис. 8а), необходимо просто вычислить соответствующий определенный интеграл:

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \geq 0. \quad (1a)$$

Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  отрицательна, то площадь криволинейной трапеции равна соответствующему интегралу, взятому с противоположным знаком (рис. 8б):

$$S = -\int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \leq 0. \quad (1б)$$

Наконец, для функции  $y = f(x)$ , которая на отрезке  $[a, b]$  может менять свой знак, для нахождения площади нужно вычислить определенный интеграл от *абсолютной величины* функции  $f(x)$  (рис. 8в):

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1в)$$

(Отметим, впрочем, что в последнем случае, обычно бывает удобней разбить отрезок интегрирования на интервалы, где функция сохраняет свой знак, а после этого вычислить получившиеся площади по формулам (1а) и (1б)).

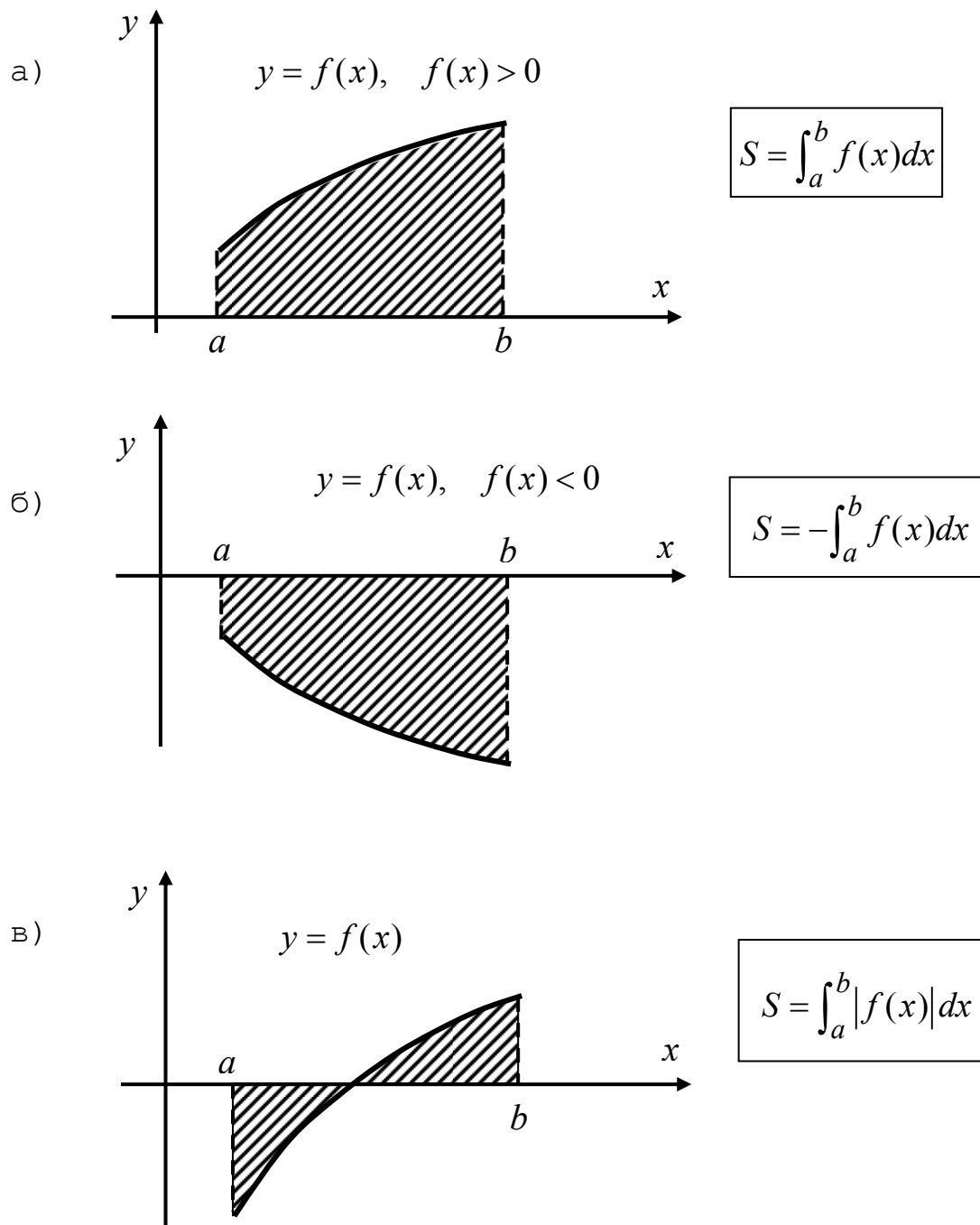


Рис. 8. Вычисление площади криволинейной трапеции в декартовых координатах: а) случай  $f(x) > 0$ ; б) случай  $f(x) < 0$ ; в) общий случай.

Полученные для вычисления площадей криволинейных трапеций формулы могут быть обобщены на случай фигур, которые ограничены сверху и снизу кривыми, задаваемыми на отрезке  $[a, b]$  уравнениями  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ , где  $f(x) \geq g(x)$  (рис. 9). Действительно, площадь такой фигуры можно получить как разность площадей двух криволинейных трапеций рассмотренного ранее вида. Первая из таких трапеций ограничена сверху кривой  $y = f(x)$ , а снизу – осью  $OX$ . Вторая трапеция ограничена кривой  $y = g(x)$  и осью  $OX$ . Справа и слева обе трапеции ограничены прямыми  $x = a$  и  $x = b$ . Тогда по формуле (1а) получаем

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (2a)$$

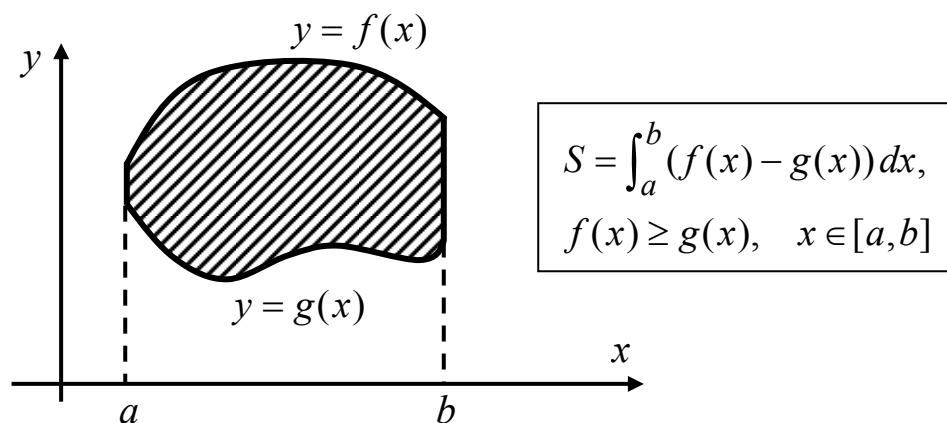


Рис. 9. Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной кривыми  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .

