Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Г.Г. Литова, Д.Ю. Ханукаева

Основы векторной алгебры

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов

Москва 2009

УДК 512.6
Л33

Литова Г.Г., Ханукаева Д.Ю.
Л33 Основы векторной алгебры. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2009. – 90с.

Пособие предназначено для студентов, изучающих векторную алгебру в курсе высшей математики. В нем изложены основные понятия векторной алгебры, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения. Наряду с формальными примерами, предназначенными для освоения техники и стандартных приемов векторной алегбры, разобраны также некоторые прикладные задачи геометрии и механики. Пособие имеет своей целью дать дополнительные разъяснения и помочь студентам разобраться в этом важном разделе математики.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих курс высшей математики. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:

Профессор кафедры высшей математики МФТИ М.А. Галахов

Доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина
А.К. Тюлина

Учебное издание

Редактор: В.В. Калинин
Компьютерная верстка: Д.Ю. Ханукаева

Оглавление

Предисловие

Уважаемый читатель! Современное состояние науки и техники постоянно требует инновационных решений, т.е. постановки новых инженерных, технологических или научных задач и поиск путей их наиболее рационального решения. Поэтому важна способность каждого специалиста к самообразованию, к освоению нового, не заложенного в рамки стандартных учебных программ. Это умение – одно из наиболее ценных качеств современного специалиста наряду с его профессиональной подготовкой.

Поэтому Вы обязательно должны научиться работать самостоятельно, если хотите стать широко образованным, думающим специалистом, умеющим работать с литературой, способным увидеть инженерную задачу, грамотно ее поставить и найти способ решения (мы надеемся, что Вы разделяете с нами эту точку зрения! ☺)

Высшая математика в этом контексте важна не только как аппарат для решения задач в самых разных областях естествознания, но также и как общепризнанный инструмент развития логического мышления, позволяющий выработать навыки поиска решения не только чисто научных, но и практических задач. Она развивает способность видеть проблему и внутри, и извне, анализировать ее в разных аспектах и находить наиболее оптимальные пути решения.

К сожалению, в течение последних лет количество часов, отводимых на изучение высшей математики, сокращается, и студентам все большую долю работы по освоению учебного материала приходится выполнять самостоятельно. Но уровень подготовки многих студентов не позволяет им успешно делать это. В помощь к процессу самостоятельного освоения отдельных разделов курса высшей математики и создается эта серия учебно-методических пособий.

Данное пособие посвящено основным понятиям и задачам векторной алгебры. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, затем разбирается довольно большое количество примеров, после которых предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведены ответы к этим задачам. Кроме того, авторы сочли разумным привести примерные варианты рейтинговых работ по материалу, изложенному в пособии. Следует отметить, что пособие носит обобщающий, справочный характер, поэтому не всякое приводимое утверждение или формула следуют из сказанного ранее. Однако логика изложения материала имеет своей целью помочь читателю составить стройную картину понятий, моделей и связей, вводимых в одном из основополагающих разделов математики, каким является векторная алгебра.

Принимая во внимание слабую подготовку значительной части студентов-первокурсников, авторы данного пособия излагают решение многих примеров очень подробно. Такой способ изложения выбран с целью помочь студентам разобраться в материале, который был недостаточно усвоен на лекциях или практических занятиях.

Данное пособие может использоваться как в течение семестра, так и при подготовке к экзамену. Если Вы проявите добросовестность и терпение при его изучении, то будете вправе надеяться на успешную сдачу экзамена по этой теме.

Предлагаемое пособие может быть полезно не только студентам, начинающим знакомство с векторной алгеброй, но также и магистрантам, аспирантам и инженерам, желающим восстановить свои знания в этой области.

Разумеется, изложенный в пособии материал не исчерпывает всего разнообразия понятий и задач векторной алгебры. Представлены только самые основные и наиболее распространенные из них. Векторная алгебра глубоко изложена в учебнике [1], а большое количество примеров для решения имеется в [2].

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Т.1. – М.: Айрис-пресс, 2004. 253с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. 240с.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:
http://kvm.gubkin.ru/index.html

ГЛАВА 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ И СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Здесь приводятся некоторые определения, свойства и формулы из теории матриц и определителей, которые используются в векторной алгебре.

Определение. Квадратная таблица чисел вида

главная диагональ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

побочная диагональ

состоящая из n строк и n столбцов, называется ***квадратной матрицей порядка n***, где a_{ij} – элементы матрицы, i – номер строки, j – номер столбца, элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы, элементы a_{1n}, $a_{2\ n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную диагональ.

Число a можно рассматривать как квадратную матрицу порядка 1: (a).

В векторной алгебре преимущественно используются матрицы второго и третьего порядка: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Для квадратных матриц определено понятие детерминанта (определителя) матрицы.

Определение. ***Детерминант матрицы*** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ или ***определитель второго порядка*** есть число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$$\boxed{\det A \equiv \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd.} \tag{1}$$

Определение. ***Детерминант матрицы*** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ или ***определитель третьего порядка*** есть число, которое можно найти по следующему правилу:

$$\boxed{\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},} \tag{2}$$

где детерминанты второго порядка вычисляются по формуле (1).

Приведенное в формуле (2) правило вычисления детерминанта называется разложением по первой строке. При этом каждый элемент выбранной строки умножается на детерминант меньшего порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, содержащих данный элемент. Т.е. при вычислении детерминанта третьего порядка использовалось понятие детерминанта второго порядка. Эта идея используется в определении детерминанта произвольного порядка.

Рассмотрим матрицу A порядка n.

Определение. ***Минор элемента*** a_{ij} представляет собой определитель порядка $(n-1)$, получаемый из определителя матрицы A вычеркиванием i–й строки и j–го столбца. Обозначается M_{ij}.

Определение. ***Алгебраическое дополнение элемента*** a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Определение. ***Детерминант матрицы порядка n*** или ***определитель порядка n*** есть число, обозначаемое символом

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и равное сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \text{ или } \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Особо отметим знаки множителя $(-1)^{i+j}$ по элементам a_{ij}:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & \cdot & \cdots \\ + & - & \cdot & \cdot & \cdots \\ - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. Результат вычисления определителя матрицы не зависит от того, по какой строке или по какому столбцу его раскрывать.

Замечание 2. ***Детерминант матрицы*** $A = (a)$ или ***определитель первого порядка*** есть само число a. Обозначается $\det(a) = a$.

(Легко убедиться в том, что формула (1) для вычисления детерминанта второго порядка совпадает с общим определением детерминанта порядка n. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда по общему определению детерминант матрицы A

вычисляется как сумма, состоящая из двух слагаемых. Например, так: $\det A = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12}$. В свою очередь алгебраические дополнения по определению равны $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$ и $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12}$. Миноры элементов первой строки по определению равны определителям матриц, каждая из которых состоит из одного числа, соответственно $M_{11} = d, \quad M_{12} = c$. Окончательно получаем $\det A = a \cdot M_{11} - b \cdot M_{12} = ad - bc$. Можно было раскрывать этот определитель по второй строке или по столбцам:

$$
\begin{aligned}
\det A = c \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} + d \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \\
= a \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + c \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = \\
= b \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + d \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = ad - bc.)
\end{aligned}
$$

Для определителя третьего порядка получим

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.
$$

Подставляя сюда соответствующие алгебраические дополнения

$$
A_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
A_{13} = (-1)^4 M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},
$$

придем к выражению, которое получается по формуле (2). Если раскрыть выписанные определители второго порядка по формуле (1) и перегруппировать слагаемые, получим

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}). \qquad (3)
$$

Формула (3) представляет собой способ вычисления определителей третьего порядка, называемый *правилом треугольников*. Его можно запомнить с помощью схем:

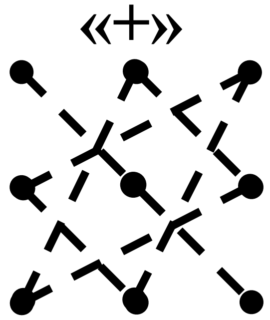


Схема 1.

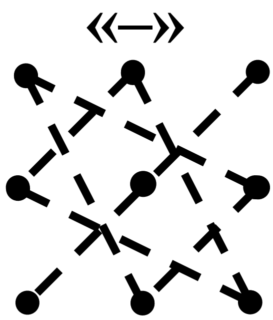


Схема 2.

Произведения троек чисел в схеме 1 берутся с получающимися при перемножении знаками, в схеме 2 – с противоположными.

Вообще полезно помнить, что

определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

В дальнейшем для обозначения определителя любого порядка будем пользоваться также символом Δ.

Свойства определителей

① При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

② Общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

③ Если каждый элемент i–й строки (столбца) представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, в первом из которых на месте i–й строки (столбца) стоят первые из упомянутых слагаемых, а во втором – вторые; остальные элементы определителей-слагаемых одинаковы. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

④ Величина определителя не изменится, если его транспонировать вокруг главной диагонали, т.е. заменить строки соответствующими столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

⑤ Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что данное преобразование строк (столбцов) называется элементарным преобразованием.

⑥ Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

⑦ Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

⑧ Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР 1.1.1. Используя формулы (1) или (3), вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. а) По формуле (1) имеем: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot 0 - 2\cdot(-3) = 6$.

б) По правилу треугольников (3) получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 7\cdot 2\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot 8 - (3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 6\cdot 8 + 9\cdot 2\cdot 4) = 0.$$

в) Применяем формулу (1): $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

г) По формуле (3):

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot 0 + a\cdot a\cdot a + a\cdot a\cdot a - a\cdot 0\cdot a - 0\cdot a\cdot a - 0\cdot a\cdot a = 2a^3.$$

■

ПРИМЕР 1.1.2. Используя подходящие свойства определителей, найти их значения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 1-a & 0 & -1 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a \\ 1-2b & 1 & -b \\ a+4 & a & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Определитель равен нулю, т.к. его строки (и столбцы) пропорциональны: $\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2}$.

б) Определитель равен нулю, т.к. его первая и третья строки пропорциональны.

в) Определитель равен нулю, т.к. его второй столбец содержит только нули.

г) Используя свойство ③, представляем данный определитель в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a \\ 1-2b & 1 & -b \\ a+4 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -b \\ a & a & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ -2b & 1 & -b \\ 4 & a & 2 \end{vmatrix}.$$

Оба полученных определителя равны нулю: первый содержит два одинаковых столбца, а во втором первый и третий столбцы пропорциональны. ■

ПРИМЕР 1.1.3. Решить уравнения и неравенства:

а) $\begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ x^3+8 & -4 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} \le 0$; в) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} > 0$.

Решение. а) Т.к. $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$, то в первом столбце имеется общий множитель $x+2$, который, согласно свойству ② определителей, можно вынести за знак определителя:

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x^2-2x+4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда } x+2=0 \text{ или } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x^2-2x+4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая два последние уравнения, получим: $x_1 = -2$ и

$$-4+x^2-2x+4=0; \quad x^2-2x=0; \quad x_2=0, \quad x_3=2.$$

б) Раскрывая определитель, имеем: $x(x+1)-2x \le 0$; $x^2-x \le 0$, т.е. $x(x-1) \le 0$. Далее применим метод интервалов (рис.1):

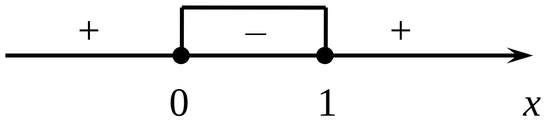


Рис. 1

В результате имеем, что неравенство выполняется при $0 \le x \le 1$.

в) Раскрывая определитель по первой строке, получим:

$$x\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + x^3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = x\cdot 0 - x^2\cdot 6 + x^3\cdot 4.$$

Неравенство $4x^3-6x^2>0$ запишем в виде $2x^2(2x-3)>0$ и решим методом интервалов:

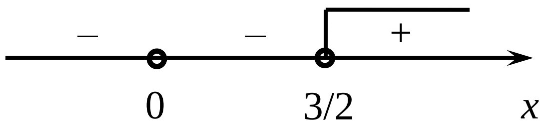


Рис. 2

Ответ: $x > 3/2$.■

ПРИМЕР 1.1.4. Найти указанные миноры и алгебраические дополнения для определителей:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; M_{12}, A_{12}; M_{22}, A_{22};

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; M_{13}, A_{13}; M_{32}, A_{32}.

Решение. а) Чтобы получить минор M_{12}, в определителе Δ вычеркиваем первую строку и второй столбец: $M_{12}=3$, тогда $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3$. Аналогично, $M_{22}=1$, тогда $A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=1$.

б) Минор M_{13} получается из определителя Δ вычеркиваем первой строки и третьего столбца: $M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=0-2=-2$, следовательно, $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=1\cdot(-2)=-2$. Таким же образом $M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ и $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-1\cdot 0=0$. ■

ПРИМЕР 1.1.5. Разложением по первой строке и по третьему столбцу вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Дан определитель третьего порядка. По формуле (2) его разложение по первой строке выглядит так:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$
$$=1\cdot(-1)^{1+1}M_{11}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}M_{12}+2\cdot(-1)^{1+3}M_{13}.$$

Тогда

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=1\cdot(0+1)+1\cdot(0+3)+2\cdot(0+6)=16.$$

Вычислим тот же определитель разложением по третьему столбцу:

$$\Delta=2A_{13}+(-1)A_{23}+0\cdot A_{33}=$$
$$=2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+0=2\cdot 6+1+3=16.$$

Очевидно, что результат не зависит от способа вычисления детерминанта. ■

ПРИМЕР 1.1.6. Вычислить определитель Δ разложением по какой-либо строке или столбцу. Предварительно, пользуясь свойством ⑤, проделать над этой строкой (или столбцом) такие элементарные преобразования, чтобы все элементы, кроме одного, обратились в нули.

а) $\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&-2&-1\\3&1&0\end{vmatrix}$; б) $\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}$; в) $\Delta=\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}$.

Решение. а) Вторая строка уже содержит один нулевой элемент. Чтобы обратить еще один (в данном случае a_{22}) элемент этой строки в нулевой, умножим третий столбец на –2 и прибавим его ко второму. После этого вычислим определитель, разложив его по второй строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&-2&-1\\3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&2\\0&0&-1\\3&1&0\end{vmatrix}=$$

$$=0\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}-1\cdot A_{23}=-(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&-5\\3&1\end{vmatrix}=16.$$

б) Заметим, что $a_{14}=0$, обратим еще два элемента четвертого столбца в нули: вторую строку прибавляем к четвертой; ее же умножаем на 3 и прибавляем к третьей строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&2&8&0\\3&2&8&0\end{vmatrix}=0,$$

т.к. определитель содержит две одинаковые строки.

в) Выносим общий множитель первого столбца за знак определителя и делаем преобразования для получения еще двух нулей в третьей строке. Для этого умножаем третий столбец на –3 и прибавляем к первому, умножаем третий столбец на –2 и прибавляем ко второму.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&3&-3&4\\1&1&-1&2\\3&2&1&0\\1&3&0&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10&9&-3&4\\4&3&-1&2\\0&0&1&0\\1&3&0&-5\end{vmatrix}.$$

Разложение определителя по третьей строке содержит всего одно слагаемое:

$$\Delta = 2\cdot 1\cdot A_{33} = 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 10 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель будем раскрывать по второму столбцу. Предварительно обратим в нули элементы a_{12} и a_{22}; для этого домножим третью строку на –3 и прибавим к первой, затем домножим третью строку на –1 и прибавим ко второй. В результате будем иметь:

$$6\begin{vmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 7 & 0 & 19 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 6\cdot 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 19 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -6\cdot(49-57) = 48.\ \blacksquare$$

Замечание 3. Рассмотренные выше примеры являются иллюстрацией различных способов вычисления определителей. Каждый из них можно было вычислить и другими способами.

Приведем еще правило, позволяющее решать системы из n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (***правило Крамера***):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных называется матрицей системы. Обозначим ее буквой A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы (4) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\Delta = \det A$, Δ_i – определитель матрицы, полученной из A путем замены в ней i-го столбца на столбец правых частей системы (4).

Замечание 4. В случае $\Delta \neq 0$ правило Крамера дает единственное решение системы уравнений. Если же $\Delta = 0$, правило Крамера не применимо. В этом случае система (4) может либо не иметь решений вовсе, либо иметь бесконечное множество решений. Для нахождения этих решений следует применять иные способы, в данном пособии не рассматриваемые.

ПРИМЕР 1.1.7. При помощи правила Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы системы Δ разложением по первой строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 - 3) + 1 \cdot (-3 - 3) + 1 \cdot (3 + 2) = -3.$$

$\Delta \neq 0$, значит, правило Крамера применимо.

