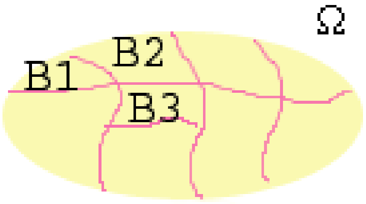
Формула полной вероятности

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ несовместные события, образующие полную группу, такие что $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$ (*)



Пусть имеется некоторое событие A.

Умножим обе части (*) на A

$A(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = A\Omega$

$AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n = A\Omega$

Тогда, поскольку, слагаемые в левой части – несовместные события, найдем по теореме сложения вероятностей для несовместных событий

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots. + P(AB_n)$$

По теореме умножения получаем

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \ldots. + P(B_n)P_{Bn}(A)$$

$$P(A) = P(B_1)P(A(B_1)) + \ldots + P(B_n)P(A(B_n))$$

Пример:

В группе из 30 спортсменов имеется 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятности сдать норму для них соответственно равны 0.9; 0.8; 0.75.

Из группы наудачу выбирается спортсмен. Какова вероятность, что он сдаст норму.

B_1 – выбран лыжник

B_2 – выбран велосипедист

B_3 – выбран бегун

A – выбранный спортсмен сдал норму

$$P(B_1) = \frac{20}{30}$$

$$P(A(B_1)) = 0.9$$

$$P(A(B_2)) = 0.8 \qquad P(B_2) = \frac{6}{30}$$

$$P(A(B_3)) = 0.75$$

$$P(B_3) = \frac{4}{30}$$

События B_1, B_2, B_3 несовместны и образуют полную группу.

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P(A(B_1)) + P(B_2)P(A(B_2)) + P(B_3)P(A(B_3)) = \frac{2}{3} * 0.9 + \frac{1}{5} * 0.8 + \frac{2}{15} * 0.75 = 0.86$$

Пример:

В первой урне 2 красных и 8 белых шаров. Во второй – 4 красных и 2 белых шара. Из первой переложили во вторую 1 шар. Затем из второй вынули 1 шар, какова вероятность, что он красный.

Шар, переложенный из первой урны во вторую, мог быть красным или белым.

B_1 – переложили красный шар

B_2 – переложили белый шар

События B_1 и B_2 несовместны и образуют полную группу.
A – вынут красный шар.

$P(B_1) = \frac{2}{10}$

$P(B_2) = \frac{8}{10}$

$P(A(B_1))$- вероятность вынуть из второй урны красный шар, если переложили тоже красный.

$P(A(B_1)) = \frac{5}{7}$

$P(A(B_2))$ - вероятность вынуть красный, при условии, что переложили белый.

$P(A(B_2)) = \frac{7}{7}$

$P(A) = P(B_1)P(A(B_1)) + P(B_2)P(A(B_2)) = \frac{2}{10} * \frac{5}{7} + \frac{8}{10} * \frac{4}{7} = \frac{3}{5}$

Формула Бейеса

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа несовместных событий.
A – некоторое событие, тогда по теореме умножения:

$P(AB_i) = P(B_i)P(A(B_i)) = P(A)P(B_i(A))$

$P(B_i(A)) = \frac{P(B_i)P(A(B_i))}{P(A)}$

$P(A) = P(B_1)P(A(B_1)) + \ldots + P(B_n)P(A(B_n))$

Пример:
Фермер нанял двух охотников застрелить волка, назначив премию 700 рубей.
Вероятность застрелить волка у одного охотника 0.8, у второго 0.4.
В результате охоты, волк был убит одной пулей. Как распределить премию между охотниками.

B_1 – первый попал, второй нет
B_2 – второй попал, первый нет
B_3 – оба попали
B_4 – промахнулись
A – одна пуля попала

$P(B_1) = 0.8 * 0.6 = 0.48$

$P(B_2) = 0.4 * 0.2 = 0.32$

$P(B_3) = 0.8 * 0.4 = 0.32$

$P(B_4) = 0.2 * 0.6 = 0.12$

проверка: 0.48 + 0.08 + 0.32 + 0.12 = 1

По формуле полной вероятности имеем:

$P(A) = P(B_1)P(A(B_1)) + P(B_2)P(A(B_2)) + P(B_3)P(A(B_3)) + P(B_4)P(A(B_4)) =$
$= 0.48 * 1 + 0.08 * 1 + 0 + 0 = 0.56$

$$P(B_1(A)) = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2(A)) = \frac{1}{7}$$

$$\frac{P(B_1(A))}{P(B_2(A))} = \frac{6}{1}$$

Следовательно, премию нужно разделить в отношении 6 к 1.

Испытание Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний в каждом из которых вероятность появления события A постоянна

$$P(A) = P$$

$$P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

тогда вероятность того, что в n испытаниях событие A произошло ровно k раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство:

Пусть A_i – событие, означающее, что в i – ом испытании Бернулли произошло A.

$$B = A_1 * A_2 \ldots . A_K * \overline{A}_{K+1} \ldots \ldots \overline{A}_n$$

событие A произошло в первых k испытаниях и не произошло в дальнейшем.

События независимые

$$P(B) = P(A_1) \ldots . P(A_k)(1 - p(A_{k+1})) \ldots . (1 - p(A_n)) = p^k (1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Какова вероятность, что событие A произошло в любых k испытаниях из n.

Всего способов выбора удачных испытаний (в которых событие A произошло) из n = C_n^k

Тогда искомая вероятность

$$P_k(k) = C_n^k p(B)$$

отсюда получаем формулу Бернулли.

Замечание:

В испытании Бернулли вероятность появления события A не более чем M раз может быть вычислена:

$$P = P_n(0) + P_n(1) \ldots . P_n(m)$$

Замечание:

Поскольку, появление события A в испытании Бернулли не менее 0 раз является достоверным событием, то имеет место:

$$P(\Omega) = 1 = P_n(0) + P_n(1) + \ldots . P_n(n)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 = (p+q)^n = 1^n$$

$(p+q)^n = 1^n$ - бином Ньютона

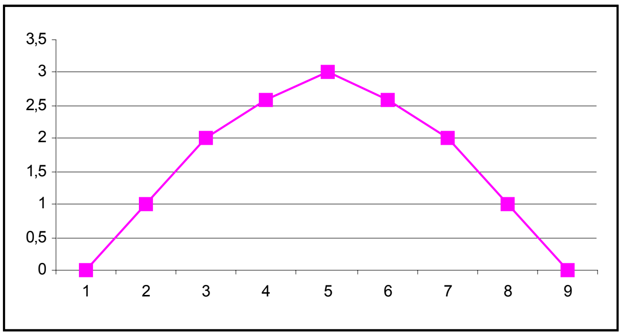
Геометрическая интерпретация

x – количество появлений A в n испытаниях

$P_k(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

x	0	1	2	…	n
p	q^n	$q^{npq^{n-1}}$			p^n

Такое распределение есть биномиальное



Наивероятнейшее число появлений событий A в n испытаниях Бернулли

$np - q \le m_0 \le np + q$

Пример:

P появления события в каждом испытании p= 0.8. Испытания проводятся 9 раз (n = 9) Каково наивероятнейшее появление события.

$0.8*9 - 0.2 \le m_0 \le 0.8*9 + 0.8$

$7 \le m_0 \le 8$

Ответ: 7 или 8 (для них вероятность одинакова).