**Замечание.** На рис. 9 изображен случай положительных на  $[a, b]$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , однако формула (2) сохраняет справедливость и для функций произвольного знака, лишь бы неравенство  $f(x) \geq g(x)$  выполнялось для всех  $x \in [a, b]$ . Если же такое неравенство не выполнено, то для нахождения площади фигуры, ограниченной кривыми  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , нужно пользоваться обобщенной формулой:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (2б)$$



**ПРИМЕР 1 (Задача Архимеда).** Найти площадь параболического сегмента, ограниченного параболой  $y = a^2 - x^2$  и осью  $OX$  (рис. 10).

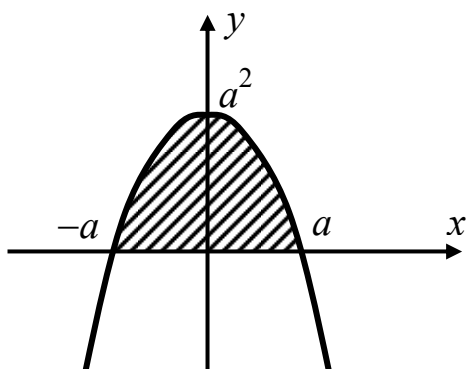


Рис. 10. Параболический сегмент.

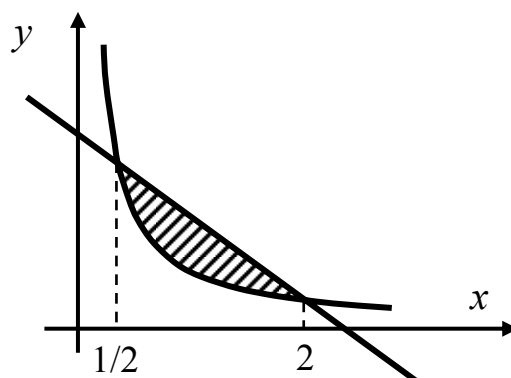


Рис. 11. Гиперболический сегмент.

Абсциссы точек пересечения параболы с осью  $OX$  находятся из уравнения

$$a^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm a.$$

На отрезке  $[-a, a]$  функция  $y = a^2 - x^2$  неотрицательна. Тогда по формуле (1а) получаем искомую площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = a^2 x \Big|_{-a}^a - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-a}^a = \\ &= a^2 (a - (-a)) - \frac{1}{3} (a^3 - (-a)^3) = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом примере боковые границы криволинейной трапеции, определяемые уравнениями  $x = \pm a$ , вырождаются в две точки. ■

**ПРИМЕР 2.** Найти площадь сегмента, который прямая  $y = \frac{5}{2} - x$  отсекает от гиперболы  $y = \frac{1}{x}$  (рис. 11).

Для определения левой и правой границ сегмента (играющих роль пределов интегрирования) имеем уравнение:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2.$$

На интервале  $x \in (0,5; 2)$  прямая расположена выше гиперболы, поэтому по формуле (2а) получаем искомую площадь сегмента:

$$\begin{aligned} S &= \int_{0,5}^2 \left( \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{5}{2} x \Big|_{0,5}^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^2 - \ln|x| \Big|_{0,5}^2 = \\ &= \left( 5 - \frac{5}{4} \right) - \left( 2 - \frac{1}{8} \right) - (\ln 2 - \ln 0,5) = \frac{15}{8} - 2 \ln 2. \blacksquare \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 3.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \cos x$ , осью  $OX$  и прямыми  $x = 0$ ,  $x = 3\pi/2$ .

На этом примере удобно показать характерные ошибки, возникающие при решении подобных задач. Приведем вначале

*Неверное решение.* Воспользуемся формулой (1а) для площади фигуры:

$$S = \int_0^{3\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{3\pi/2} = \sin 3\pi/2 - \sin 0 = -1. \quad (???)$$

Часто после этого, спохватившись, что площадь фигуры не может быть отрицательной, результат "слегка" подправляют, и пишут:  $S = 1$ . Здесь ошибка возникла из-за того, что не было проверено условие  $f(x) > 0$ , при котором справедлива формула (1а). На самом деле, это условие не выполнено!

*Правильное решение.* Изобразим график функции  $y = \cos x$  (рис. 12). Очевидно, что на отрезке  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  имеется область, где этот график выше оси

$OX$  (а именно, на интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ). В то же время, на интервале  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  график функции  $y = \cos x$  расположен ниже оси  $OX$ . Поэтому для вычисления площади искомую фигуру следует разбить на две части:  $S = S_1 + S_2$ . Для первой части, расположенной над интервалом  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , функция  $f(x)$  положительна, и справедлива формула (1а):

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1.$$

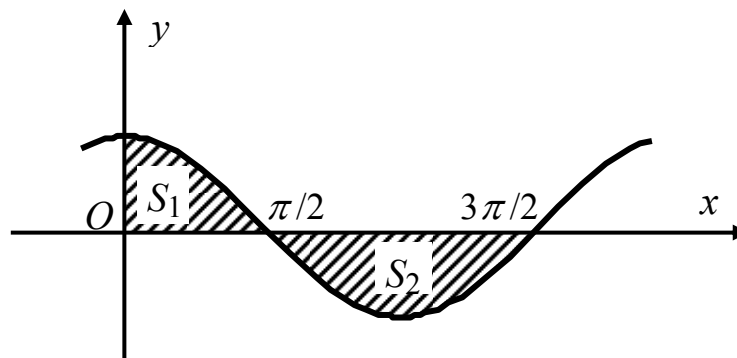


Рис. 12. К примеру 3.