Вычислим определители Δ_i. Определитель Δ_1 – разложением по первому столбцу:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&-1&1\\5&-2&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}-2&3\\1&-1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}+0=$$
$$=3\cdot(2-3)-5\cdot(1-1)=-3;$$

Δ_2 – разложением по второму столбцу:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&5&3\\1&0&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}3&3\\1&-1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}+0=$$
$$=-3\cdot(-3-3)+5\cdot(-2-1)=3;$$

Δ_3 – разложением по третьему столбцу:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&-2&5\\1&1&0\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}+0=$$
$$=3\cdot(3+2)-5\cdot(2+1)=0.$$

Теперь можно найти все три неизвестные:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-3}{-3}=1;\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{3}{-3}=-1;\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{0}{-3}=0.$$

В заключение сделаем проверку: подставим найденные значения $x_1,\ x_2,\ x_3$ в уравнения системы.

$$\begin{cases}2\cdot1-(-1)+0=3,\\3\cdot1-2\cdot(-1)+0=5,\\1+(-1)-0=0.\end{cases}$$

Все три уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно. ■

Задачи для самостоятельного решения

№1. Вычислить определители, пользуясь формулами (1) или (2):

а) $\begin{vmatrix}-1&3\\-5&4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\beta&\cos\beta\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&3\\5&0&-1\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}a&1&0\\-1/a&a&3a^2\\1&-1/a^2&a\end{vmatrix}$.

№2. Используя свойства определителей, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1-\sin\alpha & 1 \\ 1+\sin\alpha & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2 \end{vmatrix}$.

№3. Найти указанные M_{ij} и A_{ij} для определителей:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; M_{31}, A_{31}; M_{12}, A_{12};

б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; M_{11}, A_{11}; M_{21}, A_{21}; M_{12}, A_{12}; M_{22}, A_{22}.

№4. Решить уравнения или неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \geq 0$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 4x & 0 & 1 \\ 6 & 2x & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} > 0$.

№5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ четырьмя способами:

а) по правилу треугольников;

б) разложением по первой строке;

в) разложением по второму столбцу;

г) разложением по третьей строке, предварительно обратив в нули два ее элемента.

№6. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \operatorname{ctg}\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \operatorname{ctg}\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

№7. Не раскрывая определители, доказать справедливость равенств:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_1 - \beta a_2 & \alpha b_1 - \beta b_2 & \alpha c_1 - \beta c_2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

№8. Применяя правило Крамера, решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x - y + 4z = 0, \\ 3x - 4y + z = 7, \\ 4x + y - z = 7. \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§2.1. Основные понятия, определения

Во многих разделах математики, механики, физики, технических наук различают величины скалярные и векторные.

Величина, для определения которой достаточно задать только ее численное значение, называется ***скалярной***. Примерами скалярных величин служат длина, площадь, масса, температура, сопротивление и др. Объекты, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением в пространстве, называются ***векторными***. Векторами являются, к примеру, скорость, сила, напряженность электрического или магнитного поля и др. Векторную величину можно изобразить направленным отрезком.

Определение. ***Вектором*** называется отрезок, концы которого упорядочены. Первый из его концов называется началом, второй – концом вектора.

Обозначается $\vec{a}$, $\overrightarrow{MN}$, где M – начало вектора, N – его конец (рис.3).

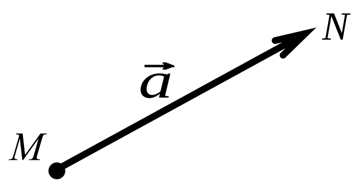


Рис. 3.

Если вектор обозначен одной буквой, то в печати обычно стрелка над ней не ставится, а сама буква выделяется жирным шрифтом: $\vec{a} = \boldsymbol{a}$.

Введем ряд понятий.

1) Вектор $\overrightarrow{NM}$ называется ***противоположным*** вектору $\overrightarrow{MN}$.

2) ***Нулевой вектор*** – вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначается $\vec{0}$ или $\mathbf{0}$. Нулевой вектор не имеет направления.

3) ***Модуль*** **(*длина*)** ***вектора*** – это расстояние между его началом и концом. Обозначается $|\boldsymbol{a}|$, $|\overrightarrow{MN}|$ Модуль нулевого вектора равен нулю $|\mathbf{0}|=0$.

4) ***Единичный вектор*** – вектор, длина которого равна единице.

Определение. ***Коллинеарные векторы*** – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых (рис.4). Обозначаются $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

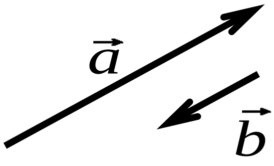


Рис. 4.

Определение. ***Компланарные векторы*** – векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Заметим, что любые два вектора всегда компланарны.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***равными***, если они: 1) коллинеарны, 2) их длины равны, 3) они имеют одинаковое направление (рис.5). Обозначение: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

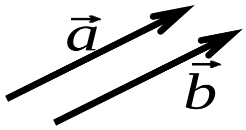


Рис. 5.

Замечание 1. Понятие равенства векторов отличается от понятия равенства скалярных величин. Из последнего определения следует, что равными будут не только полностью совпадающие векторы, т.е. имеющие общую начальную и общую конечную точки, но и те, которые можно совместить при помощи параллельного переноса. Итак,

Если точка приложения вектора может быть любой, то есть его можно переносить, то вектор называется ***свободным***.

Вектор называется ***скользящим***, если его можно перемещать вдоль прямой, проходящей через начало и конец вектора.

Векторы, для которых точка приложения имеет существенное значение, называются ***связанными*** (например, радиус-вектор точки, который будет определен ниже, или сила, действующая на тело).

§2.2. Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся операции сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число. Рассматривать будем лишь свободные векторы.

Напомним два правила сложения векторов. Пусть даны три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (рис. 6).

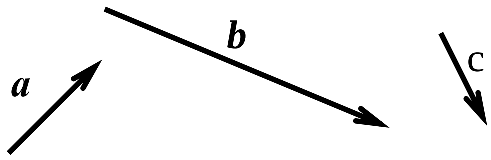


Рис. 6.

а) *Правило треугольника*. От произвольно выбранной точки откладываем вектор, равный вектору $\boldsymbol{a}$; от его конца откладываем вектор, равный вектору $\boldsymbol{b}$; строим вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом второго вектора, это и есть вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (рис. 6а). Аналогично получается сумма любого конечного числа векторов (рис. 6б).

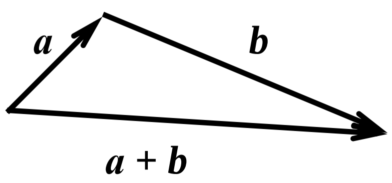


Рис. 6а.

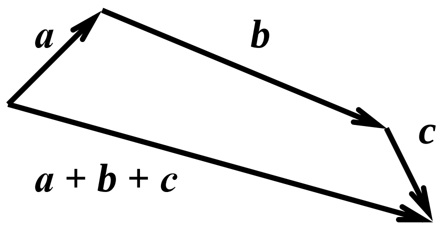


Рис. 6б.

б) *Правило параллелограмма*. От произвольно выбранной точки откладываем оба вектора-слагаемые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; на этих двух векторах, как на сторонах, строим параллелограмм. Направленная диагональ этого параллелограмма, выходящая из общего начала векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представляет вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (рис. 7).

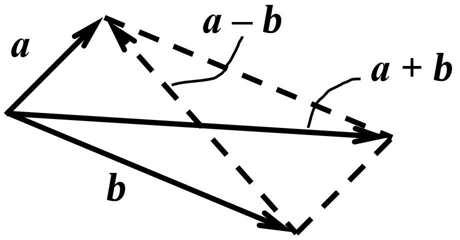


Рис. 7.

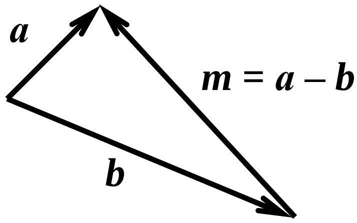


Рис. 8.

Определение. ***Разностью векторов a*** и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ такой, что $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}$ (рис 8). На рис. 7 вектор $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ есть другая диагональ параллелограмма с направлением от конца вектора $\boldsymbol{b}$ к концу вектора $\boldsymbol{a}$.

Заметим, что вектор $-\boldsymbol{b}$ является ***противоположным*** вектору $\boldsymbol{b}$.

Определение. ***Произведением вектора a на число*** λ называется вектор $\lambda\,\boldsymbol{a}$, 1) коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, 2) имеющий длину $|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$, 3) направленный так же, как вектор $\boldsymbol{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$ (рис. 9) .

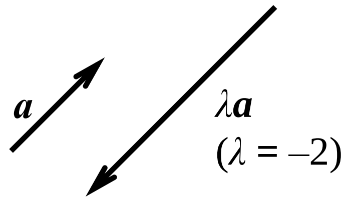


Рис. 9.

Определение. ***Орт вектора a*** – единичный вектор, имеющий то же направление, что и $\boldsymbol{a}$; обозначается $\boldsymbol{a}^{\mathbf{o}}$.

Отметим важное равенство: $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^{\circ}$, т.е. любой вектор может быть представлен в виде произведения его орта на число, равное его модулю, откуда получаем формулу для нахождения орта вектора

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1}$$

Свойства линейных операций над векторами

① Сложение коммутативно: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

② Сложение ассоциативно: $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

③ $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$.

④ Дистрибутивность: $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\boldsymbol{a} = \lambda_1\,\boldsymbol{a} + \lambda_2\,\boldsymbol{a}$.

⑤ Дистрибутивность: $\lambda\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{b}$.

⑥ $1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

⑦ Вектор $-\boldsymbol{a}$, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, можно представить в виде: $-\boldsymbol{a} = (-1)\cdot\boldsymbol{a}$.

§2.3. Линейная зависимость и независимость векторов

Определение. Выражение вида $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Определение. Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется ***линейно зависимой***, если существует их линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}, \tag{2}$$

причем хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в этой линейной комбинации отличен от нуля.

Если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы, то хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных: например, при $\lambda_1 \neq 0$ из равенства (2) следует, что $\boldsymbol{a}_1 = \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$, где $\mu_i = -\lambda_i / \lambda_1,\ i = 2,\ldots,n$.

Определение. Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется ***линейно независимой***, если равенство (2) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Теорема о линейной зависимости систем векторов

1) Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

2) Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

3) Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

4) Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Определение. ***Базисом*** в пространстве называется упорядоченная система линейно независимых векторов такая, что любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов.

Следствие теоремы о линейной зависимости систем векторов

1) в трехмерном пространстве базис – упорядоченная тройка любых некомпланарных векторов;

2) на плоскости базисом является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов;

3) на прямой линии базисом является любой ненулевой вектор;

4) в пространстве, состоящем из одного лишь нулевого вектора, базиса не существует.

Далее будем работать в пространстве размерности три. Итак, любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Это представление называется разложением вектора по базису и осуществляется единственным образом. Коэффициенты разложения называются ***координатами*** или ***компонентами*** вектора в базисе. Обозначается $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$.

§2.4. Координатное представление векторов

Определение. ***Декартовой системой координат*** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка обычно обозначается буквой O и называется ***началом координат***. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***осями координат***. Плоскости, проходящие через оси координат, называются ***координатными плоскостями***.

Определение. Декартова система координат называется ***прямоугольной***, если все ее базисные векторы попарно перпендикулярны и их модули равны единице. Часто для векторов такого базиса вводят специальные обозначения: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (рис. 10).

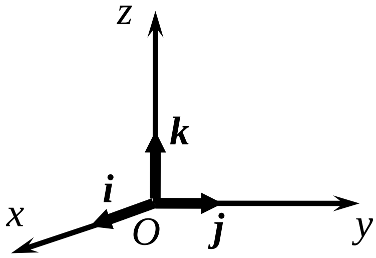


Рис. 10.

Направление векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ выбирают совпадающим с направлением осей Ox, Oy, Oz, так что эти базисные векторы являются ортами осей декартовой прямоугольной системы координат.

Хотя многие утверждения и свойства справедливы в произвольной декартовой системе координат, в дальнейшем изложении система координат будет подразумеваться прямоугольной декартовой, если специально не оговорено иное.

Итак, любой вектор $\boldsymbol{a}$ пространства может быть разложен по базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этом базисе; иначе они называются ***проекциями вектора a на координатные оси*** Ox, Oy, Oz соответственно. Можно записать также

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем задавать векторы и в форме (3), и в форме (4).

Из свойств линейных операций над векторами следует

Утверждение 1. При сложении векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ их соответствующие компоненты складываются:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_y\}. \tag{5}$$

При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число:

$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \tag{6}$$

Следствие. Условие коллинеарности двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$

в векторной форме: $$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}, \tag{7}$$

в координатной форме: $$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda, \tag{8}$$

т.е. соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны. В частности, соответствующие координаты равных векторов равны:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \ \Leftrightarrow \begin{cases} b_x = a_x, \\ b_y = a_y, \\ b_z = a_z. \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что до сих пор еще не было сказано, как находить координаты вектора. Остановимся на этом вопросе.

Определение. ***Радиус-вектором точки*** $A(x_A, y_A, z_A)$ называется вектор $\overrightarrow{OA}$. Его компоненты совпадают с координатами точки A: $\overrightarrow{OA} = \{x_A, y_A, z_A\}$ (рис. 11).

Утверждение 2. Если вектор $\boldsymbol{a}$ задан двумя точками: началом в точке $M(x_M, y_M, z_M)$ и концом в точке $N(x_N, y_N, z_N)$, т.е. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{MN}$ (рис. 12), то его декартовы координаты a_x, a_y, a_z находятся по формулам:

$$\begin{aligned} a_x &= x_N - x_M, \\ a_y &= y_N - y_M, \\ a_z &= z_N - z_M. \end{aligned} \tag{10}$$

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ вычисляется по формуле:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{11}$$

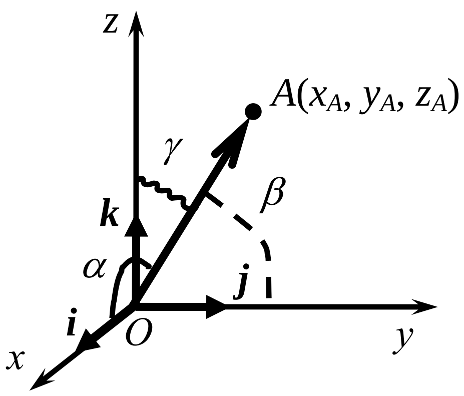


Рис. 11.

Определение. Косинусы углов α, β, γ, которые вектор образует с осями координат $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, называются ***направляющими косинусами*** этого вектора (рис. 11).

Они представляют собой компоненты единичного вектора и связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{12}$$

Координаты вектора связаны с его направляющими косинусами следующим образом:

$$\begin{aligned} a_x &= |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ a_y &= |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\ a_z &= |\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \end{aligned} \tag{13}$$

Замечание 2. Соотношения (11)-(13) справедливы только в прямоугольной декартовой системе координат.

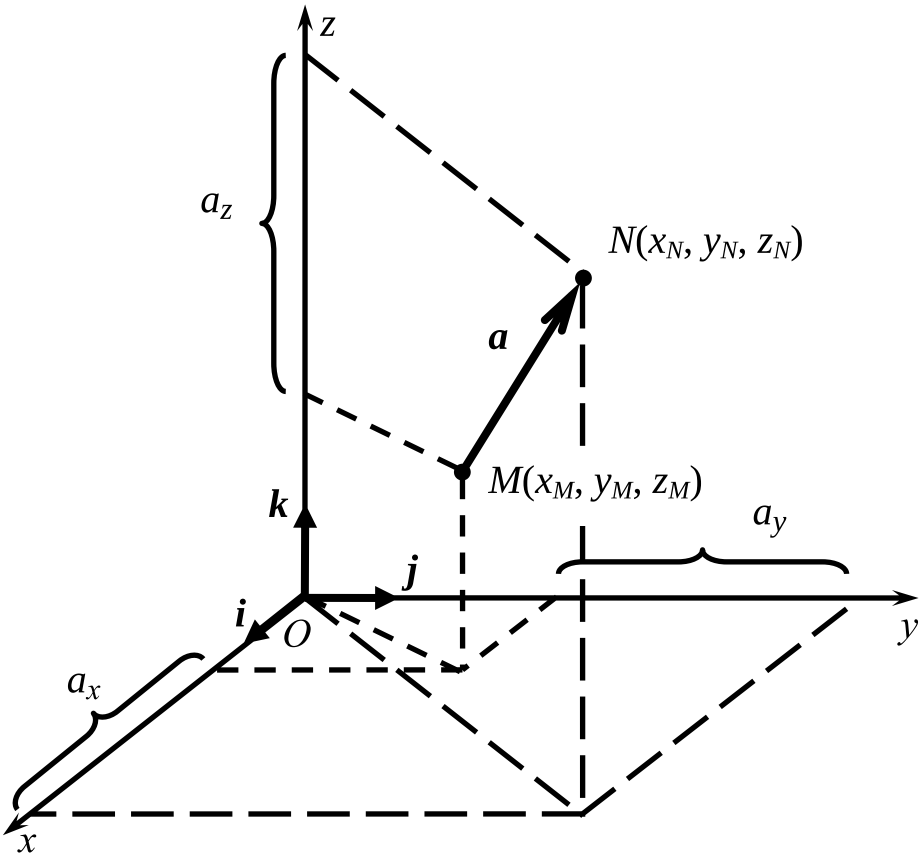


Рис. 12.

