Кафедра высшей математики

Лекции по теории вероятностей и математической статистике

Раздел 1.
Теория вероятностей

Предмет теории вероятностей – изучение специфических закономерностей в массовых однородных случайных явлениях.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает вопрос о том, сколько различных комбинаций, подчиненных определенным условиям можно составить из заданных объектов.

1. **перестановки.** Пусть имеется n различных предметов, которые могут быть взяты в различных порядках. Каждый способ выбора этих предметов называется **перестановкой**. Общее число перестановок из n предметов находится по формуле:
   $P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 1$
   $P_n = n!$
   Пример:
   Мама оставила Маше к чаю 3 конфеты: мишка, коровка, трюфель.
   Сколькими способами она может съесть конфеты:
   1. мкт
   2. мтк
   3. тмк
   4. ткм
   5. кмт
   6. ктм
2. **размещения.** Пусть имеется n различных предметов из которых выбирается группа из m предметов с учетом их порядка. Каждый способ выбора этих предметов называется **размещение**. Количество размещений из n предметов по m находится по формуле:
   $$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$
   Пример:
   В футбольном матче участвуют 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены медали.
   $A^3{}_{16} = 16 \times 15 \times 14$
   $$A^3{}_{16} = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{16 \times 15 \times \ldots \times 1}{13 \times 12 \times \ldots \times 1} = 16 \times 15 \times 14$$
3. **сочетание.** Пусть имеется n различных предметов из которых выбирается группа без учета порядка. Общее количество сочетаний находится по формуле:
   $$C^m{}_n = \frac{A^m{}_n}{P_m}$$
   $$C^m{}_n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример:
По результатам футбольного чемпионата 2 худшие команды выбывают во 2-ю лигу. Сколько существует способов перехода команд во 2 лигу, если общее количество команд 16.

n = 16
n = 2 без учета порядка

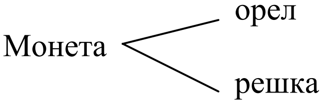
$$C^2_{16} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16!}{2!\times 14!} = \frac{16\times 15}{2} = 120$$

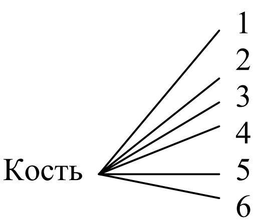
Пример:
Сколькими способами можно карточку спортлото «5 из 36».
При игре в спортлото необходимо выбрать 5 крестиков из 36 клеток. Порядок расстановки не важен. Общее количество возможностей:

$$C^5_{36} = \frac{36!}{5!\times 31!}$$

Основные понятия теории вероятностей

Опыт (испытание) - осуществление некоторого комплекта условий.
Пример:
Бросание монеты, кости.
Исход – результат опыта





Событие – любой факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.
Монета: 1. выпала решка
При бросании кости: 1. выпала 6
2. выпало четное количество
3. не выпало 5

Виды событий

1. **достоверное** – событие, которое обязательно происходит в результате опыта
2. **невозможное** – событие, которое не может произойти в результате опыта (при бросании кости не может выпасть 7)
3. **случайное** – событие, которое может произойти, а может и не произойти в результате опыта
4. **несовместные** – события, которые не могут произойти одновременно в результате одного опыта

Пространство элементарных событий

Элементарное событие – если в результате опыта может наступить одно и только одно из событий ω_i, то ω_i называются элементарными событиями.

1. кость: ω_1 - выпала 1
   ω_2 - выпала 2
   ω_6 - выпала 6
2. сдача экзамена
   ω_1 - 5
   ω_2 - 4
   ω_3 - 3
   ω_4 - НЕУД

Пространство элементарных событий – это множество всех элементарных событий, которые могут произойти в результате опыта.

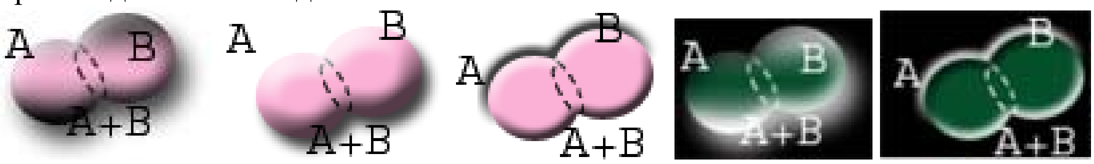
A< Ω

$\Omega = \{\omega_i\}$

Событие – это любое подмножество множества элементарных событий.
Замечание: достоверное событие совпадает с пространством элементарных событий.
Ø – невозможное событие.