Для второй части фигуры, расположенной над интервалом  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , функция  $f(x)$  отрицательна, и для нахождения ее площади должна быть использована формула (1б):

$$S_2 = - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = -\sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\sin(3\pi/2) + \sin(\pi/2) = 2.$$

Окончательно, получаем площадь искомой фигуры:  $S = S_1 + S_2 = 3$ . ■

Последний пример показывает, какую важную роль в геометрических приложениях определенных интегралов играет предварительный анализ задачи и построение необходимых графиков. Иначе, даже вполне правильные (для определенных условий) формулы могут привести к неверным результатам.

## 1. Вычисление площади в случае параметрического задания кривой.

Кривая, ограничивающая криволинейную трапецию на рис. 8, может быть задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Для нахождения площади фигуры в этом случае проведем замену переменной в интеграле из формулы (1в):

$$S = \int_a^b |y| dx = \int_{t_0}^{t_1} |\psi(t)| |d\varphi(t)|, \quad \text{где } a = \varphi(t_0), b = \varphi(t_1).$$

Или, окончательно,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\psi(t) \cdot \varphi'(t)| dt. \quad (3)$$

**ПРИМЕР 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями  $a$  и  $b$ .

Запишем, вначале, уравнение эллипса в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Использование формул площади фигуры в декартовых координатах в данном случае привело бы к необходимости вычисления достаточно громоздких интегралов. Перепишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

Принимая во внимание осевую симметрию эллипса, ограничимся вычислением четверти площади, расположенной в первом квадранте. Верхняя граница этой области отвечает значениям параметра  $t \in [0, \pi/2]$  (рис. 13).

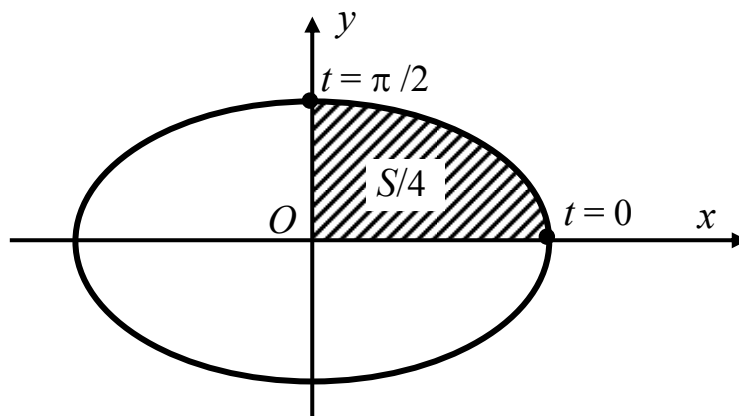


Рис. 13. К вычислению площади эллипса.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_0^{\pi/2} |b \sin t d(a \cos t)| = ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left( t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

В результате можно найти площадь всего эллипса:  $S = \pi ab$ . ■

### 3. Вычисление площадей в полярных координатах.

Многие интересные кривые на плоскости (скажем, различного рода спирали) удобно описывать не декартовыми, а полярными координатами. Уравнение кривой в полярных координатах представляет собой функциональную зависимость между текущим значением полярного угла  $\varphi$  точки на плоскости и ее полярным радиусом  $r$  (рис. 14).

Попробуем найти площадь  $S$  криволинейного треугольника, ограниченного кривой  $r = r(\varphi)$  и двумя лучами:  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$ . Естественно предположить, что для решения такой задачи можно будет воспользоваться изложенным ранее аппаратом определенных интегралов.

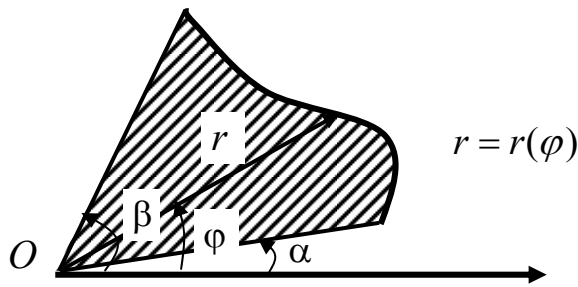


Рис.14 Криволинейный треугольник в полярных координатах.

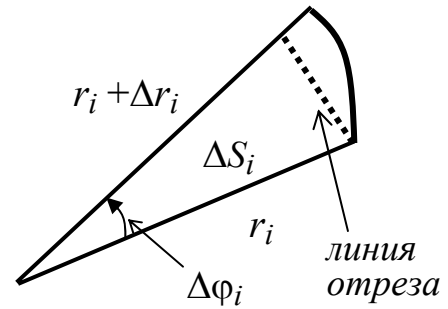


Рис.15. К выводу формулы (5).

Вначале нам придется в общих чертах повторить процедуру построения интегральных сумм, которая лежала в основе понятия определенного интеграла. Роль отрезка  $[a, b]$ , на котором в декартовых координатах была определена функция  $f(x)$ , в полярной системе координат играет интервал изменения углов  $[\alpha, \beta]$ , на котором определена функция  $r(\varphi)$ . Разобьем интервал  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  "маленьких" углов  $\Delta\varphi_i$ , сумма которых дает весь диапазон изменения полярного угла для рассматриваемой фигуры:

$$\sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i = \beta - \alpha.$$

Рассмотрим часть фигуры, расположенную внутри угла  $\Delta\varphi_i$  (рис. 15). В получившемся элементарном "криволинейном" треугольнике с углом  $\Delta\varphi_i$  одна из сторон равна  $r_i$ , а другая  $r_i + \Delta r_i$ . Третья сторона этого треугольника – "кривая", она описывается уравнением  $r = r(\varphi)$ . Превратим этот криволинейный треугольник в настоящий, отрезав "лишнюю" криволинейную часть как это показано на рис. 15. Поскольку угол  $\Delta\varphi_i$  мал (а точнее говоря, будет стремиться к нулю в ходе предельного перехода), то и площадь исходного криволинейного треугольника  $\Delta S_i$  мало отличается от площади равнобедренного треугольника:

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r_i^2 \sin \Delta\varphi_i.$$

В свою очередь, для малых углов справедливо условие  $\sin \Delta\varphi_i \approx \Delta\varphi_i$ , поэтому