ПРИМЕР 2.4.1. Даны точки $A(1,-2,0)$, $B(-2,3,-1)$, вектор $\boldsymbol{a}=\{0,\ 1,\ 2\}$. Найти:

а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и противоположного вектора;

б) модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;

в) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки C, с которой совпадает конец вектора $\boldsymbol{a}$, если его начало совпадает с точкой B.

Решение. а) Начало вектора $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$ совпадает с точкой A, конец – с точкой B. Используя формулы (10), находим координаты b_x, b_y, b_z вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$b_x = x_B - x_A = -2 - 1 = -3,$$
$$b_y = y_B - y_A = 3 - (-2) = 5,$$
$$b_z = z_B - z_A = -1 - 0 = -1.$$

Следовательно, $\overrightarrow{AB} = \{-3,\ 5, -1\}$, тогда противоположный вектор $\overrightarrow{BA}$ имеет координаты $\overrightarrow{BA} = \{3, -5,\ 1\}$.

б) Применяя формулу (11), получим:

$$|\,\overrightarrow{AB}\,| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35} = |\,\overrightarrow{BA}\,|.$$

в) Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$ находим из формул (13):

$$-3 = \sqrt{35}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{35}},$$
$$5 = \sqrt{35}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{35}},$$
$$-1 = \sqrt{35}\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{35}}.$$

г) Имеем $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC}$. Обозначая координаты точки C через x_C, y_C, z_C, с помощью формул (10) получим уравнения:

$$0 = x_C - (-2), \qquad 1 = y_C - 3, \qquad 2 = z_C - (-1).$$

Откуда $x_C = -2,\ y_C = 4,\ z_C = 1$ и, следовательно, $C(-2,\ 4,\ 1)$.■

ПРИМЕР 2.4.2. Может ли вектор составлять с координатными осями углы: а) $\alpha = 45°,\ \ \beta = 135°,\ \ \gamma = 60°$; б) $\alpha = 150°,\ \ \beta = 30°$?

Решение. а) Проверяем, выполняется ли соотношение (12):

$$\cos^2 45° + \cos^2 135° + \cos^2 60° =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} \neq 1.$$

Ответ: не может.

б) Поскольку угол γ не задан, попытаемся найти его из соотношения (12):

$$\cos^2 150° + \cos^2 30° + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1,$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\cos^2\gamma=1 \;\Rightarrow\; \cos^2\gamma=-\frac{1}{2}\ .$$

Ответ: не может.■

ПРИМЕР 2.4.3. Дан модуль вектора $|\boldsymbol{a}|=3$ и углы, которые этот вектор составляет с осями координат $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$. Найти проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные оси.

Решение. Отмечая, что $\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2 120°=1$, искомые проекции a_x, a_y, a_z находим по формулам (13):

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=3\cos 45°=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$
$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=3\cos 60°=\frac{3}{2},$$
$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=3\cos 120°=-\frac{3}{2}.\ ■$$

ПРИМЕР 2.4.4. Определить координаты точки M и координаты ее радиус-вектора, если последний составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен $5\sqrt{3}$.

Решение. Т.к. $\alpha=\beta=\gamma$, то соотношение (12) приводит к уравнению

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

разрешая которое относительно $\cos\alpha$, получим $\cos^2\alpha=1/3 \Rightarrow \cos\alpha=\pm 1/\sqrt{3}$. Координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$ совпадают с координатами ее радиус-вектора, т.е. вектора $\overrightarrow{OM}=\{x_M, y_M, z_M\}$. Т.к. получено два значения $\cos\alpha$, то по формулам (13) имеем два радиус-вектора $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ и две точки M_1 и M_2:

$$x_{M_1} = y_{M_1} = z_{M_1} = 5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 5 \;\Rightarrow\; M_1(5, 5, 5), \;\; \overrightarrow{OM}_1 = \{5, 5, 5\};$$

$$x_{M_2} = y_{M_2} = z_{M_2} = 5\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -5 \;\Rightarrow$$

$$M_2(-5, -5, -5), \;\; \overrightarrow{OM}_2 = \{-5, -5, -5\}. \; \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.5. По данным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (рис.13) построить векторы:

а) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; б) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; в) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; г) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; д) $-\boldsymbol{a}/2$; е) $2\boldsymbol{b}$; ж) $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2$.

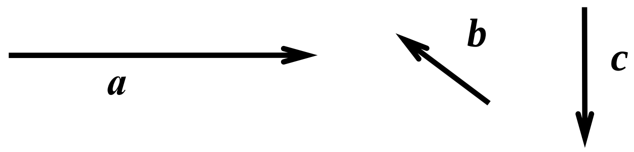


Рис. 13.

Решение. а, б) В произвольной точке A (рис.14) строим вектор, равный вектору $\boldsymbol{a}$, и вектор, равный вектору $\boldsymbol{b}$, после чего на этих двух векторах, как на сторонах, строим параллелограмм $ABCD$. Тогда по правилу параллелограмма его направленная диагональ, выходящая из точки A, будет вектором $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, а вторая диагональ этого параллелограмма с направлением от конца вектора $\boldsymbol{b}$ (точка B) в конец вектора $\boldsymbol{a}$ (точка D), будет вектором $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

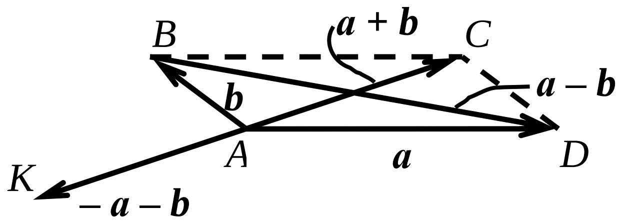


Рис. 14.

в) По свойству ⑤ линейных операций над векторами $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, т.е. у вектора $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ надо изменить направление или в точке A построить вектор $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CA}$ (рис. 14).

г) Строим вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ по правилу треугольника, используя свойство ② линейных операций: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}$ (рис. 15а). От конца уже построенного вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (точка C) откладываем вектор $\overrightarrow{CE}$, равный вектору $\boldsymbol{c}$, и соединяем начало первого (точка A) с концом последнего (точка E), получаем вектор $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

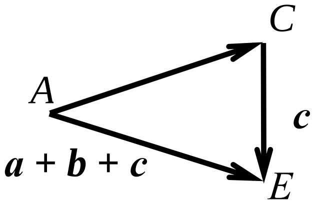


Рис. 15а.

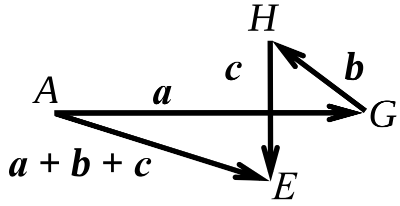


Рис. 15б.

Иначе: можно в произвольной точке A построить вектор $\overrightarrow{AG}$, равный вектору $\boldsymbol{a}$ (рис. 15б), от его конца (точка G) отложить вектор $\overrightarrow{GH}$, равный вектору $\boldsymbol{b}$, от конца последнего (точка H) отложить вектор $\overrightarrow{HE}$, равный вектору $\boldsymbol{c}$, и, наконец, соединить начало первого вектора (точка A) с концом последнего (точка E) и получить вектор $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

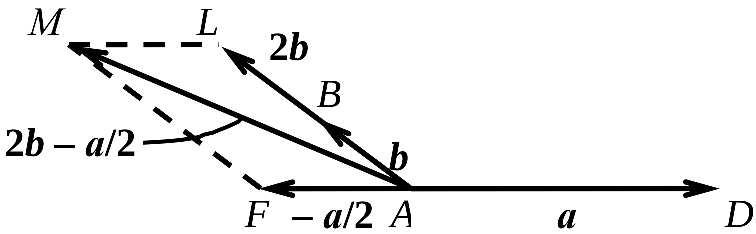


Рис. 16.

д) Рис. 16: на продолжении вектора $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$ откладываем отрезок AF, длина которого в два раза меньше длины отрезка AD. Получаем вектор $\overrightarrow{AF}$ с направлением, противоположным вектору $\boldsymbol{a}$ (согласно определению $\lambda\,\boldsymbol{a}$).

е) Рис. 16: продолжаем вектор $\overrightarrow{AB}$ за точку B на длину вектора $\overrightarrow{AB}$, получаем вектор $\overrightarrow{AL}=2\boldsymbol{b}$.

ж) Рис. 16: т.к. $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2=2\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}/2)=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AF}$, то по правилу параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AL}$ и $\overrightarrow{AF}$, как на сторонах, диагональ, выходящая из точки A в направлении точки M, будет искомым вектором $\overrightarrow{AM}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2$. ■

ПРИМЕР 2.4.6. Доказать, что при любом расположении точек A, B и C справедлива формула $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Решение. Как бы ни были расположены точки A, B и C (на рис. 17 показаны три из возможных вариантов), складывая векторы по правилу треугольника, имеем: от конца вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка B) откладываем вектор $\overrightarrow{BC}$, затем от конца вектора $\overrightarrow{BC}$ (точка C) откладываем вектор $\overrightarrow{CA}$, начало результирующего вектора совпадает с началом первого из векторов-слагаемых, т.е. с точкой A, а конец – с концом последнего из векторов-слагаемых, т.е. с той же точкой A. Таким образом, у результирующего вектора начало совпадает с концом, это и есть нуль-вектор $\vec{0}$. Справедливость формулы доказана. ■

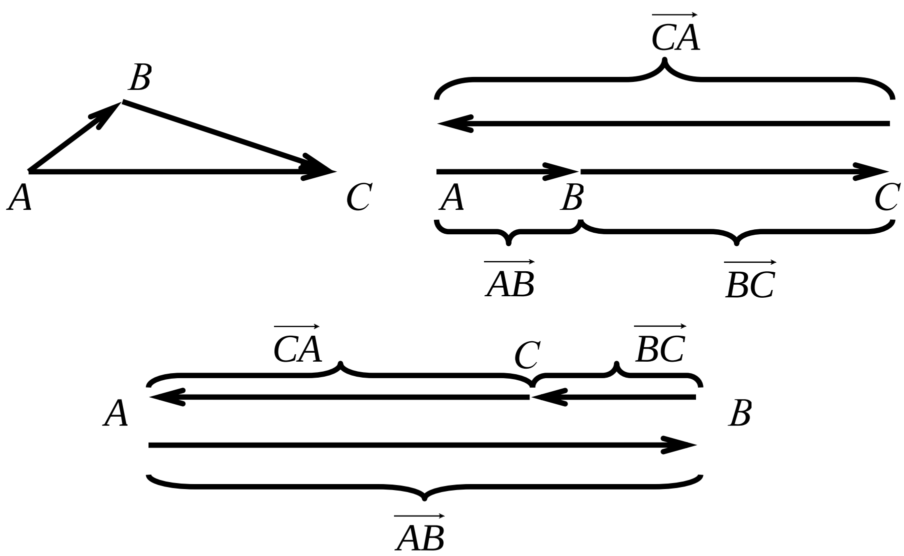


Рис. 17.

ПРИМЕР 2.4.7. Показать, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. При каком условии на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место знак равенства?

Решение. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ образуют треугольник (рис. 18а), в котором длина одной стороны $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ меньше суммы длин двух других сторон $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ по неравенству треугольника.

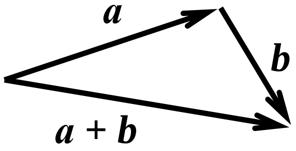


Рис. 18а.

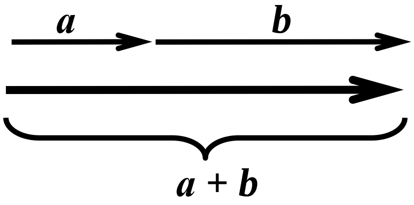


Рис. 18б.

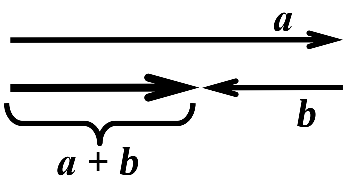


Рис. 18в.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и одинаково направлены, то $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ (рис. 18б).

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и направлены противоположно, то $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|$ (рис. 18в).■

ПРИМЕР 2.4.8. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол 120º, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$. Вычислить $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

Решение. На рис. 19 изображены вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$. Согласно правилу параллелограмма, векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ являются диагоналями параллелограмма $OACB$ (рис. 19).

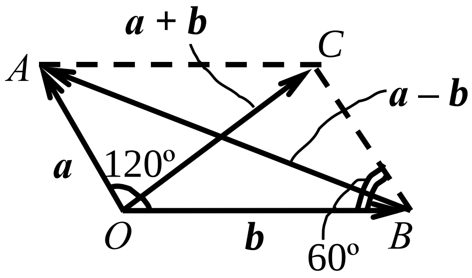


Рис. 19.

Применим теорему косинусов к треугольнику OAB:

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi \quad (\varphi=\angle AOB)$$

или

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120^\circ=9+25-30\cdot(-1/2)=49,$$

следовательно, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=7$.

Применяя ту же теорему в треугольнике OCB, получим:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\psi \quad (\psi=\angle OBC)$$

или

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos60^\circ=9+25-30\cdot(1/2)=19,$$

и тогда $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$. ■

ПРИМЕР 2.4.9. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{3,-2,\ 6\}$, $\boldsymbol{b}=\{-2,\ 1,\ 0\}$.

а) Найти векторы 1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 3) $-2\boldsymbol{a}$; 4) $\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$; 5) $\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}$.

б) Вычислить $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ и $\left|\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}\right|$.

в) Найти направляющие косинусы векторов $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}/2$.

Решение. а) По формуле (5) находим

$$1)\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{3-2,-2+1,\ 6+0\}=\{1,-1,\ 6\}.$$

По формуле (6) получаем $-\boldsymbol{b}=\{2,-1,0\}$, тогда по формуле (5)

$$2)\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\{3+2,-2-1,\ 6+0\}=\{5,-3,\ 6\}.$$

По формуле (6)

$$3)\ -2\boldsymbol{a}=-2\ \{3,-2,\ 6\}=\{-6,\ 4,-12\}.$$

$$4)\ \boldsymbol{b}/2=\{-2/2,\ 1/2,\ 0/2\}=\{-1,\ 1/2,\ 0\}.$$

По формуле (5), используя результаты 3), 4), имеем

$$5)\ \frac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}=\{-1,\ \frac{1}{2},0\}+\{-6,\ 4,-12\}=\{-7,\ \frac{9}{2},-12\}.$$

б) Воспользовавшись результатом 1), 5) пункта а), по формуле (11) находим

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{9+4+36}=7,$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+6^2}=\sqrt{38},$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{b}}{2}-2\boldsymbol{a}\right|=\sqrt{(-7)^2+(9/2)^2+(-12)^2}=\sqrt{853}/2.$$

в) С использованием результата б) по формулам (13) для вектора $\boldsymbol{a}$ имеем

$$3=7\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=3/7,$$
$$-2=7\cos\beta \quad\Rightarrow\quad \cos\beta=-2/7,$$
$$6=7\cos\gamma \quad\Rightarrow\quad \cos\gamma=6/7.$$

Чтобы воспользоваться теми же формулами для вектора $-\boldsymbol{b}/2$, надо сначала вычислить его модуль: $|\boldsymbol{b}/2|=\sqrt{(-1)^2+(1/2)^2+0^2}=\sqrt{5/4}=\sqrt{5}/2$. Тогда

$$-1=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha=-2/\sqrt{5},$$
$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta=1/\sqrt{5},$$
$$0=\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma=0. \ ■$$

ПРИМЕР 2.4.10. Даны проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси: $\vec{F}=\{4,\ 4, -4\sqrt{2}\}$. Найти величину силы $\vec{F}$ и направление ее действия.

Решение. Величина силы $\vec{F}$ есть

$$|\vec{F}|=\sqrt{4^2+4^2+(-4\sqrt{2})^2}=\sqrt{16+16+32}=8.$$

Направление вектора задают его направляющие косинусы, которые определим по формулам (13):

$$4=8\cos\alpha, \quad 4=8\cos\beta, \quad -4\sqrt{2}=8\cos\gamma.$$

Откуда $\cos\alpha=1/2, \quad \cos\beta=1/2, \quad \cos\gamma=-\sqrt{2}/2.$

Следовательно, вектор силы $\vec{F}$ образует с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* углы $\alpha=60°$, $\beta=60°$, $\gamma=135°$ соответственно. ■

ПРИМЕР 2.4.11. Проверить коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}=\{2,-6,-8\}$ и $\boldsymbol{b}=\{-1,\ 3,\ 4\}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

Решение. Проверяем условие коллинеарности (8):

$$\frac{2}{-1}=\frac{-6}{3}=\frac{-8}{4}=-2,$$

следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, причем $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$, значит, вектор $\boldsymbol{a}$ длиннее вектора $\boldsymbol{b}$ в два раза, направлены эти векторы противоположно ($\lambda=-2<0$). ■

ПРИМЕР 2.4.12. Найти орт вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A(-1,\ 2,\ 3)$, $B(0,\ 1, -2)$.