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \varphi_i.$$

Площадь интересующей нас фигуры может быть найдена как сумма площадей всех элементарных треугольников:

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta \varphi_i. \quad (4)$$

Выражение (4) представляет собой интегральную сумму функции  $r = r(\varphi)$  на отрезке  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ . Теперь осталось совершить предельный переход: устремить к бесконечности число  $n$ , одновременно устремив к нулю максимальный из углов  $\Delta \varphi_i$ . Для непрерывной функции  $r = r(\varphi)$  в результате такого предельного перехода интегральная сумма (4) даст определенный интеграл:

$$\lim_{\max_i \Delta \varphi_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta \varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Таким образом, приходим к формуле для площади фигуры, ограниченной в полярных координатах кривой  $r = r(\varphi)$  и лучами  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$ :

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi. \quad (5)$$

**Замечание.** Проведенная здесь процедура, имеет чрезвычайно важное значение в различных геометрических и физических приложениях определенного интеграла, и будет дальше применяться в еще более схематичном виде. Суть процедуры состоит в том, что на первом ее этапе "малый" криволинейный объект заменяется на прямолинейный. Понятие "малости" при этом не носит универсального характера – оно относительно. Так, несмотря на криволинейность поверхности Земли, никому не придет в голову учитывать ее при строительстве дома: его характерный размер много меньше земного радиуса. На втором, заключительном этапе процедуры сумма большого числа "малых" слагаемых (интегральная сумма) заменяется определенным интегралом.

**ПРИМЕР 5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 - \cos \varphi)$ , (рис. 16).

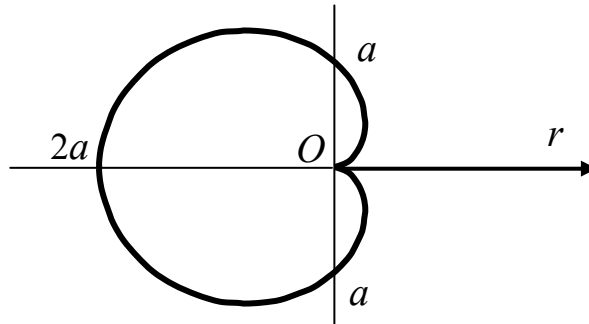


Рис. 16. Кардиоида.

В силу четности функции  $r = a(1 - \cos \varphi)$  фигура обладает симметрией относительно горизонтальной оси. Достаточно найти площадь ее верхней половины, отвечающей диапазону изменения полярного угла  $0 \leq \varphi \leq \pi$ :

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \varphi \Big|_0^{\pi} - 2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) = \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \pi + \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая площадь  $S = \frac{3\pi a^2}{2}$ . (Заметим, что площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, оказалась в 1,5 раза больше площади круга радиуса  $a$ ). ■

#### **4. Длина дуги кривой в декартовых координатах.**

Решим задачу о нахождении длины  $L$  плоской кривой, описываемой уравнением  $y = f(x)$ , между точками с абсциссами  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 17). Бу-



дем считать, что функция  $y = f(x)$  непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ .

Применим уже знакомую нам процедуру разбиения отрезка  $[a, b]$  на мелкие отрезки  $\Delta x_i$ . Обозначим через  $\Delta \ell_i$  длину элементарной дуги кривой  $y = f(x)$ , расположенной над отрезком  $\Delta x_i$ . Теперь, как уже делалось ранее, можно приближенно заменить эту малую дугу кривой отрезком прямой линии. Тогда по теореме Пифагора

$$\Delta \ell_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где  $\Delta y_i$  – приращение функции  $f(x)$  на отрезке  $\Delta x_i$ . Из определения производной  $y' = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$  следует, что для малых  $\Delta x_i$  справедливо приближенное ра-

венство

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx y'(x_i),$$

где точка  $x_i$  – некоторая точка интервала  $\Delta x_i$  (например, его левая граница).

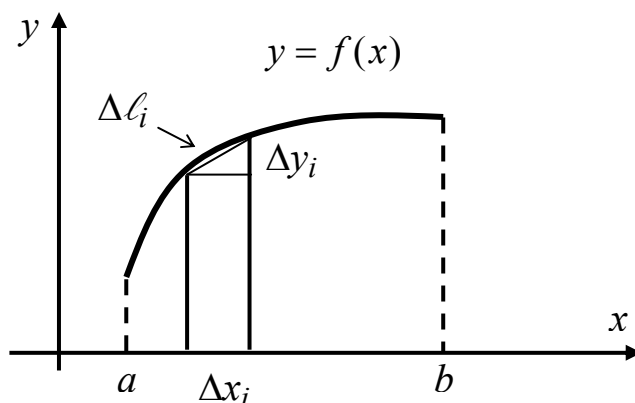


Рис. 17. К выводу формулы длины дуги кривой.

Тогда

$$\Delta \ell_i \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i \approx \sqrt{1 + (y'_i)^2} \cdot \Delta x_i.$$

Длина всей кривой может быть получена суммированием длин всех элементарных дуг  $\Delta \ell_i$ :  $L = \sum_i \Delta \ell_i$ . Осуществляя в полученной интегральной сумме предельный переход  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ , получим окончательную формулу для длины дуги кривой:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (6)$$

**Замечание.** Формула (6) справедлива только для кривых, задаваемых дифференцируемыми функциями. В частности, если у кривой имеются точки с вертикальными касательными (там  $y' = \infty$ ), то для вычисления ее длины можно либо использовать формулу (6), рассматривая соответствующий интеграл как несобственный (о них будет идти речь в главе 5), либо записав уравнение кривой в параметрической форме, для которой требование существования производной  $f'(x)$  не обязательно.

**ПРИМЕР 6.** Найти длину дуги астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  (рис. 18).

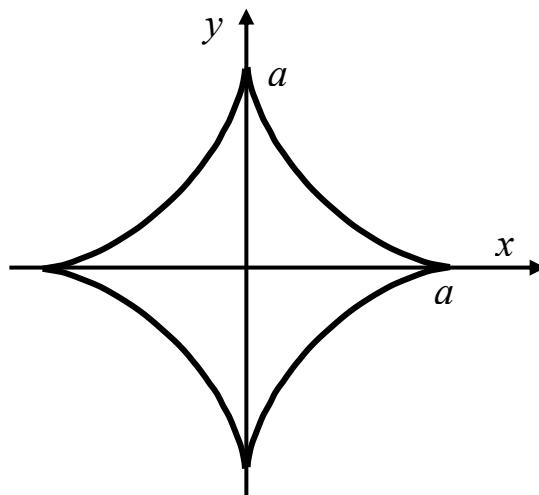


Рис. 18. Астроида.

Продифференцируем уравнение астроида как неявную функцию:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Астроида имеет две оси симметрии. Найдем по формуле (6) длину ее четвертой части, лежащей в первом квадранте:

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{1+\left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = a^{1/3} \int_0^a x^{-1/3} dx = \frac{3}{2}a^{1/3}x^{2/3} \Big|_0^a = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

Тогда длина всей астроида  $L = 6a$ . ■

### 5. Длина дуги кривой в полярных координатах.

Получим теперь формулу для длины дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением  $r = r(\varphi)$  между точками с полярными углами  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$ . Следуя стандартной процедуре, разобьем интервал углов  $[\alpha, \beta]$  на малые углы  $\Delta\varphi_i$  (рис. 19). Каждую элементарную дугу  $\Delta\ell_i$  заменим отрезком прямой, длину которого вычислим по теореме косинусов:

$$\Delta\ell_i^2 \approx r_i^2 + (r_i + \Delta r_i)^2 - 2r_i(r_i + \Delta r_i) \cos \Delta\varphi_i.$$

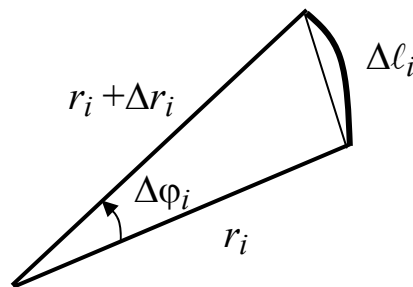


Рис. 19. К выводу формулы (7).

Воспользовавшись известным разложением  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ , справедливым для малых значений аргумента, получим

$$\Delta \ell_i^2 \approx r_i^2 + (r_i + \Delta r_i)^2 - 2r_i(r_i + \Delta r_i) \left( 1 - \frac{(\Delta \varphi_i)^2}{2} \right).$$

Отсюда после упрощения и отбрасывания членов более высокого порядка малости по сравнению с  $(\Delta r_i)^2$  и  $(\Delta \varphi_i)^2$  имеем

$$\Delta \ell_i^2 \approx (\Delta r_i)^2 + r_i^2 (\Delta \varphi_i)^2 \approx (r_i^2 + (r_i')^2) (\Delta \varphi_i)^2.$$

Длина искомой дуги кривой получается при суммировании длин всех элементарных дуг:

$$L = \sum_i \Delta \ell_i \approx \sqrt{r_i^2 + (r_i')^2} \cdot \Delta \varphi_i.$$

После уже описанного предельного перехода в интегральной сумме приходим к окончательной формуле для длины дуги, заданной в полярных координатах:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi. \quad (7)$$

**ПРИМЕР 7.** Найти длину кардиоиды  $r = a(1 - \cos \varphi)$ , (рис. 16).

Имеем

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi = a^2(2 - 2 \cos \varphi) = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Длину верхней половины кардиоиды найдем по формуле (7):

$$\frac{L}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -4a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = -4a(0 - 1) = 4a.$$

Тогда, окончательно, получаем длину целой кардиоиды:  $L = 8a$ . (Достаточно странный на первый взгляд результат: кривая "более сложная", чем окружность, не содержит числа  $\pi$  в выражении для своей длины!). ■

## 6. Длина дуги кривой, заданной параметрически.

Пусть плоская кривая описывается в декартовых координатах параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (8)$$

Найдем длину дуги этой кривой между точками, соответствующими значениям параметра  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , считая функции  $x(t)$  и  $y(t)$  дифференцируемыми на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Воспользуемся уже полученным выражением для длины элементарной дуги в декартовых координатах, лежащей над отрезком  $\Delta x_i$ :

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i.$$

При малых  $\Delta t_i$  справедливы равенства

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \approx x'(t_i), \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \approx y'(t_i).$$

Тогда, суммируя длины всех элементарных дуг, в пределе при  $\max_i \Delta t_i \rightarrow 0$  получим искомую длину всей дуги:

$$L = \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta l_i.$$

Отсюда приходим к выражению для длины дуги кривой, заданной параметрически:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (9)$$

**Замечание.** Формула (9) справедлива и для кривых, имеющих точки, где  $x'(t) = 0$ . В этих точках, как уже было отмечено, производная функции (8)

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$  обращается в бесконечность, касательная к кривой на плоскости  $OXY$

оказывается вертикальной, и формула (6), вообще говоря, оказывается неработоспособной.

**ПРИМЕР 8.** Найти длину эвольвенты (развертки) окружности (рис. 20):

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

(Такую кривую описывает конец нити, разматывающейся с окружности радиуса  $a$ .)

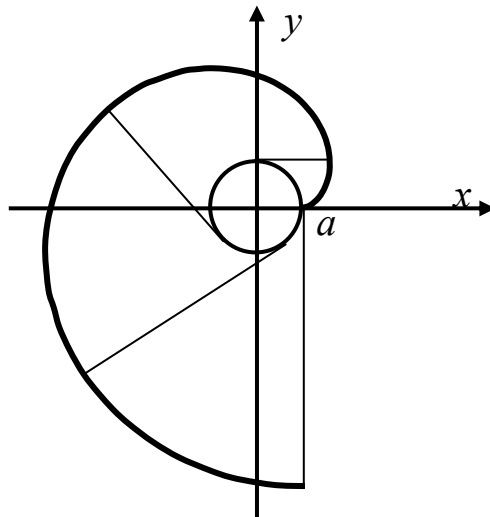


Рис.20. Развертка окружности.