Решение. Для решения задачи применим формулу (1). Предварительно находим координаты вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \{0+1,\ 1-2, -2-3\} = \{1, -1, -5\}$ и его модуль $|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Тогда орт вектора $\boldsymbol{a}$ есть вектор

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\{1, -1, -5\}}{3\sqrt{3}} = \left\{\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right\}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.13. а) Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i}$, представленные в виде разложения по базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Записать каждый из векторов в координатной форме.

б) Даны векторы $\boldsymbol{a} = \{1, -2, -1/2\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, -1,\ 2\}$, $\boldsymbol{c} = \{1,\ 0,\ 0\}$, $\boldsymbol{d} = \{0,\ 0, -1\}$. Найти разложение каждого из этих векторов по координатному базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Решение. а) Коэффициенты при $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и есть координаты соответствующего вектора (формулы (3-4)):

$$\boldsymbol{a} = \{2, -3,\ 1\}, \quad \boldsymbol{b} = \{0,\ 1, -1\}, \quad \boldsymbol{c} = \{-1,\ 0,\ 0\}.$$

б) На основании формул (3-4) имеем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}/2, \quad \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{k}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.4.14. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = \{-4,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0,\ 2\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{4,\ 1\}$ на плоскости. Какие из них параллельны координатным осям?

Решение. Вторая координата вектора $\boldsymbol{a}_1$ равна нулю; это означает, что координаты по оси Oy его начала и конца совпадают (см. рис. 20а), т.е. вектор $\boldsymbol{a}_1$ перпендикулярен оси Oy и, следовательно, параллелен оси Ox. Параллельность вектора $\boldsymbol{a}_1$ оси Ox следует и из его коллинеарности базисному вектору $\boldsymbol{i} = \{1, 0\}$, т.к. $\boldsymbol{a}_1 = -4\boldsymbol{i}$ (см. формулу (7)). Вектор $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{j}$, следовательно, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{j}$ коллинеарны, т.е. вектор $\boldsymbol{a}_2$ параллелен оси Oy (см. рис. 20б). Вектор $\boldsymbol{a}_3$ не имеет нулевых координат, т.е. не перпендикулярен ни оси Ox, ни оси Oy, значит, и не параллелен ни одной из осей координат (см. рис. 20в). ■

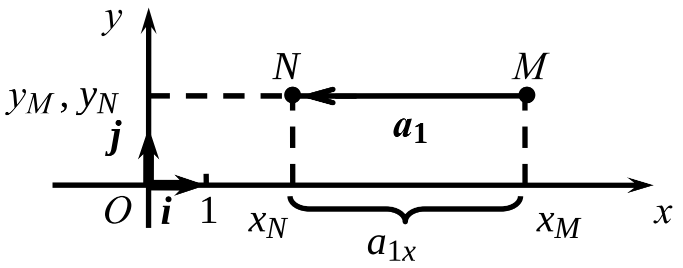


Рис. 20а.

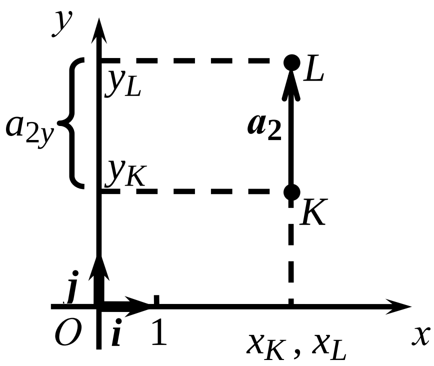


Рис. 20б.

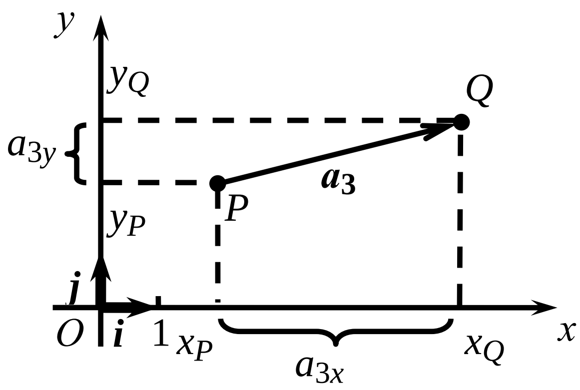


Рис. 20в.

ПРИМЕР 2.4.15. Даны векторы в пространстве

$$\boldsymbol{b}_1 = \{-2,\ 0,\ 0\},\quad \boldsymbol{b}_2 = \{0,\ 4,\ 0\},\quad \boldsymbol{b}_3 = \{4,\ 0,\ 1\},\quad \boldsymbol{b}_4 = \{0,\ 1,\ 3\}.$$

Какие из них параллельны координатным осям; координатным плоскостям?

Решение. Вектор $\boldsymbol{b}_1$ и вектор $\mathbf{i} = \{1,\ 0,\ 0\}$ коллинеарны, т.к. $\boldsymbol{b}_1 = -2\boldsymbol{i}$ (см. формулу (7)) т.е. вектор $\boldsymbol{b}_1$ параллелен оси Ox; вектор $\boldsymbol{b}_2 = 4\boldsymbol{j}$, следовательно, $\boldsymbol{b}_2$ и $\boldsymbol{j}$ коллинеарны, и вектор $\boldsymbol{b}_2$ параллелен оси Oy. Далее, вторая координата вектора $\boldsymbol{b}_3$ равна нулю, т.е. он перпендикулярен оси Oy, и потому параллелен плоскости xOz. Аналогично вектор $\boldsymbol{b}_4$ перпендикулярен оси Ox и параллелен плоскости yOz. ■

Выводы из примеров 2.4.14-2.4.15:

1) Если одна из координат вектора равна нулю, то вектор перпендикулярен соответствующей оси.

2) Если вектор имеет только одну отличную от нуля координату, то он параллелен соответствующей координатной оси.

ПРИМЕР 2.4.16. Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – любые неколлинеарные векторы. Представить любой третий вектор $\boldsymbol{a}$, лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, в виде $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}$.

Решение. По следствию теоремы о линейной зависимости систем векторов (пункт 2)) векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ образуют базис на задаваемой ими плоскости. Числа α и β называются координатами вектора **a** в этом базисе.

Приведем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ к общему началу O (рис. 21). Через конец вектора $\boldsymbol{a}$ (точка A) проведем две прямые AA_q параллельно вектору $\boldsymbol{p}$ и AA_p параллельно вектору $\boldsymbol{q}$.

По правилу параллелограмма получим

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_p} + \overrightarrow{OA_q}. \qquad (14)$$

Векторы $\boldsymbol{p}$ и OA_p коллинеарны (лежат на одной прямой), поэтому существует число α такое, что

$$OA_p = \alpha\boldsymbol{p}. \qquad (15)$$

Аналогично $$OA_q = \beta\boldsymbol{q}. \qquad (16)$$

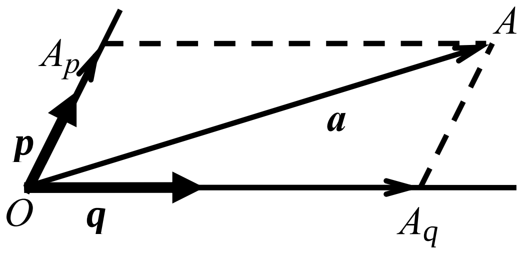


Рис. 21.

Из равенств (14-16) имеем $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}$.

Требуемое разложение получено. Дополнительно покажем, что числа α и β определяются однозначно.

Пусть существуют два различных разложения: $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{p} + \beta \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{a} = \alpha' \boldsymbol{p} + \beta' \boldsymbol{q}$, причем, например, $\alpha \neq \alpha'$. Вычитая почленно одно равенство из другого, получим:

$$\mathbf{0} = (\alpha - \alpha')\boldsymbol{p} + (\beta - \beta')\boldsymbol{q}, \quad \text{откуда} \quad \boldsymbol{p} = -\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}\boldsymbol{q} \quad \text{при} \quad \alpha \neq \alpha'.$$

Последнее равенство означает, что векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны (см. условие (7)), что противоречит условию задачи, и потому неравенство $\alpha \neq \alpha'$ невозможно. Таким же образом доказывается невозможность неравенства $\beta \neq \beta'$. Следовательно, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$, т.е. один и тот же вектор не может иметь двух разных разложений по одному и тому же базису. ■

ПРИМЕР 2.4.17. На плоскости даны три вектора $\boldsymbol{a} = \{3, -2\}$, $\boldsymbol{p} = \{-2,\ 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{7, -4\}$. Найти разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$.

Решение. Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ не коллинеарны, т.к. не выполнено условие (8): $\frac{-2}{7} \neq \frac{1}{-4}$. Поэтому вектор $\boldsymbol{a}$ может быть разложен по векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ как по базису (пример 2.4.16): $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{p} + \beta \boldsymbol{q}$. Это векторное равенство можно записать в координатной форме на основании формул (5), (6), (9):

$$\begin{cases} 3 = \alpha \cdot (-2) + \beta \cdot 7, \\ -2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-4). \end{cases}$$

Решать эту систему уравнений можно по-разному. Например, умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым уравнением: $3 + 2 \cdot (-2) = \beta \cdot (7 + 2 \cdot (-4))$, откуда $\beta = 1$. Подставив полученное значение β во второе уравнение системы, находим $\alpha = -2 + 4\beta = 2$.

Таким образом, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$. ■

ПРИМЕР 2.4.18. Можно ли разложить каждый из следующих векторов $\boldsymbol{a} = \{1, -\sqrt{15}\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1,\ \sqrt{15}\}$, $\boldsymbol{c} = \{3,\ 4\}$, принимая в качестве базиса два остальных?

Решение. Согласно следствию из теоремы о линейной зависимости систем векторов (пункт 2)) любые два неколлинеарных вектора могут служить базисом на плоскости, и тогда всякий третий вектор, лежащий в плоскости первых двух, однозначно может быть представлен в виде их линейной комбинации.

1) Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны (проверьте!), следовательно, вектор $\boldsymbol{a}$ может быть разложен по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

2) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны (проверьте!), следовательно, вектор $\boldsymbol{b}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$.

3) Вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}$, при любых α и β вектор $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ коллинеарен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Поэтому равенство $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ невозможно ни при каких значениях α и β. ■

ПРИМЕР 2.4.19. Даны три вектора $\boldsymbol{p}=\{3,-2,\ 4\}$, $\boldsymbol{q}=\{-2,\ 1,\ 3\}$, $\boldsymbol{r}=\{7,-4,\ 1\}$. Рассматривая их как базисные, найти разложение вектора $\boldsymbol{a}=\{25,-15,\ 14\}$ этому базису.

Решение. То, что векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ можно рассматривать как базисные, дано в условии, но вообще это не очевидно. Сталкиваясь с задачами подобного рода, следует проверять, являются ли векторы линейно независимыми, т.е. могут ли быть использованы в качестве базиса. В двумерном случае это сделать легко: надо лишь убедиться в том, что два вектора не коллинеарны, как это было сделано в примере 2.4.17. В трехмерном случае следует проверять компланарность трех векторов. О том, как это легко можно сделать, будет рассказано в §2.5. В данном же примере можно сразу записать векторное равенство $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}+\gamma\boldsymbol{r}$. Представив его в координатной форме на основании формул (5), (6), (9), получим:

$$\begin{cases} 25=3\alpha-2\beta+7\gamma, \\ -15=-2\alpha+\beta-4\gamma, \\ 14=4\alpha+3\beta+\gamma. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений при помощи правила Крамера.
Найдем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(1+12) + 2\cdot(-2+16) + 7\cdot(-6-4) = 39 + 28 - 70 = -3.$$

То, что $\Delta \neq 0$, по правилу Крамера означает существование единственного решения системы, т.е. однозначного разложения вектора $\boldsymbol{a}$ по системе векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$. А это в свою очередь является подтверждением того, что систему $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ можно считать базисом.

Далее найдем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 25 & -2 & 7 \\ -15 & 1 & -4 \\ 14 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 25\cdot(1+12) + 2\cdot(-15+56) + 7\cdot(-45-14) = 325 + 82 - 413 = -6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 25 & 7 \\ -2 & -15 & -4 \\ 4 & 14 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-15+56) - 25\cdot(-2+16) + 7\cdot(-28+60) = 123 - 350 + 224 = -3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 25 \\ -2 & 1 & -15 \\ 4 & 3 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(14+45) + 2\cdot(-28+60) + 25\cdot(-6-4) = 177 + 64 - 250 = -9.$$

Теперь $\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2;\quad \beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1;\quad \gamma = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$

Таким образом, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + 3\boldsymbol{r}$. ■

ПРИМЕР 2.4.20. Установить линейную зависимость (независимость) векторов: а) $\boldsymbol{a} = \{2, -3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{-1,\ 3/2\}$;

б) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$;

в) $\boldsymbol{a} = \{0,\ 1,\ 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{1,\ 1,\ 3\}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$;

г) векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ из примера 2.4.18;

д) $\boldsymbol{a} = \{0,\ 1,\ 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{1,\ 1,\ 3\}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{d} = \{0,\ 1,\ 0\}$;

е) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

Решение. а) Т.к. $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{b}$ (проверьте!), то будет выполнено равенство (2), означающее линейную зависимость векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

б) Для векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ условие коллинеарности (8) не выполняется: $\frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{2}$. Поэтому по теореме о линейной зависимости систем векторов (пункт 3) векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ линейно независимы.

в) Заметим, что $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, т.е. вектор $\boldsymbol{c}$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с ненулевыми коэффициентами. Отсюда делаем вывод: векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы.

г) Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ из примера 2.4.18 заданы на плоскости, т.е. они компланарны, а, значит, линейно зависимы по теореме о линейной зависимости систем векторов (пункт 2)), но не каждый из них может быть разложен по двум другим (см. решение примера 2.4.18).

д) Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ как всякие четыре вектора в пространстве линейно зависимы по теореме о линейной зависимости систем векторов (пункт 1)).

е) Составим из трех данных векторов линейную комбинацию с неизвестными коэффициентами λ_1, λ_2, λ_3; приравняем эту линейную комбинацию к нулевому вектору:

$$\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

Полученное векторное равенство можно записать в координатной форме, опираясь на формулы (5), (6), (9) и помня о том, что все координаты нулевого вектора равны нулю. Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных λ_1, λ_2, λ_3:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему при помощи правила Крамера. Для этого вычислим определитель матрицы системы Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 2 \cdot 12 = -26 \neq 0 .$$

По правилу Крамера в случае $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение. Непосредственной проверкой легко убедиться, что числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ удовлетворяют данной системе и, значит, являются ее единственным решением. Итак, из трех данных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ составлена линейная комбинация, которая равна нулевому вектору только в том случае, когда все коэффициенты в ней нулевые. По определению это означает линейную независимость рассматриваемых векторов. ■

ПРИМЕР 2.4.21. В равностороннем треугольнике ABC (рис. 22) точка M есть середина стороны BC, точка O – центр тяжести треугольника. Имеет ли смысл каждое из выражений: а) $\overrightarrow{AO} : \overrightarrow{AM}$, б) $\overrightarrow{MO} : \overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}$? В случае утвердительного ответа найти значение соответствующего выражения.

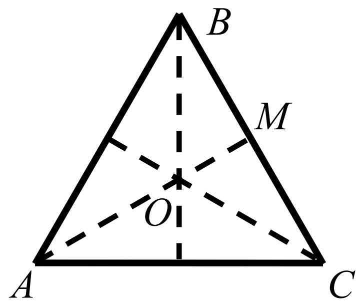


Рис. 22.

Решение. а) Т.к. векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AM}$ коллинеарны, то отношение имеет смысл, более того, в силу одинаковой направленности этих векторов их отношение будет иметь положительный знак. Центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, и эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{OM}|$, $|\overrightarrow{AM}| = 3|\overrightarrow{OM}|$, и тогда $\dfrac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{2|\overrightarrow{OM}|}{3|\overrightarrow{OM}|} = \dfrac{2}{3}$.

б) Отношение $\overrightarrow{MO} : \overrightarrow{AO}$ также имеет смысл, т.к. векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{AO}$ коллинеарны. Учитывая, что эти векторы направлены противоположно, получим $\dfrac{\overrightarrow{MO}}{\overrightarrow{AO}} = -\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{AO}|} = -\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{2|\overrightarrow{OM}|} = -\dfrac{1}{2}$.