Получим вначале выражения для производных  $x'_t$  и  $y'_t$ :

$$\begin{cases} x'_t = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t, \\ y'_t = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t. \end{cases}$$

Теперь по формуле (9) может быть найдена искомая длина кривой:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2} at^2 \Big|_0^{2\pi} = 2a\pi^2. \blacksquare \end{aligned}$$

## 7. Объем тел вращения.

Здесь мы познакомимся с еще одним геометрическим приложением определенных интегралов, связанным с вычислением объемов тел вращения. В этом пункте будут рассмотрены два основных типа таких задач, различающихся выбором оси вращения – горизонтальной или вертикальной.

**Вращение вокруг оси  $OX$ .** В задаче этого типа криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции  $y = f(x)$ , осью  $OX$  и прямыми  $y = a$  и  $y = b$ , вращается вокруг оси  $OX$  (т.е. вокруг стороны трапеции, перпендикулярной ее основаниям). Исходная трапеция при этом представляет собой половину сечения тела вращения плоскостью  $OXY$  (рис.21).

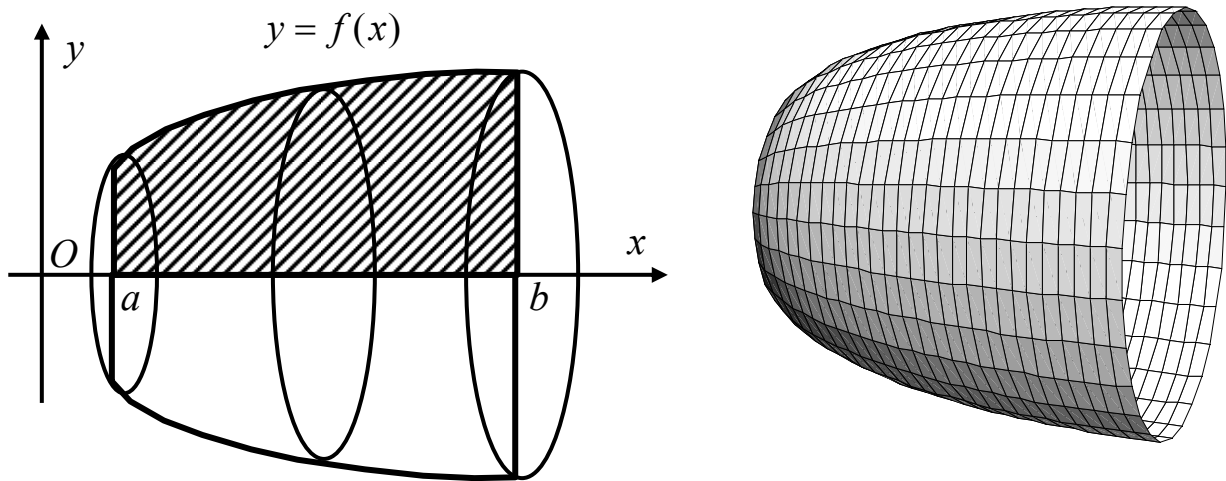


Рис.21. Тело вращения вокруг оси  $OX$ .

Выведем формулу объема получающегося тела вращения, проведя стандартную процедуру его разбиения на малые элементы. Рассмотрим элементарную трапецию, расположенную над отрезком  $\Delta x_i$  оси  $OX$ . При вращении этой фигуры вокруг оси  $OX$  возникает тело (слой) толщины  $\Delta x_i$ . Как и ранее, проведем спрямление полученного тела, отрезав его криволинейный край. Это соответствует тому, что вместо элементарной криволинейной трапеции, вращению подвергается прямоугольник с основанием  $\Delta x_i$  и высотой  $y_i$  (рис. 22).

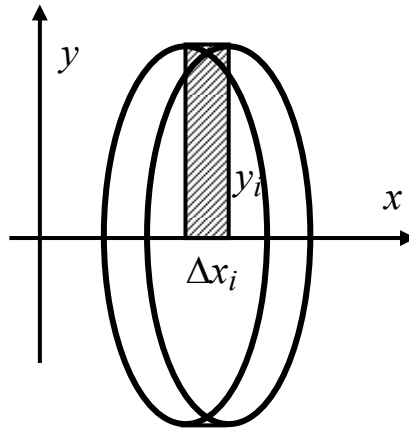


Рис. 22. К выводу формулы (10).

В результате получается цилиндр с высотой  $\Delta x_i$  и радиусом основания  $y_i$ . При малой величине  $\Delta x_i$  объем элементарного слоя приблизительно равен объему этого цилиндра:

$$\Delta V_i \approx \pi y_i^2 \Delta x_i.$$

Объем всего тела вращения получается при сложении объемов всех элементарных слоев:

$$V_x = \sum_i \Delta V_i \approx \sum_i \pi y_i^2 \Delta x_i.$$

Осуществляя в полученной интегральной сумме предельный переход (при  $\Delta x_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ), найдем объем тела вращения вокруг оси  $OX$ .

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad \text{где } y = f(x). \quad (10)$$

**ПРИМЕР 9.** Найти объем шара радиуса  $R$ .

Будем считать, что шар образован вращением полукруга радиуса  $R$  с центром в начале координат вокруг оси  $OX$  (рис. 23).

Запишем уравнение верхней границы полукруга:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$



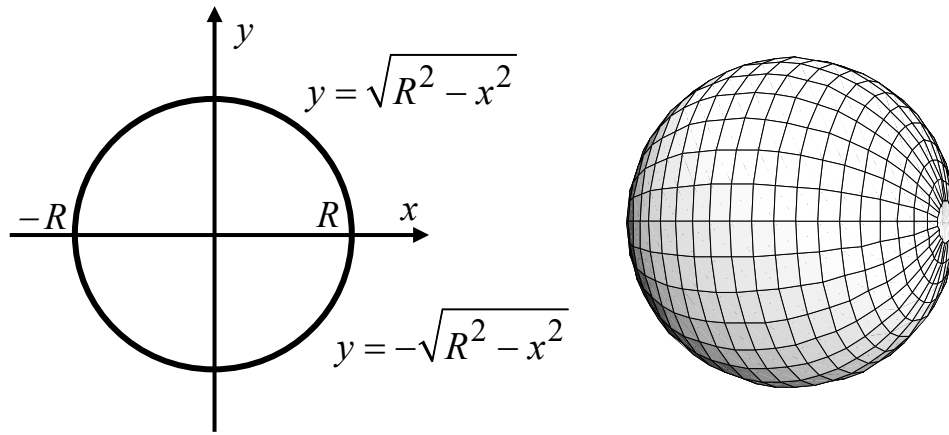


Рис.23. К выводу формулы объема шара.

Тогда формула (10) приводит к хорошо известному выражению для объема шара:

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_{-R}^R y^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{1}{3} \pi x^3 \Big|_{-R}^R = \\
 &= \pi R^2 (R + R) - \frac{1}{3} \pi (R^3 + R^3) = 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3. \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Вращение вокруг оси  $OY$ .** В задаче этого типа рассмотренная ранее криволинейная трапеция вращается вокруг оси  $OY$ , т.е. вокруг прямой, параллельной основаниям трапеции). Тело вращения имеет кольцевидную форму, а исходная трапеция, по-прежнему, представляет собой половину сечения тела плоскостью  $OXY$  (рис.24).

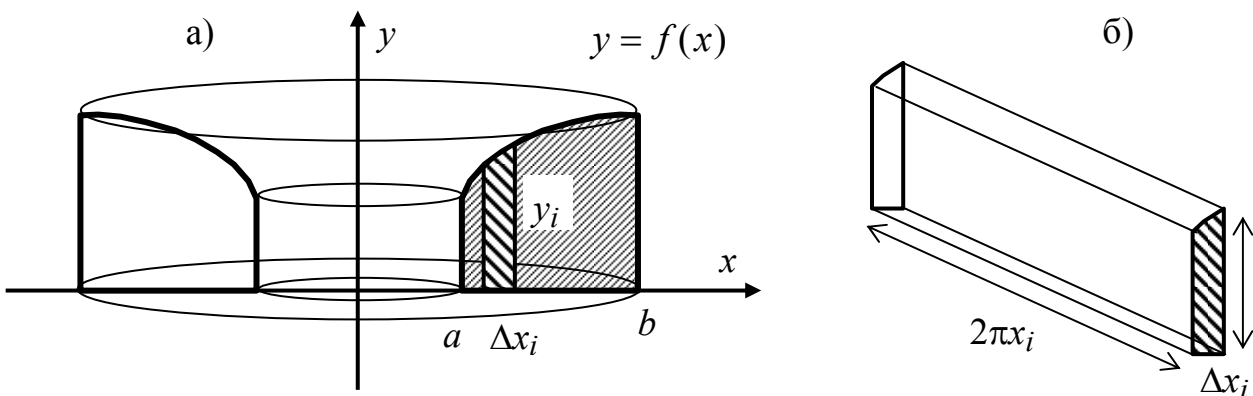


Рис.24. Тело вращения вокруг оси  $OY$ .

Выделим элементарную трапецию, расположенную над отрезком  $\Delta x_i$  оси  $OX$ . При ее вращении вокруг оси  $OY$  возникает кольцо радиуса  $x_i$  с криволинейным верхним краем. Разрежем его по плоскости  $OXY$  и выпрямим. Пренебрегая возникающими незначительными деформациями, получим в результате пластину (рис. 24 б). Заменяем эту пластину прямоугольным параллелепипедом (для этого у нее просто отреем верхний криволинейный край), длина которого равна  $2\pi x_i$  (длина окружности радиуса  $x_i$ ), ширина  $\Delta x_i$  и высота  $y_i = f(x_i)$ . При малой величине  $\Delta x_i$  объем исходного элементарного кольца приблизительно равен объему полученного параллелепипеда:

$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i y_i \Delta x_i.$$

Объем тела вращения равен сумме объемов всех элементарных колец:

$$V_y = \sum_i \Delta V_i \approx 2\pi \sum_i x_i y_i \Delta x_i.$$

После уже не раз проводившегося предельного перехода ( $\Delta x_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ) интегральная сумма превратится в определенный интеграл. В результате получим объем тела вращения вокруг оси  $OY$ :

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y dx, \quad \text{где } y = f(x). \quad (11)$$

**ПРИМЕР 10.** Найти объем тора, образованного вращением круга радиуса  $R$  с центром, который удален от оси вращения на расстояние  $r$ , где  $r > R$  (рис.25).

Примем ось  $OY$  в качестве оси вращения окружности с центром, расположенном в точке  $(r, 0)$  на оси  $OX$ , и радиусом  $R$ . Уравнение такой окружности имеет вид

$$(x - r)^2 + y^2 = R^2.$$

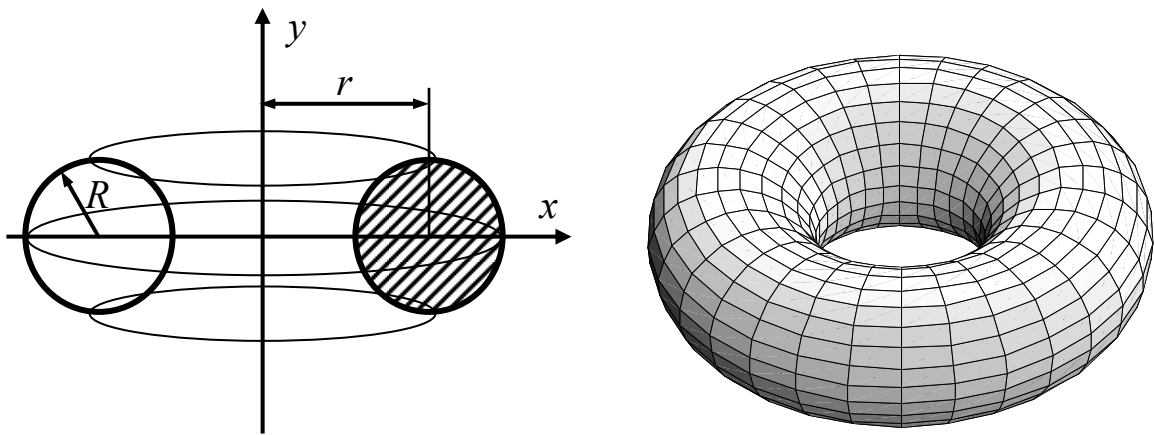


Рис.25. Тор как тело вращения.

В силу симметрии достаточно рассмотреть вращение только верхней половины круга, граница которого состоит из полуокружности

$$y = \sqrt{R^2 - (x - r)^2}.$$

и отрезка  $[r - R, r + R]$  оси  $OX$ . Объем полученного тела вращения даст половину объема тора.