в) Отношение $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}$ смысла не имеет, т.к. векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не коллинеарны. ■

Деление отрезка в заданном отношении

Если отрезок AB делится точкой C в отношении $m : n = \lambda$ (рис. 23), то

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{m}{n} = \lambda,$$

где $\lambda > 0$, если точка C принадлежит отрезку AB, $\lambda < 0$, если точка C лежит вне отрезка AB.

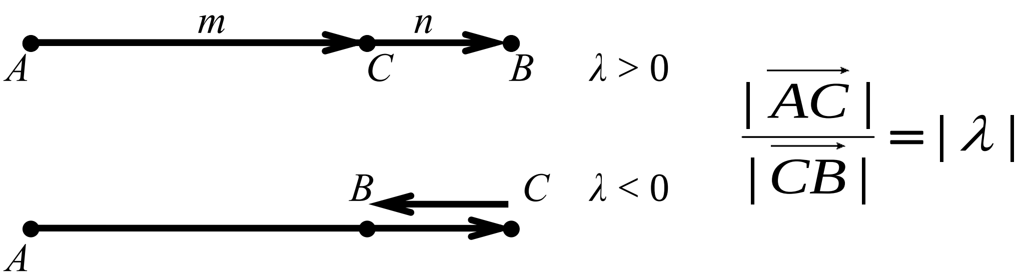


Рис. 23.

Обозначим координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, тогда имеют место формулы:

$$x_C = \frac{n \cdot x_A + m \cdot x_B}{m+n}, \quad y_C = \frac{n \cdot y_A + m \cdot y_B}{m+n}, \quad z_C = \frac{n \cdot z_A + m \cdot z_B}{m+n};$$

или

$$\boxed{x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{\lambda + 1}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{\lambda + 1}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{\lambda + 1}.} \tag{17}$$

В частности, если точка C – середина отрезка AB, то $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = 1$ и

$$\boxed{x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.} \tag{17a}$$

ПРИМЕР 2.4.22. Векторы $\boldsymbol{a} = \{0,\ 1,\ 3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{2,\ 0,\ 1\}$, отложенные от точки $A(1,\ 2,\ 3)$, являются сторонами треугольника ABC (рис. 24), AD – медиана треугольника. Найти координаты точки D и точки пересечения медиан O.

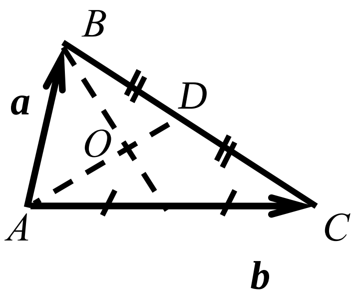


Рис. 24.

Решение. Координаты точки D – середины отрезка BC, можно найти по формулам (17а),

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2}, \tag{*}$$

если известны координаты точек B и C.

Для определения координат точки B пользуемся формулами (10), связывающими координаты вектора, с координатами его концов:

$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A, \quad a_z = z_B - z_A. \tag{**}$$

Аналогичным образом можно найти координаты точки C.

Для нахождения координат точки O используем формулы (17):

$$\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OD}} = \lambda;$$
$$x_O = \frac{x_A + \lambda \cdot x_D}{\lambda + 1}, \quad y_O = \frac{y_A + \lambda \cdot y_D}{\lambda + 1}, \quad z_O = \frac{z_A + \lambda \cdot z_D}{\lambda + 1}. \qquad (***)$$

Итак, координаты точки B по формулам (**):

$$\begin{array}{lll} 0 = x_B - 1 \Rightarrow & x_B = 1, & \\ 1 = y_B - 2 \Rightarrow & y_B = 3, & \text{следовательно,} \quad B(1,\ 3,\ 6). \\ 3 = z_B - 3 \Rightarrow & z_B = 6, & \end{array}$$

Аналогично координаты точки C по формулам (**):

$$\begin{array}{lll} 2 = x_C - 1 \Rightarrow & x_C = 3, & \\ 0 = y_C - 2 \Rightarrow & y_C = 2, & \text{следовательно,} \quad C(3,\ 2,\ 4). \\ 1 = z_C - 3 \Rightarrow & z_C = 4, & \end{array}$$

Подставляя найденные значения координат точек B и C в формулы (*), получаем координаты точки D:

$$x_D = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_D = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}, \quad z_D = \frac{6+4}{2} = 5, \quad D(2,\ \frac{5}{2},\ 5).$$

Наконец, по формулам (***) находим координаты точки O:

$$\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OD}} = \frac{2}{1} = 2;$$
$$x_O = \frac{1 + 2 \cdot 2}{2+1} = \frac{5}{3}, \quad y_O = \frac{2 + 2 \cdot 5/2}{2+1} = \frac{7}{3}, \quad z_O = \frac{3 + 2 \cdot 5}{2+1} = \frac{13}{3},$$

т.е. $O(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{13}{3})$. ■

ПРИМЕР 2.4.23. Точки $C(7,\ 0,\ 3)$ и $D(-5,\ 0,\ 0)$ делят отрезок AB на три равные части (рис. 25). Найти координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

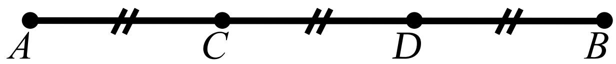


Рис. 25.

Решение. Рассмотрим отрезок CD, в качестве делящей его в отношении λ точки возьмем точку B; она лежит вне отрезка и потому $\lambda < 0$. Т.к. $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{BD}$, то $\dfrac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BD}} = -2 = \lambda$. Тогда по формулам (17):

$$x_B = \frac{x_C + \lambda \cdot x_D}{\lambda + 1} = \frac{7 + (-2)\cdot(-5)}{-2+1} = -17,$$

$$y_B = \frac{y_C + \lambda \cdot y_D}{\lambda + 1} = \frac{0 + (-2)\cdot 0}{-2+1} = 0,$$

$$z_B = \frac{z_C + \lambda \cdot z_D}{\lambda + 1} = \frac{3 + (-2)\cdot 0}{-2+1} = -3,$$

следовательно, $B(-17,\ 0, -3)$.

Теперь рассмотрим деление отрезка CD в отношении λ_1 точкой A; она лежит вне отрезка, и потому $\lambda_1 < 0$. Т.к. $\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, то $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AD}} = -\dfrac{1}{2} = \lambda_1$. Тогда по формулам (17):

$$x_A = \frac{x_C + \lambda_1 \cdot x_D}{\lambda_1 + 1} = \frac{7 + (-1/2)\cdot(-5)}{-1/2+1} = 19,$$

$$y_A = \frac{y_C + \lambda_1 \cdot y_D}{\lambda_1 + 1} = \frac{0 + (-1/2)\cdot 0}{-1/2+1} = 0,$$

$$z_A = \frac{z_C + \lambda_1 \cdot z_D}{\lambda_1 + 1} = \frac{3 + (-1/2)\cdot 0}{-1/2+1} = 6,$$

следовательно, $A(19,\ 0,\ 6)$.

Требуемые координаты вектора $\overrightarrow{BA}$ находим по формулам (10):

$$\overrightarrow{BA} = \{19-(-17),\ 0-0,\ \ 6-(-3)\} = \{36,\ 0,\ 9\}. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

№9. Даны точки $A(-1,\ 2,\ 3)$ и $B(0,\ 7, -1)$. Найти:

а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и противоположного вектора $\overrightarrow{BA}$;

б) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$;

в) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BA}$;

г) координаты точки C, если $\overrightarrow{BC} = \{-1,\ 0,\ 5\}$;

д) координаты радиус-вектора точки A, его длину и направляющие косинусы.

№10. Найти углы, которые вектор $\boldsymbol{a} = \{2,\ -1,\ -2\}$ образует с осями координат.

№11. а) Может ли вектор образовывать с осями координат следующие углы:
1) $45°,\ 45°,\ 150°$; 2) $120°,\ 30°,\ 90°$; 3) $0°,\ 90°,\ 90°$; 4) $60°,\ 145°$;
5) $30°,\ 150°$?

б) Какой угол образует с осью Oz вектор $\boldsymbol{a}$, если с осями Ox и Oy он образует углы $\alpha = 60°,\ \beta = 150°$?

№12. а) Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет равные углы с осями координат и его модуль равен 3.

б) Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол 60°, а с осью Oz – угол 45°; длина его равна 8. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

в) Вектор $\boldsymbol{a}$ составляет с осью ординат и осью аппликат одинаковые углы в 60°. Найти угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью абсцисс.

г) Сила, равная по величине 6 ед., действует в направлении вектора, образующего с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = \beta = 60°$. Найти проекции вектора силы на координатные оси.

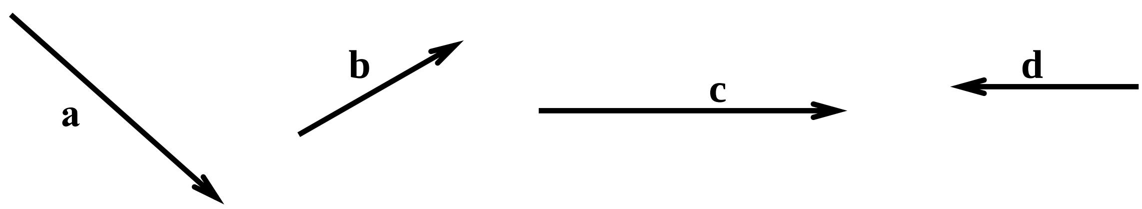


Рис. 26.

№13. По данным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (рис. 26) построить следующие векторы: а) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$; б) $-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$; в) $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$; г) $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$; д) $3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} / 2$; е) $-2\boldsymbol{d} + \boldsymbol{a} / 3$; ж) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.

№14. Дан прямоугольник $ABCD$. Коллинеарны ли векторы: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$?

№15. Дан треугольник ABC, в котором $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{q}$. Выразить через векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{CM}$, где K, L, M – основания медиан AK, BL, CM.

№16. а) Даны две различные точки A и B окружности радиуса R с центром в точке O. Равны ли векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$?

б) Точки M и N являются концами некоторого диаметра этой же окружности. Равны ли векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{NO}$?

№17. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{r}$. Выразить через векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{D'B'}$, $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{D'B}$, $\overrightarrow{DB'}$.

№18. Показать на чертеже и алгебраически, что для любых векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ а) $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})+(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) = 2\boldsymbol{q}$; б) $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = 2\boldsymbol{q}$; в) $\dfrac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{2}+\boldsymbol{q} = \dfrac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2}$.
Указание: использовать правило параллелограмма и сделать дополнительные построения.

№19. Упростить выражения:

а) $2(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+5(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c})$;

б) $\dfrac{2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}}{2}-\dfrac{5\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}}{3}+\dfrac{\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}}{4}$.

№20. Даны $|\boldsymbol{a}| = 13$, $|\boldsymbol{b}| = 19$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 24$. Найти $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

№21. Как должны быть расположены векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы модуль их суммы $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ был равен модулю их разности $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$?

№22. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = 45°$, $|\boldsymbol{a}| = 3$; $|\boldsymbol{b}| = 5$. Определить $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

№23. Представить следующие векторы в виде разложения по координатному базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ в пространстве и по базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ на плоскости:

а) $\boldsymbol{a} = \{1, -2,\ 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, -1,\ 2\}$, $\boldsymbol{c} = \{3,\ 0,\ 0\}$;

б) $\boldsymbol{a} = \{-3,\ 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, -1\}$, $\boldsymbol{c} = \{4,\ 0\}$.

№24. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$. Найти:

а) векторы $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{q} = 5\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$;

б) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, $|5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|$;

в) направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$.

№25. Три силы $\vec{M}$, $\vec{N}$ и $\vec{P}$, приложенные в одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\vec{Q}$, если известно, что $|\vec{M}| = 2H$, $|\vec{N}| = 10H$, $|\vec{P}| = 11H$.

№26. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = \{2,\ 4, -6\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{-1, -2,\ 3\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{4,\ 8, -12\}$, $\boldsymbol{a}_4 = \{6,\ 0,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_5 = \{0, -5,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_6 = \{0,\ 0,\ 2\}$, $\boldsymbol{a}_7 = \{0,\ 1,\ 3\}$, $\boldsymbol{a}_8 = \{2,\ 0, -1\}$, $\boldsymbol{a}_9 = \{3, -4,\ 0\}$. Какие из этих векторов коллинеарны (и как направлены: в одну или в противоположные стороны); параллельны координатным осям; параллельны координатным плоскостям?

№27. Установить линейную зависимость (независимость) следующих векторов:

а) $\boldsymbol{a} = \{1, -2,\ 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{0,\ 3,\ 4\}$, $\boldsymbol{c} = \{1, -5, -1\}$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{k}$;

в) $\boldsymbol{a}_2 = \{1,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{0,\ 3\}$, $\boldsymbol{c}_2 = \{-2, -4\}$;

г) $\boldsymbol{a}_3 = \{1, -2,\ 3\}$, $\boldsymbol{b}_3 = \{0,\ 2,\ 0\}$, $\boldsymbol{c}_3 = \{0, -4,\ 0\}$, $\boldsymbol{d}_3 = \{-5,\ 1,\ 3\}$.

№28. Даны три вектора $\boldsymbol{p} = \{3, -2,\ 1\}$, $\boldsymbol{q} = \{-1,\ 1, -2\}$, $\boldsymbol{r} = \{2,\ 1, -3\}$. Разложить вектор $\boldsymbol{c} = \{11, -6,\ 5\}$ по базису $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$.

№29. Даны три вектора $\boldsymbol{a} = \{3, -1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, -2\}$, $\boldsymbol{c} = \{-1, 7\}$. Определить разложение вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ по базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

№30. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = 20\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j} - 60\boldsymbol{k}$ и его направляющие косинусы.

№31. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{i} + (m+1)\boldsymbol{j} + m(m+1)\boldsymbol{k}$.

№32. Вычислить модуль вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \dfrac{4(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) + 3\boldsymbol{k}}{5}$ и найти его направляющие косинусы.

№33. Даны вершины $A(2, 2, 2)$, $B(6, 5, 0)$, $C(0, 3, 8)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

№34. Проверить, что четыре точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ служат вершинами трапеции.

№35. Отрезок AB, где $A(3, -5, 2)$, $B(5, -3, 1)$ точками C и D разделен на три равные части. Найти координаты точек C и D.

§2.5. Умножение векторов

I. Умножение двух векторов

Существует два различных способа умножения двух векторов: скалярное произведение и векторное. Результатом скалярного произведения является число, результатом векторного – вектор.

Определение. ***Скалярным произведением*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Обозначается $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\quad (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}),\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi, \tag{18}$$

где $\varphi=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Свойства скалярного произведения

① $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$.

② $(\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$.

③ $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})$.

④ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны,

в частности, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$, если хотя бы один векторов-сомножителей нулевой.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0}. \tag{19}$$

⑤ *Скалярный квадрат вектора*:

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2. \tag{20}$$

Замечание 4. Полезно обратить внимание на любопытное свойство квадрата вектора: $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2}=|\boldsymbol{a}|\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\boldsymbol{a}^2}\neq\boldsymbol{a},\quad\sqrt{\boldsymbol{a}^2}\neq-\boldsymbol{a}$.

Если заданы координаты векторов $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, то их скалярное произведение можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.} \tag{21}$$

В частности, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, откуда с учетом формулы (20) получается формула (11) для вычисления модуля вектора.

Замечание 5. Формула (21) верна только в прямоугольной декартовой системе координат. Если базисные векторы не являются единичными и взаимно перпендикулярными, запись скалярного произведения векторов через их координаты будет выглядеть иначе.

Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно найти при помощи формулы (18), вычислив их модули и скалярное произведение по формулам (11) и (21):

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \tag{22}$$

Проекция вектора на ось

С понятием скалярного произведения связано понятие ортогональной проекции вектора. Различают векторную и скалярную проекцию вектора на вектор или на ось вектора.

Пусть дан вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ и прямая l (рис. 27). Опустим перпендикуляры из точек A и B на эту прямую. Получим точки A' и B'. Вектор $\overrightarrow{A'B'}$ есть векторная ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую или на вектор $\boldsymbol{e}$, направленный вдоль этой прямой. Обозначается $\boldsymbol{Пр_e a}$ или $\overrightarrow{Пр_e \boldsymbol{a}}$.

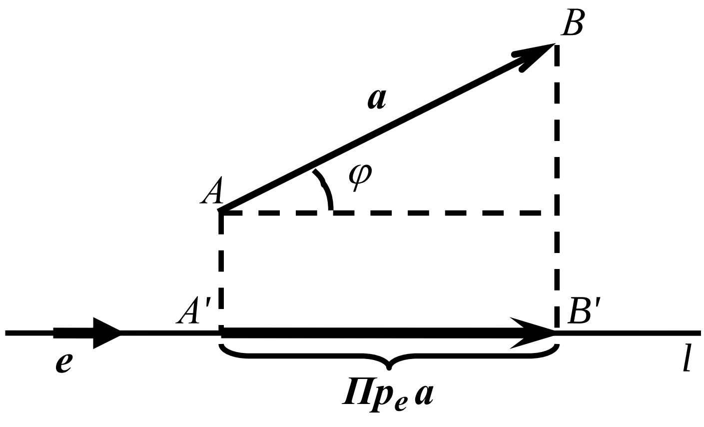


Рис. 27.

Скалярной проекцией вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось вектора $\boldsymbol{e}$ является длина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятая со знаком плюс, если его направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{e}$, и со знаком минус в противном случае. Обозначается $Пр_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$. Из рис. 27 видно, что

$$Пр_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi, \tag{23}$$

где φ – угол наклона вектора $\boldsymbol{a}$ к оси вектора $\boldsymbol{e}$.

Если $\boldsymbol{a} \,||\, \boldsymbol{e}$, то, очевидно, $Пр_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} = \pm|\boldsymbol{a}|$ и $\boldsymbol{Пр_{e}a} = \boldsymbol{a}$; если $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{e}$, то $Пр_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{Пр_{e}a} = \boldsymbol{0}$. В остальных случаях из формулы (23) получаем

$$Пр_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})}{|\boldsymbol{e}|} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{Пр_{e}a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})}{|\boldsymbol{e}|^2} \cdot \boldsymbol{e}. \tag{24}$$

Простейшим примером скалярной проекции вектора на ось являются координаты вектора в базисе; они не случайно называются проекциями на координатные оси, т.к. по построению полностью удовлетворяют определению этого понятия.

Ниже будет использоваться понятие ориентированной тройки векторов.

Определение. Три вектора образуют ***тройку***, если указано, какой из них считается первым, какой – вторым и какой – третьим.

Определение. ***Тройка векторов*** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется ***правой***, если из конца вектора $\boldsymbol{c}$ кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и ***левой*** – если по часовой стрелке (см. рис. 28).

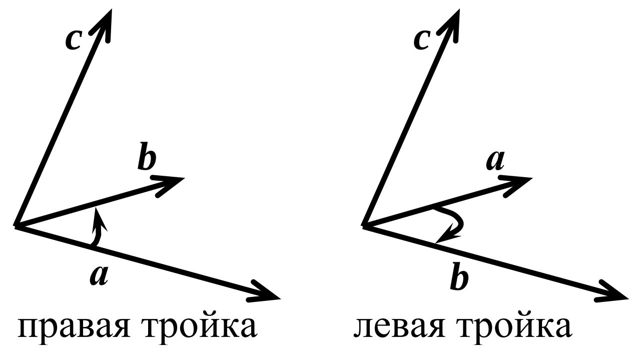


Рис. 28.

Замечание 6. Если орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ осей прямоугольной декартовой системы координат образуют правую тройку, то эта система координат называется правой, если $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – левая тройка, то и система координат – левая.

Определение. ***Векторным произведением*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) вектор } \boldsymbol{c} \text{ перпендикулярен каждому сомножителю} \\ \qquad \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}; \\ \text{2) вектор } \boldsymbol{c} \text{ имеет длину } \quad |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\varphi, \\ \qquad \text{где } \varphi = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) \text{ – угол между векторами } \boldsymbol{a} \text{ и } \boldsymbol{b}; \\ \text{3) тройка векторов } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ – правая.} \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Обозначается $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Геометрический смысл векторного произведения. Модуль векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ как на сторонах (рис. 29):

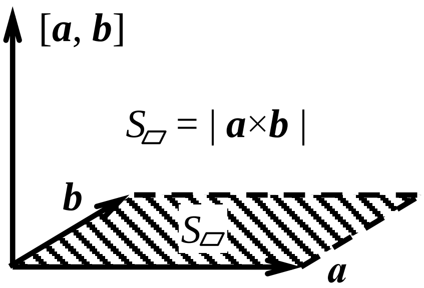


Рис. 29.

$$S_{\square} = |\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,|. \qquad (26)$$

Свойства векторного произведения

① Антикоммутативность: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

② Дистрибутивность: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

③ Ассоциативность: $[\lambda \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] = \lambda [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a} \times \lambda \boldsymbol{b}]$.

④ Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \vec{0}$, в том числе:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \vec{0}. \qquad (27)$$

Замечание 7. Обратите внимание: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a}^2$. (Почему?)

Если заданы координаты векторов $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ в декартовой прямоугольной системе координат, то координаты их векторного произведения находятся по формуле:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix},}\quad (28)$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – орты осей правой прямоугольной декартовой системы координат, а определитель разложен по первой строке (см. гл.1).

II. *Умножение трех векторов*

Для умножения трех векторов обычно рассматривают два наиболее распространенных способа: смешанное произведение и двойное векторное произведение. Результат смешанного произведения – число, результат двойного векторного – вектор.

Определение. ***Смешанным произведением*** трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется число, составленное следующим образом: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.
Обозначается $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\equiv(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Геометрический смысл смешанного произведения. Модуль смешанного произведения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах (рис. 30):

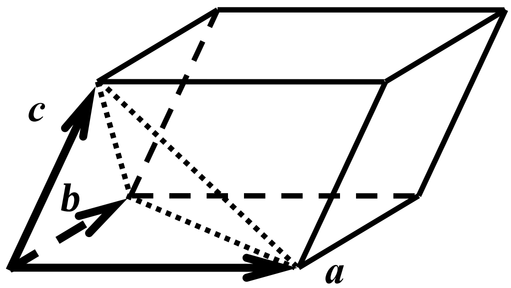


Рис. 30.

$$V_{пар-да}=|\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\,|. \quad (29)$$

И, как следствие, объем пирамиды, образованной теми же векторами (рис.30),

$$V_{пир}=\frac{1}{6}V_{пар-да}=\frac{1}{6}|\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\,|. \quad (30)$$

Свойства смешанного произведения

① $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

② $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ (циклические перестановки).

③ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$ (два вектора меняются местами).

④ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны,

в частности, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$, если хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор или два из векторов-сомножителей коллинеарны;

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$\boxed{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \quad \text{компланарны.}} \tag{31}$$

Если заданы координаты векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ и $\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ в декартовой прямоугольной системе координат, то их смешанное произведение можно вычислить по формуле:

$$\boxed{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.} \tag{32}$$

Знак смешанного произведения векторов связан с их ориентацией:

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – правая тройка,

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – левая тройка.

Определение. ***Двойное векторное произведение*** трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – это вектор, получаемый следующим образом: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

Двойное векторное произведение может быть записано в виде формул

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}); \qquad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

и раскрывается по правилу: *средний вектор на скалярное произведение оставшихся минус крайний вектор в скобке на скалярное произведение оставшихся.*

ПРИМЕР 2.5.1. Что выражают собой представленные ниже произведения: число или вектор? (Скобки указывают обычную в элементарной алгебре последовательность действий).

а) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$; б) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$; в) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\cdot\gamma))$, где γ – число;

г) $((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}$; д) $(((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{m}$.

Решение. Из приведенных выше определений следует, что

1) произведение числа на вектор или вектора на число есть вектор;

2) скалярное произведение двух векторов есть число;

3) векторное произведение двух векторов есть вектор;

4) смешанное произведение трех векторов есть число;

5) двойное векторное произведение трех векторов есть вектор.

Эти высказывания и будут использованы ниже.

а) Скалярное произведение $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ есть число; обозначим его α: $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\alpha$, тогда $\boldsymbol{a}\cdot\alpha$ есть вектор, т.е. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ – вектор.

б) Аналогично $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\alpha$ – число, $\alpha\cdot\boldsymbol{c}$ – вектор, значит, $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ – вектор.

в) $\boldsymbol{c}\cdot\gamma=\boldsymbol{p}$ – вектор, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$ – вектор, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}$ – число, т.е. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\cdot\gamma))$ – число.

г) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$ – вектор, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}=\alpha$ – число, $\alpha\cdot\boldsymbol{d}$ – вектор, т.е. $((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}$ – вектор.

д) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\alpha$ – число, $\alpha\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}$ – вектор, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}=\beta$ – число, $\beta\cdot\boldsymbol{m}$ – вектор, следовательно, $(((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{m}$ – вектор. ■

ПРИМЕР 2.5.2. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{-1,\ 0,-3\}$, $\boldsymbol{b}=\{4,-3,\ 2\}$, $\boldsymbol{c}=\{0,-1,\ 0\}$. Найти:

а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$; б) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$; в) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$;

г) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$, $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$; д) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$.

Решение. а) По формуле (21) находим скалярное произведение

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1\cdot4+0\cdot(-3)+(-3)\cdot2=-10;$$

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|-10|=10$ по определению модуля отрицательного числа.

б) Чтобы найти векторное произведение, используем сначала формулу (28) и затем правило вычисления определителя второго порядка (формула (1) главы 1):

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&0&-3\\4&-3&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}0&-3\\-3&2\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}-1&-3\\4&2\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}-1&0\\4&-3\end{vmatrix}=-9\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

Модуль полученного вектора найдем по формуле (11):

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-9)^2+(-10)^2+3^2}=\sqrt{190}\,.$$

в) Смешанное произведение находим по формуле (32), при этом определитель вычисляем при помощи разложения по третьей строке:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}-1&0&-3\\4&-3&2\\0&-1&0\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}-1&-3\\4&2\end{vmatrix}=10;\qquad |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|=10.$$

г) Воспользовавшись уже найденным в б) векторным произведением $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, получаем:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-9&-10&3\\0&-1&0\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{k}\\-9&3\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{k}$$

(здесь определитель третьего порядка разложен по третьей строке, как в в)).

$$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}\,.$$

д) Сначала найдем векторное произведение

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-3&2\\0&-1&0\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{k}\\4&2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}\,.$$

Затем $$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&0&-3\\2&0&-4\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}-1&-3\\2&-4\end{vmatrix}=-10\boldsymbol{j}$$

(здесь определитель вычислен путем разложения по второму столбцу).

$$|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})| = |-10\boldsymbol{j}| = |-10|\cdot|\boldsymbol{j}| = 10.$$

Совпадение значений $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$, $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ и $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ случайно.

NB! $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$, как видно из решения г) и д). ■

ПРИМЕР 2.5.3. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \{-1,\ 0, -3\}$, $\boldsymbol{b} = \{4, -3,\ 2\}$, $\boldsymbol{c} = \{0, -1,\ 0\}$. Найти: а) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$; б) $\boldsymbol{c}\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$; в) $(\boldsymbol{c},(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a})$.

Решение. Чтобы найти требуемые произведения, определим предварительно координаты вектора $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:

$$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = 2\cdot\{-1,\ 0, -3\} - \{4, -3,\ 2\} = \{-6,\ 3, -8\}.$$

а) Скалярное произведение находим по формуле (21):

$$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = -6\cdot 0 + 3\cdot(-1) + (-8)\cdot 0 = -3.$$

б) Векторное произведение находим по формуле (28):

$$\boldsymbol{c}\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}.$$

(Определитель третьего порядка был разложен по второй строке).

в) Смешанное произведение находим по формуле (32), при этом определитель вычисляем при помощи разложения по первой строке:

$$(\boldsymbol{c},(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -6 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 10. \ ■$$

ПРИМЕР 2.5.4. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \{-1,\ 0, -3\}$, $\boldsymbol{b} = \{4, -3,\ 2\}$, $\boldsymbol{c} = \{0, -1,\ 0\}$. Найти: а) $Пр_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; б) $\boldsymbol{Пр_{c}}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$; в) $Пр_{\boldsymbol{c}}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

Решение. Данные в этом примере векторы имеют те же координаты, что и векторы в примерах 2.5.2 и 2.5.3. Поэтому в процессе решения будут использованы полученные там результаты.

а) Требуемую скалярную проекцию находим по первой из формул (24):

$$Пр_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-10}{\sqrt{16+9+4}}=-\frac{10}{\sqrt{29}},$$

скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ было найдено в примере 2.5.2а).

б) Векторную проекцию находим по второй из формул (24):

$$\boldsymbol{Пр_c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|^2}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|^2}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{10}{0+1+0}\cdot\boldsymbol{c}=10\,\boldsymbol{c}=\{0,-10,\ 0\}.$$

Было использовано определение смешанного произведения векторов и результат его вычисления в примере 2.5.2в). Но можно было взять и результат примера 2.5.2б) для векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а затем перемножить его скалярно с вектором **c**.

в) Координаты вектора $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ были найдены в примере 2.5.3. По первой формуле (24) имеем:

$$Пр_{\boldsymbol{c}}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{-6\cdot 0+3\cdot(-1)+(-8)\cdot 0}{1}=-3.\ ■$$

ПРИМЕР 2.5.5. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{-1,\ 0,-3\}$, $\boldsymbol{b}=\{4,-3,\ 2\}$, $\boldsymbol{c}=\{0,-1,\ 0\}$.

а) Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

б) Проверить, коллинеарны ли векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

в) Проверить, перпендикулярны ли векторы: 1) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$; 2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. В случае отрицательного ответа найти угол между указанными векторами.

г) Проверить, компланарны ли векторы: 1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$; 2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. В случае отрицательного ответа указать, какую тройку они образуют: левую или правую.

Решение. а) Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ было найдено в примере 2.5.2а). Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ находим по формуле (22):

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-10}{\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{16+9+4}}=-\frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}}=-\sqrt{\frac{10}{29}}.$$

Требуемый угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $\qquad \varphi = \arccos\left(-\sqrt{\frac{10}{29}}\right).$

б) Коллинеарность векторов $\boldsymbol{c} = \{0, -1,\ 0\}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \{-9, -10,\ 3\}$ (вычислен в примере 2.5.2б)) проверяем по формуле (8):

$$\frac{0}{-9} \neq \frac{-1}{-10}\text{, значит, векторы } \boldsymbol{c} \text{ и } \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \text{ не коллинеарны.}$$

в) Условие перпендикулярности векторов дается формулой (19).

1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = -1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$;

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 10 \neq 0 \quad \Rightarrow$ векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не перпендикулярны. ($(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ найдено в примере 2.5.2в)).

Угол между векторами $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ находим по формуле (22), используя результаты примеров 2.5.2в) и 2.5.2б):

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|} = \frac{10}{\sqrt{190}\cdot 1} = \sqrt{\frac{10}{19}}, \qquad \varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{10}{19}}\right).$$

г) Условие компланарности векторов дается формулой (31).

1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 10 \neq 0 \quad \Rightarrow$ векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны и образуют правую тройку, т.к. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) > 0$.

2) Обозначим вектор $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ буквой $\boldsymbol{m}$. Чтобы проверить компланарность векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{m}$ по формуле (31), вычислим их смешанное произведение (координаты векторов $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{m}$ уже найдены в примерах 2.5.2б) и 2.5.2г)):

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -9 & -10 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, данные векторы компланарны. (Определитель третьего порядка был вычислен при помощи разложения по второму столбцу). ■

ПРИМЕР 2.5.6. Даны точки $A(-1,\ 0,\ 3)$, $B(0,\ 0,-2)$, $C(4,\ 3,\ 2)$, $D(0,\ 1,-2)$.

а) Лежат ли они в одной плоскости?

б) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

в) Найти площадь треугольника ABC, высоту h_B этого треугольника, проведенную из вершины B, и внешний угол при вершине A.

Решение. а) Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны. Найдем координаты этих векторов по формулам (10): $\overrightarrow{AB}=\{1,\ 0,-5\}$, $\overrightarrow{AC}=\{5,\ 3,-1\}$, $\overrightarrow{AD}=\{1,\ 1,-5\}$. Вычислим их смешанное произведение (определитель найдем по правилу треугольников):

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -5\end{vmatrix}=-15-25+0+15+1+0=-24\neq 0,$$

значит, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не компланарны, следовательно, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

б) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, есть модуль их векторного произведения (см. геометрический смысл векторного произведения и формулу (26)). Т.к.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -5\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}0 & -5\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 5 & -1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\end{vmatrix}=15\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

то $$S_{\square}=|15\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}|=\sqrt{225+576+9}=\sqrt{810}=9\sqrt{10}.$$

в) Площадь треугольника ABC (рис. 31) равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найденной в б). Таким образом,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{9}{2}\sqrt{10}.$$

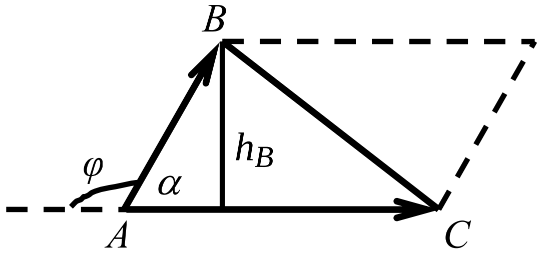


Рис. 31.

Чтобы найти высоту треугольника ABC, используем формулу для его площади: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot h_B$.