По формуле (11) получаем

$$\frac{1}{2}V_y = 2\pi \int_{r-R}^{r+R} x y dx = 2\pi \int_{r-R}^{r+R} x \sqrt{R^2 - (x - r)^2} dx.$$

Для вычисления интеграла выполним в нем замену переменной:

$$\int_{r-R}^{r+R} x \sqrt{R^2 - (x - r)^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = r + R \sin t, \\ dx = R \cos t dt, \\ x = r - R \Rightarrow t = -\pi/2, \\ x = r + R \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right| =$$

$$= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r + R \sin t) \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r + R \sin t) \cos^2 t \, dt = \\
&= R^2 r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt + R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t \, dt = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Найдем первый из полученных интегралов, учитывая четность подынтегральной функции:

$$\begin{aligned}
I_1 &= R^2 r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 2R^2 r \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = R^2 r \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \, dt = \\
&= R^2 r \left( t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2} \pi R^2 r.
\end{aligned}$$

Второй из интегралов  $I_2$  обращается в нуль в силу нечетности подынтегральной функции на отрезке интегрирования  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Теперь получаем окончательное выражение для объема тора:

$$V_y = 4\pi(I_1 + I_2) = 2\pi^2 R^2 r. \quad \blacksquare$$

## Теоретические вопросы к главе 2.

1. Как связаны понятия неопределенного и определенного интеграла?
2. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
3. Проверить выполнение теоремы о среднем для функции  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[1, 2]$ .
4. Доказать неравенство  $\int_0^{\pi/2} \sin(x^2) dx \leq 1$ .
5. Найти любую функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую условиям  $\int_{-3}^{-2} f(x) dx = 5$ ,  
 $f(-3) = -1$ .
6. Существует ли непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:  
 $\int_0^1 f(x) dx = 1, f(0) = 100, f(1) = 100$ ?
7. Найти любую функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую условиям  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ ,  
 $f'(0) = 1$ .
8. Построить график функции  $y(x) = \int_{-2}^x |t| dt$ .
9. Справедливо ли тождество  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ ?
10. Существуют ли функции  $f(x)$  и  $g(x)$  для которых выполнено равенство  
 $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx$ ?
11. Найти интеграл  $\int_{-2}^2 \sqrt[3]{\sin(x^3)} dx$ .

12. Можно ли найти по формуле  $S = \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$  площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = x^3 - x$  и осью  $OX$ ?
13. Вывести формулу объема тела вращения вокруг прямой  $x = a$ .
14. Вывести формулу объема тела вращения вокруг прямой  $y = b$ .
15. Вывести формулу для объема тела, образованного при вращении вокруг полярной оси фигуры, границы которой задаются в полярных координатах уравнениями  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$ :

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \varphi d\varphi.$$

## Задачи к главе 2.

Найти интегралы:

1.  $\int_0^3 (x^2 + 3x - 4) dx.$

2.  $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x} - x\sqrt[5]{x} - 4) dx.$

3.  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

4.  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}}.$

5.  $\int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi.$

6.  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}.$

Найти интегралы, выполнив замену переменных:

7.  $\int_0^9 \frac{dx}{5 + \sqrt{x}}, \quad x = t^2.$

8.  $\int_1^{28} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{8 - 2\sqrt[3]{x-1}} dx, \quad x-1 = t^3.$

9.  $\int_0^{\ln 3} \sqrt[3]{e^{2x} - 1} dx, \quad e^{2x} - 1 = z^3.$

10.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 2 \sin x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$

$$11. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x - 1}} .$$

$$12. \int_0^8 \sqrt{8x - x^2} dx .$$

Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

$$13. \int_1^{e^2} (x+2) \ln x dx .$$

$$14. \int_0^{\pi/6} x \sin x dx .$$

$$15. \int_0^{\pi} e^x \cos x dx .$$

$$16. \int_1^2 \sqrt{x^2 + 5} dx .$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

$$17. y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8.$$

$$18. y = x^2/4, \quad y = 3 - \frac{x^2}{2}.$$

$$19. y = \sqrt{x}, \quad y = 6 - x, \quad y = 0.$$

$$20. y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x, \quad y = 0.$$

$$21. 4y = 8x - x^2, \quad 4y = x + 6.$$

$$22. y = \operatorname{ctg} x, \quad x = \pi/6, \quad x = \pi/3, \quad y = 0.$$

Найти площади фигур в полярных координатах:

$$23. r = 2(3 - \cos \varphi).$$

$$24. r = 8 \sin 3\varphi.$$

$$25. r = \frac{2}{\sin^2 \varphi}.$$

$$26. r = \frac{6}{2 - \cos \varphi}.$$

Найти длины дуг кривых:

$$27. y = (x+1)^{3/2}, \quad -1 \leq x \leq 3.$$

$$28. y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq 0,5.$$

$$29. y = \ln(3 \cos x), \quad x \in [0, \pi/3].$$

$$30. \begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$31. r = 5(3 - \cos \varphi).$$

$$32. r = e^{2\varphi}, \quad A(0,1), B(2\pi, e^{4\pi}).$$

Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных линиями

$$33. y = 6x - x^2, \quad y = 0.$$

а) вокруг оси  $OX$ ;                      б) вокруг оси  $OY$ .

$$34. y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi.$$

а) вокруг оси  $OX$ ;                      б) вокруг оси  $OY$ .

$$35. y = x^2 - 4x, \quad y = 2x - 5.$$

а) вокруг оси  $OX$ ;                      б) вокруг оси  $OY$ .

$$36. y = \operatorname{tg} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/3, \quad (\text{вокруг оси } OX).$$

$$37. y^2 = x - 3, \quad x = 3, \quad (\text{вокруг прямой } x = 3).$$

$$38. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad \text{а) вокруг оси } OX; \quad \text{б) вокруг оси } OY.$$

$$39. \begin{cases} x = 6 \cos^4 t, \\ y = 8 \sin^4 t, \end{cases} \quad (\text{вокруг оси } OX).$$

$$40. r = 2(1 + \cos \varphi), \quad (\text{вокруг полярной оси}).$$

$$41. r = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad (\text{вокруг полярной оси}).$$