Имея координаты вектора $\overrightarrow{AC} = \{5,\ 3, -1\}$, вычисляем его модуль $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$. Теперь можно найти требуемую высоту:

$$h_B = \frac{2S_{ABC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{9\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = 9\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Внешний угол φ при вершине A может быть найден как $\varphi = 180° - \alpha$, где α – внутренний угол треугольника ABC при вершине A (рис.31). Последний можно найти как угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле (22):

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1)}{\sqrt{1+0+25} \cdot \sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{35}}.$$

Тогда $\qquad \varphi = 180° - \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{35}}\right).$ ■

ПРИМЕР 2.5.7. В условиях примера 2.5.6 найти:

а) объем параллелепипеда $V_{пар-да}$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и его высоту H_D, проведенную из вершины D;

б) объем пирамиды $ABCD$ ($V_{пир}$).

Решение. а) Т.к. точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости (что установлено в примере 2.5.6а)), то на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ как на сторонах может быть построен параллелепипед. Объем параллелепипеда находим по формуле (29), используя значение смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, найденного в примере 2.5.6а): $\quad \left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = |-24| = 24.$

Для определения высоты H_D воспользуемся формулой геометрии $V_{пар-да} = S_{\square} \cdot H_D$, где $S_{\square}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (она вычислена в примере 2.5.6б)). Таким образом,

$$H_D = \frac{V_{пар-да}}{S_{\square}} = \frac{24}{9\sqrt{10}}.$$

б) Объем пирамиды $ABCD$ найдем по формуле (30):

$$V_{пир} = \frac{1}{6} V_{пар-да} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.5.8. Проверить верность равенств:

а) $\boldsymbol{i}^2 = 1$; б) $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$; в) $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$; г) $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$; д) $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \vec{0}$,

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – орты правой прямоугольной декартовой системы координат.

Решение. По определению ортов прямоугольной декартовой системы координат $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$, $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{k}$.

а) По формуле (20) $\boldsymbol{i}^2 = |\boldsymbol{i}|^2 = 1$.

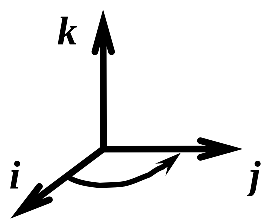
б) По условию (19) $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$ в силу взаимной перпендикулярности ортов.

в) Пусть $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{a}$, тогда по определению векторного произведения (25) имеем:

1) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{j}$;

2) $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{i}| \cdot |\boldsymbol{j}| \cdot \sin 90° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;

3) тройка $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{a}$ – правая.



Условиям 1), 2), 3) удовлетворяет вектор $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}$ (рис.32).

Рис. 32.

г) При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак (свойство ① векторного произведения). Тогда, используя результат в), получим

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{k}.$$

д) Т.к. вектор $\boldsymbol{i}$ коллинеарен самому себе, то по условию (27) имеем $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \vec{0}$. $\blacksquare$

Ввиду важности равенств, рассмотренных в примере 2.5.8, выпишем их отдельно наряду с аналогичными им равенствами:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1;\\
&2)\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0;\\
&3)\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\vec{0};\\
&4)\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j};\\
&\quad\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ПРИМЕР 2.5.9. Раскрыть скобки в следующих выражениях:

а) $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}$; б) $(\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{i})\times(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})$; в) $(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i})$; г) $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\cdot(5\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})$, где $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ – орты правой прямоугольной декартовой системы координат.

Решение. а) По свойствам ② и ③ скалярного произведения и формулам 1), 2) из группы формул (33) имеем:

$$(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})-3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})=0+0-3\cdot1=-3.$$

б) По свойствам ② и ③ векторного произведения и формулам 3), 4) из группы формул (33) имеем:

$$(\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{i})\times(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}-2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}+\vec{0}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

в) $(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i})=0$, т.к. $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$.

г) $$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\cdot(5\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})=\boldsymbol{k}\cdot(5\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})=5\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=$$
$$=5\cdot1-0+3\cdot0=5.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.5.10. Дано $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $\varphi=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2\pi/3$. Вычислить следующие выражения, предварительно раскрыв скобки там, где это необходимо:

а) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$; б) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$; в) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$; г) $|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$.

Решение. а) Используя свойства ①-③ скалярного произведения, получаем:

$$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{a}\cdot 2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot 2\boldsymbol{b}=$$

$$=3\boldsymbol{a}^2-2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})+6(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})-4\boldsymbol{b}^2=3|\boldsymbol{a}|^2+4(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})-4|\boldsymbol{b}|^2=$$

$$=3|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi-4|\boldsymbol{b}|^2=$$

$$=3\cdot 9+4\cdot 3\cdot 4\cdot\cos(2\pi/3)-4\cdot 16=$$

$$=27+48\cdot(-1/2)-64=-61,$$

где использована формула (20) и определение скалярного произведения.

б) Аналогично имеем:

$$\underline{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\underline{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi+|\boldsymbol{b}|^2=9-2\cdot 3\cdot 4\cdot(-1/2)+16=37.$$

в) Вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ коллинеарен самому себе, поэтому по формуле (27)

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\vec{0}.$$

Полученный результат может быть найден и при помощи определения и свойств ①-④ векторного умножения:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\vec{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\vec{0}=\vec{0}.$$

г) Раскрывая скобки и учитывая свойства векторного произведения, получим:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\vec{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\vec{0}=-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Тогда модуль

$$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=|-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\sin\varphi=$$

$$=2\cdot 4\cdot 3\cdot\sin(2\pi/3)=24\cdot\sqrt{3}/2=12\sqrt{3}.\ \blacksquare$$

Замечание 8. Формулы сокращенного умножения из алгебры, например, $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ или $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, установленные для чисел (скаляров), оказываются <u>верными</u> и для векторов в случае <u>скалярного умножения</u> (см. подчеркнутые выражения в решении примера 2.5.10б)). В случае же векторного умножения ни одна из упомянутых формул не верна (см. решение примера 2.5.10 в),г)).

ПРИМЕР 2.5.11. Какому условию должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, чтобы вектор $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ был: а) перпендикулярен вектору $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$; б) коллинеарен вектору $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$?

Решение. а) Векторы $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ есть (согласно правилу параллелограмма сложения и вычитания векторов) диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ с указанными на рис. 33 направлениями.

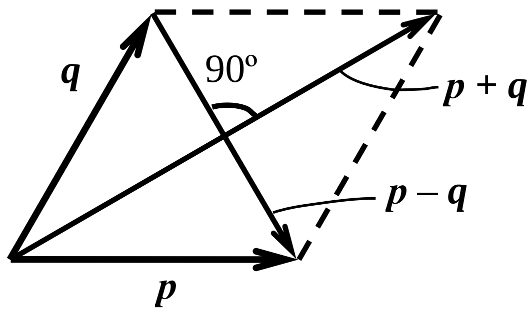


Рис. 33.

Пусть $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$. Тогда по условию (19) $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=0$. Раскрывая скобки в последнем равенстве с учетом Замечания 8, получим:

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{q}^2=|\boldsymbol{p}|^2-|\boldsymbol{q}|^2=0 \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{q}|.$$

Из элементарной геометрии известно, что параллелограмм, у которого все стороны равны, есть ромб.

Верно и обратное утвреждение: если $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{q}|$, то векторы $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ перпендикулярны. Действительно, при условии $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{q}|$ изображенный на рис.33 параллелограмм является ромбом, а в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны (теорема элементарной геометрии), следовательно, векторы $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ перпендикулярны.

б) Если векторы $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ коллинеарны, то их векторное произведение есть нуль-вектор по свойству ④ векторного произведения: $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=\vec{0}$.

Раскрывая скобки в последнем равенстве и используя свойства векторного произведения, получим:

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}=\vec{0},$$

откуда следует, что векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны.

Верно и обратное утверждение: если векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны, то векторы $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$ тоже коллинеарны (докажите самостоятельно!). ■

ПРИМЕР 2.5.12. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{a}\times(3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$ коллинеарны.

Решение. Используя свойства ②, ③ векторного произведения, раскроем скобки во втором векторном произведении:

$$2\boldsymbol{a}\times(3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-10(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-10(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\quad \text{т.к.}\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\vec{0}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $-10(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ коллинеарны по определению умножения вектора на число. ■

ПРИМЕР 2.5.13. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\vec{0}. \qquad (*)$$

Доказать, что эти векторы компланарны.

Решение. Умножим скалярно равенство (*) на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\vec{0}.$$

Раскрывая скобки по свойству ② скалярного произведения и учитывая, что $\boldsymbol{a}\cdot\vec{0}=0$, а также $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ и $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=0$ (по свойству ④ смешанного произведения), получим:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0.$$

Равенство нулю смешанного произведения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и означает их компланарность по условию (31), что и требовалось доказать. ■

ПРИМЕР 2.5.14. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}=\{2,-1,-4\}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1,-2,\ 3)$ в положение $N(5,-6,\ 1)$.

Решение. При прямолинейном движении работу A силы $\vec{F}$ можно найти по формуле

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S},$$

где $\vec{S}$ - вектор перемещения.

Находим вектор $\vec{S}=\overrightarrow{MN}=\{5-1,-6-(-2),\ 1-3\}=\{4,-4,-2\}$.

По формуле (21) находим скалярное произведение:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=2\cdot 4+(-1)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-2)=20\ (\text{ед. энергии}).\ ■$$

ПРИМЕР 2.5.15. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1,\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=30°$.

Решение. Используя свойства ①-③ векторного произведения, находим

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times 3\boldsymbol{a})+(3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})=$$
$$=\vec{0}+9(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+\vec{0}=8(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}),$$

т.к. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\vec{0},\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

Тогда площадь параллелограмма по формуле (26)

$$S=|(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=8|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=8|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=$$
$$=8\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30°=8\cdot 1/2=4.\ ■$$

ПРИМЕР 2.5.16. Вычислить $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$.

Решение. Т.к. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\vec{0}$, то векторы $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ линейно зависимы и, следовательно, компланарны по теореме о линейной зависимости систем векторов (пункт 2). А по условию (31) смешанное произведение компланарных векторов равно нулю. ■

ПРИМЕР 2.5.17. При каких условиях на α,β векторы

а) $\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}$ перпендикулярны, если $|\boldsymbol{a}|=1,\quad |\boldsymbol{b}|=2$;

б) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$ коллинеарны;

в) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{k}$ компланарны;

г) $\boldsymbol{a}=\beta\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\alpha\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ коллинеарны.

Решение. а) Из условия (19) перпендикулярности векторов следует, что

$$(\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b})=0 \;\Rightarrow\; |\boldsymbol{a}|^2-\alpha^2|\boldsymbol{b}|^2=0 \;\Rightarrow\; \alpha^2=\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \alpha=\pm\frac{1}{2}.$$

б) Т.к. векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$ коллинеарны, то из условия (8) имеем: $\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{-2}=\frac{2}{\beta}$, откуда получаем два уравнения для определения α и β: $-\frac{\alpha}{2}=1$ и $\frac{2}{\beta}=1$. Решаем их относительно α и β: $\alpha=-2,\quad \beta=2$.

в) Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю (формула (31)):

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель по третьей строке, получим

$$-1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; -1\cdot(0+\alpha)=0 \;\Rightarrow\; \alpha=0.$$

г) По определению векторного произведения вектор $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ перпендикулярен обоим векторам-сомножителям, в частности, $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ и поэтому не может быть ему коллинеарен ни при каких α и β. ■

Задачи для самостоятельного решения

№36. Что выражают собой представленные ниже произведения: число или вектор?

а) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; б) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; в) $|(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))\cdot(\lambda\boldsymbol{c})|$, где λ – скаляр;

г) $\big((\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\big)\times\boldsymbol{c}$, λ – скаляр; д) $|\big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\big)\times\boldsymbol{a}|$;

е) $\boldsymbol{a}\times\big((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\big)$; ж) $\Big(\big((\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\big)\cdot(\lambda\boldsymbol{b})\Big)|\boldsymbol{a}|$, λ – скаляр.

№37. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{2,\ 0,\ 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{-1,\ -3,\ 2\}$, $\boldsymbol{c}=\{-6,\ 0,\ -3\}$, $\boldsymbol{d}=\{1,\ 2,\ -3\}$.

1) Найти: а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}$, $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}|$ и $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}|$;

б) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ и $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$, $|(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ и $|(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$;

в) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})$ и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

г) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{c}$;

д) углы $\varphi_1=(\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{d})$ и $\varphi_2=((2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,,\boldsymbol{c})$;

е) $\boldsymbol{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{d}$, $Пр_{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{Пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$.

2) Используя результат пункта 1), найти площадь параллелограмма ($S_{\square}$) и треугольника (S_{Δ}), построенных на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$.

3) Есть ли среди данных векторов коллинеарные, перпендикулярные?

4) Компланарны ли векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$?

5) Есть ли среди данных векторов некомпланарная тройка? В случае положительного ответа указать, какую тройку образуют эти векторы (правую или левую) и найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах.

№38. Какую тройку, правую или левую, образуют векторы:

а) $\boldsymbol{a}=\{1,\ 1,\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\ 1,\ 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,\ -2,\ 3\}$;
б) $\boldsymbol{a}=\{1,\ 2,\ -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,\ -2,\ 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{5,\ -2,\ -1\}$;
в) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$;
г) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$?

№39. Даны точки $A(0,-2,\ 5)$, $B(6,\ 6,\ 0)$, $C(3,-3,\ 6)$, $D(2,-1,\ 3)$.

а) Показать, что они не лежат в одной плоскости.

б) Найти площадь S_{Δ} треугольника ABD и длину его высоты h_B, проведенной из вершины B.

в) Найти объем V пирамиды $ABCD$ и длину ее высоты H_C, проведенной из вершины C.

№40. Показать, что точки $A(3,-4,\ 1)$, $B(2,-3,\ 7)$, $C(1,-4,\ 3)$, $D(4,-3,\ 5)$ лежат в одной плоскости.

№41. Дано: $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\varphi=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi/6$. Раскрыть скобки в следующих выражениях и вычислить их:

а) $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$; б) $|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$;

в) $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2$; г) $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

№42. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, вычислить:

а) $|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$; б) $|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$.

№43. Даны точки $A(2,-1,\ 2)$, $B(1,\ 2,-1)$, $C(3,\ 2,\ 1)$. Найти:

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$;

б) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\overrightarrow{CB}$ и $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}$;

в) $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BC}$; компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$?

№44. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5,\ 3,\ 4)$, $B(-1,-7,\ 5)$, $C(6,-5,-3)$, $D(2,\ 5,-4)$ есть квадрат.

№45. При каком значении λ векторы $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ перпендикулярны?

№46. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=10\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. Найти $\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, $\text{Пр}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}$, $\textbf{Пр}_{\boldsymbol{b}}(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c})$.

№47. Доказать, что вектор $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}$.

№48. Даны три силы $\vec{F}_1=\{2,-5,\ 1\}$, $\vec{F}_2=\{1,\ 2,-6\}$, $\vec{F}_3=\{-4,-3,\ 3\}$, приложенные в одной точке. Вычислить работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M(4,\ 2,-8)$ в точку $N(3,-2,-5)$.

№49. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=\{1,\ -2,\ \ 4\}$ и $\boldsymbol{b}=\{3,\ \ 1,\ -5\}$. Найти вектор **x**, зная, что он перпендикулярен оси Oy и удовлетворяет условиям: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=-3,\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=8$.

№50. Раскрыть скобки в произведениях $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$.

№51. Упростить выражения и вычислить:

а) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$ и $|(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})|$;

б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})$ и $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})|$,

если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2,\quad |\boldsymbol{c}|=3,\quad (\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b})=\pi/4,\quad (\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{c})=\pi/3,\quad \boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$.

№52. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\vec{0}$. Доказать, что $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

№53. Доказать, что $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\,\boldsymbol{b}^2$.

№54. Три силы $\vec{F}_1=\{2,\ 4,\ 6\}$, $\vec{F}_2=\{1,-2,\ 3\}$, $\vec{F}_3=\{1,\ 1,-7\}$ приложены в точке $A(3,-4,\ 8)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4,-2,\ 6)$.

Указание: если сила $\vec{F}$ приложена в точке M, то ее момент относительно точки N есть векторное произведение $\overrightarrow{NM}\times\vec{F}$.

№55. Доказать тождества:

а) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},(\boldsymbol{c}+\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, где α и β - произвольные числа;

б) $\big((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\big)=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

№56. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+(m+1)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{k}$ ни при каком значении m не будут компланарны.

№57. Векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ связаны соотношениями $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ коллинеарны.

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ РЕЙТИНГОВЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

Ниже приводятся примерные варианты тестов и контрольных работ, предлагаемых студентам разных специальностей РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина. Все варианты были любезно предоставлены лекторами потоков соответствующих факультетов. Баллы, которыми оценивается каждая рейтинговая работа, могут быть различными на разных потоках (они определяются лекторами потоков) и варьируются в пределах от 5 до 12 при максимальном семестровом рейтинге 60 баллов. В некоторых потоках тесты по векторной алгебре не проводятся отдельно, а включены в общую контрольную работу по аналитической геометрии.

Факультет геологии и геофизики нефти и газа

Вариант №1

1. Даны точки $A(-5,1,-3)$; $B(7,-1,5)$ и вектор $\boldsymbol{a}\{4,-4,-2\}$. Найти угол между векторами $3\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB}$.

2. Известно, что длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ равны 3 и 2, а угол между ними равен $\pi/3$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{c}$ и $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

3. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

4. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$, если известно, что он ортогонален векторам $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, его длина равна 57, а с осью Oz он образует тупой угол.

Вариант №2

1. При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}\{-3, 1\}$ и $\boldsymbol{b}\{2, \alpha\}$ коллинеарны?

2. При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}\{-2, \alpha, 1\}$ и $\boldsymbol{b}\{3, 4, 2\}$ перпендикулярны?

3. Чему равна третья координата вектора $[-2\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$, если $\boldsymbol{a}\{-2, 3, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -2, 8\}$?

4. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}\{2, 4, -6\}$, $\boldsymbol{b}\{3, -7, 6\}$.

5. При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}\{3, \alpha, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-5, \alpha, 1\}$, $\boldsymbol{c}\{4, 5, -1\}$ компланарны?

Вариант №3

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 120º. Определить длину вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$.

2. Даны вершины треугольника $A(-1, 2, 3)$; $B(5, -3, 4)$; $C(2, 1, 6)$. Разложить векторы, совпадающие с его сторонами, по основным ортам $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Можно ли решить задачу обратную данной?

3. Даны векторы $\boldsymbol{p}\{3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{q}\{-4, -2, -1\}$, $\boldsymbol{r}\{2, 1, 3\}$. Найти $Пр_{(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})}\boldsymbol{p}$.

4. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Найти $[[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}] \times \boldsymbol{a}]$.

5. Определить, какой является тройка векторов (правой, левой или компланарной), если $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}$. Если возможно, вычислить объем параллелепипеда, построенного на данных векторах.

6. Написать разложение вектора $\boldsymbol{r}\{1, -4, -3\}$ по базису, составленному из векторов $\boldsymbol{p}\{2, 1, 4\}$, $\boldsymbol{q}\{-3, 5, 1\}$, $\boldsymbol{a}\{2, -5, -4\}$. Составить систему уравнений для определения коэффициентов разложения.

Факультет разработки нефтяных и газовых месторождений

Вариант №1

1. Даны вершины треугольника $A(3,2,-3)$; $B(5,1,-1)$; $C(1,-2,1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

2. Найти координаты вектора $\boldsymbol{p}$, если он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{c}\{2,-3,1\}$ и $\boldsymbol{d}\{1,-2,3\}$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=10$.

3. Лежат ли точки $A(1,2,-13)$; $B(-2,1,4)$; $C(-1,1,0)$; $D(0,0,1)$ в одной плоскости?

Вариант №2

1. Лежат ли на одной прямой три точки $A(-9,2,2)$; $B(1,-3,6)$; $C(1,-2,4)$? Ответ поясните.

2. Даны два вектора $\boldsymbol{a}\{3,\lambda,-5\}$ и $\boldsymbol{b}\{6,4,-10\}$. Найти λ, при котором:

   1) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпердикулярны;

   2) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны.

3. Проверить компланарность векторов $\boldsymbol{a}\{-1,-1,-1\}$, $\boldsymbol{b}\{-2,-2,-3\}$, $\boldsymbol{c}\{2,2,1\}$.

4. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}\{2,1,-1\}$ и $\boldsymbol{b}\{-2,0,-2\}$.

Факультет проектирования, сооружения и эксплуатации систем трубопроводного транспорта

Вариант №1

1. Даны $A(-1,3,-7)$; $B(2,-1,5)$; $C(0,1,-5)$. Вычислить $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$.

2. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5,\quad (a\,,b)=\pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\quad 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

3. Определить, какой является тройка векторов (правой, левой или компланарной), если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

Вариант №2

1. $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$. При каком значении α векторы $\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

2. Найти единичный вектор, одновременно перпендикулярный вектору $\boldsymbol{a}\{3, 6, 8\}$ и оси Oy, и составляющий с осью Oz тупой угол.

3. При каком λ система векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{a}\{1, 3, \lambda\}$, $\boldsymbol{b}\{5, -1, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{-1, 5, 4\}$ будет линейно зависима? Найти разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Факультет инженерной механики

Вариант №1

1. Даны векторы $\boldsymbol{p}\{2, 1, 3\}$, $\boldsymbol{q}\{-4, -2, -1\}$, $\boldsymbol{r}\{-3, -4, -5\}$, $\boldsymbol{a}\{1, 3, 2\}$. Показать, что векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ линейно независимы. Разложить вектор $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1, 2, 2)$; $B(5, 0, 2)$; $C(3, 2, 1)$. Средствами векторной алгебры найти:

1) длину и направление вектора $\overrightarrow{AM}$, совпадающего с медианой треугольника;

2) угол между медианой AM и стороной AB;

3) площадь треугольника и длину его высоты AK;

4) проекцию вектора OA на направление вектора $\vec{S} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (O – начало координат);

5) объем тетраэдра $OABC$ и h_0 – высоту, опущенную из точки O на основание ABC.

Вариант №2

1. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(1, 3, 6); \quad A_2(2, 2, 1); \quad A_3(-1, 0, 1); \quad A_4(-4, 6, -3).$$

2. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, $|\,\boldsymbol{p}\,| = 1$, $|\,\boldsymbol{q}\,| = 2$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\,,\boldsymbol{q}}) = \pi/4$.

3. Найти проекцию $Пр_{\vec{B}}\vec{A}$, если $\vec{A} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $\vec{B} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, причем $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, $|\,\boldsymbol{p}\,| = 2$, $|\,\boldsymbol{q}\,| = 1$, $(\widehat{\boldsymbol{p}\,,\boldsymbol{q}}) = \pi/3$.

4. Найти разложение вектора $\boldsymbol{a}\{3, 3, -1\}$ по базису $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{p}\{3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{q}\{-1, 2, 1\}$, $\boldsymbol{r}\{-1, 0, 2\}$.

5. Найти векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, если заданы декартовы координаты начал и концов векторов: $A(5, 2, 0)$; $B(2, 5, 0)$; $C(4, 1, -1)$.

Вариант №3

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 5y - z = -3. \end{cases}$

2. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\pi/6$, причем $|\,\boldsymbol{a}\,| = \sqrt{3}$, $|\,\boldsymbol{b}\,| = 1$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, если $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

3. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \beta\boldsymbol{k}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}\{3, -1, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 2, 0\}$.

4. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

Факультет химической технологии и экологии

Вариант №1

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y+6z=-3, \\ 5x+2y+9z=7, \\ 3x-2y+5z=1. \end{cases}$

2. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, 3, -4\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{1, -2, 3\}$. Найти $Пр_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

3. Найти вектор $\boldsymbol{a}$, если он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{c}\{2, 3, -4\}$ и $\boldsymbol{d}\{-1, 2, 3\}$, $|\boldsymbol{a}|=4$ и он составляет с осью Oy острый угол.

4. Определить, какой является тройка векторов (правой, левой или компланарной), если $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

Вариант №2

1. Найти координаты единичного вектора $\boldsymbol{m}^{\circ}$, перпендикулярного оси Ox и вектору $\boldsymbol{b}\{-5, 3, -4\}$.

2. Найти значение параметра α, при котором векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$ компланарны.

3. Вычислить косинус угла между диагоналями параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(3, 5, 7)$; $B(7, 4, -2)$; $C(-1, -1, -5)$.

Факультет автоматики и вычислительной техники

Вариант №1

1. Найти разложение вектора $\boldsymbol{a}\{2, 7, 0\}$ по базису из векторов $\boldsymbol{p}\{2, 3, 1\}$, $\boldsymbol{q}\{-1, 2, -2\}$, $\boldsymbol{r}\{1, 2, 1\}$. Коэффициенты разложения найти методом Жордана-Гаусса.

2. Даны вершины треугольника $A(3, 2, -3)$; $B(5, 1, -1)$; $C(1, -2, 1)$. Найти разложение векторов, совпадающих с его сторонами, по ортам декартовой

прямоугольной системы координат. Определить площадь этого треугольника, внутренний угол при вершине A и длину медианы BN.

3. Определить, какой является тройка векторов (правой, левой или компланарной), если $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$. Если это возможно, найти объем параллелепипеда, построенного на данных векторах.

4. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Найти $[[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}] \times \boldsymbol{a}]$.

5. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(2, -2, 3)$; $B(1, -1, 2)$; $C(4, -4, 5)$.

6. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Найти проекцию вектора $3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ на ось вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант №2

1. При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}\{-2, 5\}$ и $\boldsymbol{b}\{3, \alpha\}$ коллинеарны?

2. При каком значении α векторы $\boldsymbol{a}\{3, 1, \alpha\}$ и $\boldsymbol{b}\{2, 4, 3\}$ перпендикулярны?

3. $\boldsymbol{a}\{1, 2, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{c}\{0, -1, 2\}$. Найти $Пр_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

4. Образуют ли базис векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ из задачи №3?

5. Найти углы между осями координат и радиус-вектором точки $M(-2, 3, 1)$.

Факультет экономики и управления

Вариант №1

1. Могут ли векторы $\boldsymbol{a}\{-2, 1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-2, -4, 4\}$, $\boldsymbol{c}\{4, 3, -2\}$ быть сторонами треугольника?

2. В разложении вектора $\boldsymbol{c} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}$ по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ могут ли оба коэффициента λ_1 и λ_2 или один из них равняться нулю?

3. Коллинеарны ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если коллинеарны векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

4. Изменится ли сумму компланарных векторов, если все слагаемые векторы будут повернуты в одном и том же направлении на один и тот же угол?

Вариант №2

1. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{-3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, -3, -1\}$, $\boldsymbol{c}\{-2, 1, -2\}$. Найти $Пр_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$.

2. Даны точки $A(-2, -3, -1)$; $B(1, -1, -2)$; $C(-2, 1, 0)$; $D(3, 1, -2)$. Найти

а) $S_{\Delta BCD}$; h_D;

б) V_{ABCD}; H_{ABD}.

3. Найти площадь треугольника, отсекаемого от координатного угла прямой $y=-5x-12$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. а) 11; б) $\cos(\alpha+\beta)$; в) 29; г) $(a+1)^3$. **2.** а) 0; б) $-2\sin\alpha$; в) 0.

3. а) 0 и 0; 2 и –2; б) 5 и 5; –3 и 3; 4 и –4; 2 и 2.

4. а) $\pm\pi/3+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$; б) $-\infty<x<+\infty$; в) $x_1=-10,\ x_2=2$; г) $-2<x<0$.

5. – 3. **6.** а) $\sin 2\alpha$; б) 0; в) 1800. **8.** а) $x=1,\quad y=-1$; б) $x=2,\quad y=0,\quad z=1$;

в) $x_1=-1,\quad x_2=-2,\ x_3=1$. **9.** а) $\overrightarrow{AB}=\{1,\ 5,-4\},\quad \overrightarrow{BA}=\{-1,-5,\ 4\}$; б) $\sqrt{42}$;

в) $\cos\alpha=-1/\sqrt{42},\quad \cos\beta=-5/\sqrt{42},\quad \cos\gamma=4/\sqrt{42}$; г) $C(-1,\ 7,\ 4)$;

д) $\overrightarrow{OA}=\{-1, 2, 3\}$, $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{14}$, $\cos\alpha=-1/\sqrt{14}$, $\cos\beta=2/\sqrt{14}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{14}$.

10. $\alpha=\arccos(2/3),\quad \beta=\pi-\arccos(1/3),\quad \gamma=\pi-\arccos(2/3)$.

11. а) 1) нет; 2) да; 3) да, например, вектор $\boldsymbol{i}$; 4) да; 5) нет; б) $\pi/2$.

12. а) $M_1(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$ и $M_2(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$; б) $M(-4,\ 4,\ 4\sqrt{2})$;

в) $\alpha_1=45°,\quad \alpha_2=135°$; г) $\vec{F}=\{3,\ 3,\ \pm 3\sqrt{2}\}$.

14. а) да; б) нет; в) да. **15.** а) $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}/2$; $\overrightarrow{BL}=(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})/2$; $\overrightarrow{CM}=-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}/2$.

16. а) нет; б) нет, да. **17.** $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; $\overrightarrow{AC'}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$; $\overrightarrow{D'B'}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$;

$\overrightarrow{B'C}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$; $\overrightarrow{D'B}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$; $\overrightarrow{DB'}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$.

19. а) $13\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; б) $-5\boldsymbol{a}/12+7\boldsymbol{c}/6$.

20. 22. *Указание*: использовать теорему геометрии: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

21. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. **22.** $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{34+15\sqrt{2}},\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{34-15\sqrt{2}}$. *Указание*: использовать теорему косинусов.

23. а) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}$; б) $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{i}$.

24. а) $\boldsymbol{c}=\{3,-1,-1\}$, $\boldsymbol{d}=\{-1,-3,\ 7\}$, $\boldsymbol{p}=\{7,-4,\ 1\}$, $\boldsymbol{q}=\{-3,-14,\ 31\}$;

б) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{11}$, $|5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|=\sqrt{1166}$;

в) $\cos\alpha=1/\sqrt{14}$, $\cos\beta=-2/\sqrt{14}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{14}$. **25.** а) 15 Н.

26. $\boldsymbol{a}_1\,||\,\boldsymbol{a}_2$, противоположно направлены, $\boldsymbol{a}_1\,||\,\boldsymbol{a}_3$, одинаково направлены, $\boldsymbol{a}_2\,||\,\boldsymbol{a}_3$, противоположно направлены; $\boldsymbol{a}_4\,||$ оси Ox, $\boldsymbol{a}_5\,||$ оси Oy, $\boldsymbol{a}_6\,||$ оси Oz, $\boldsymbol{a}_7\,||$ плоскости Oyz, $\boldsymbol{a}_8\,||$ плоскости Oxz, $\boldsymbol{a}_9\,||$ плоскости Oxy.

27. а) линейно зависимы: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; б) линейно независимы; в) линейно зависимы: $\boldsymbol{c}=0\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$; г) линейно зависимы. **28.** $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$.

29. $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. **30.** $|\boldsymbol{a}|=70$, $\cos\alpha=2/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=-6/7$.

31. $|\boldsymbol{a}|=m^2+m+1$. *Указание*: использовать формулу алгебры $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

32. $|\boldsymbol{a}|=3/5$, $\cos\alpha=1/3$, $\cos\beta=2/3$, $\cos\gamma=2/3$. **33.** $D(-4,\ 0,\ 10)$.

35. $C(\frac{11}{3},-\frac{13}{3},\ \frac{5}{3})$, $D(\frac{13}{3},-\frac{11}{3},\ \frac{4}{3})$.

36. а) Число; б) вектор; в) число; г) вектор; д) число; е) вектор; ж) число.

37. 1) а) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=-1$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}=\{-2,\ 7,\ 4\}$, $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}|=1$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}|=\sqrt{69}$;

б) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-30$, $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\{9,-15,-18\}$, $|(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=30$, $|(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|=3\sqrt{70}$; в) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})=11$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$;

г) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{c}=\{-21,-30,\ 42\}$; д) $\varphi_1=\arccos(-1/\sqrt{70})$, $\varphi_2=\arccos(-\sqrt{10/17})$; е) $\{-2/\sqrt{5},\ 0,\ 1/\sqrt{5}\}$, $-30/\sqrt{34}$, $\vec{0}$.

2) $S_{\square}=\sqrt{69}$, $S_{\triangle}=\sqrt{69}/2$. **3)** $\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. **4)** да. **5)** да, тройка $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$ правая, $V=11$; тройка $\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}$ левая, $V=33$.

38. а) левая; б) ни правая, ни левая, векторы компланарны; в) правая; г) левая.

39. б) $S_{\triangle}=7{,}5$ $h_B=5$; в) $V=7{,}5$; $H_C=3$.

41. а) $14-7\sqrt{3}$; б) 5; в) $8-4\sqrt{3}$; г) $\vec{0}$. **42.** а) 7; б) 24.

43. а) –8; $\{6,\ -4,\ -6\}$; б) –8; $\{-12,\ 8,\ 12\}$; в) 0, компланарны. **45.** 5.

46. $-4/3$, $26/\sqrt{10}$, $\{-136/3,\ -68/3,\ 136/3\}$. **48.** 19. **49.** $\boldsymbol{x}=\{1,\ 0,\ -1\}$.

50. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-28$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}+32\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}$. **51.** а) $-40+10\sqrt{2}$ и $22\sqrt{2}$; б) $-17+2\sqrt{2}$ и $9\sqrt{3}$. **54.** $|\overrightarrow{BA}\times\vec{F}|=15$, $\cos\alpha=-2/3$, $\cos\beta=2/3$, $\cos\gamma=1/3$.