Операции над событиями

1. **сумма событий**
   $C = A + B$
   суммой 2-х событий А и В называется такое событие С, которое происходит, если происходит хотя бы одно из событий А и В.



   при бросании игральной кости выпала А – 2 или 3 => А+В – 1,2 или 3; В – 1 или 2.
2. **произведение событий**
   $C = A \times B$
   произведением событий А и В называется такое событие С, когда происходят одновременно два события А и В.

   Пример:
   Событие А – четкое количество очков
   В – не более 3-х очков (≤ 3)
   $A \times B = 2$
   Замечание: если события А и В несовместны, то $A \times B = \text{Ø}$ - несовместное событие

Пример:
А – 5 по математике
В – студент не умеет складывать обыкновенные дроби
$A \times B = \varnothing$

3. **разность событий**
   $C = A - B$
   событие С называется разностью событий, если оно происходит когда происходит событие А, но не происходит В.

А – t <0
В – идет снег
А – В – холодно, но снега нет

4. **противоположное событие**
   $C = \overline{A}$
   событие С называется противоположным событию А, если оно происходит тогда, когда не происходит событие А (не А).

$C = \overline{A}$

Пример:
А – студент сдал экзамен по математике
$\overline{A}$ - НЕУД
$A + \overline{A} = \Omega$ - достоверное событие
$A + \overline{A} = \varnothing$ - невозможное событие

Вероятностью называется числовая функция, определенная на пространстве невозможных событий Ω и удовлетворяющая условиям:

1. А< Ω, $0 \le p(A) \le 1$
2. $p(\varnothing) = 0,\ \ p(\Omega) = 1$
3. если события А и В несовместны, то $p(A + B) = p(A) + p(B)$

Классическое определение вероятности

Пусть число элементарных событий, которые могут произойти в результате опыта конечно, все элементарные события равновозможные.
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
$p(\omega_1) = p(\omega_2) = ... = p(\omega_n)$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

$p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_2)$

имеем:

$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$

$1 = p(\Omega) = p(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n) = p(\omega_1) + \ldots + p(\omega_n) = n \times p(\omega_1)$

$p(\omega_1) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{n}$

Пусть событию А отвечает ровно m элементарных исходов из числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$

$p(A) = \dfrac{m}{n}$

Вероятность реализации события А равна отношению благоприятных для события А элементарных исходов к общему количеству элементарных исходов.

Пример:

1. В урне лежит 10 шаров, 3 белых и 7 черных. На удачу взят 1 шар, какова вероятность, что он белый.
   n = 10
   m = 3
   $p(A) = \dfrac{3}{10}$
2. На удачу выбирается 1 шар и не глядя выкидывается, после чего берется еще 1 шар, какова вероятность, что 2-й шар белый.
   $p(A) = \dfrac{3}{10}$
3. Первый вынутый шар – белый, его выбросили. Какова вероятность, что второй шар белый.
   n = 9
   m = 2
   $p(A) = \dfrac{2}{9}$
4. В урне 3 белых кубика и 7 черных шаров. Вынимается 1 предмет, какова вероятность, что он белый.
   Задача не корректна.
5. 3 белых и 7 черных шаров. По очереди выбирают шары, найти вероятность, что последний шар белый.
   $p(A) = \dfrac{3}{10}$
6. В урне лежит 10 шаров, 3 белых и 7 черных. На удачу берут 2 шара, какова вероятность, что они оба белые.
   $p(A) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{9}{9} = \dfrac{1}{15}$

Задача о выборе отмеченных предметов

Пусть имеется N предметов, n отмеченных. На удачу взяли m предметов, какова вероятность, что среди них к – отмеченных.

Решение:

Воспользуемся классическим определением вероятности.

$C_N^{\ m}$ - способов выбора

Подсчитаем количество способов выбора отмеченных предметов $C_n^{\ k}$.

N – n неотмеченные предметы
m – k выбр. неотмеч.
$C_{N-n}^{\ m-k}$ - выбор неотмеч.

Тогда общее количество благоприятных способов: $C_{N-n}^{\ m-k}$; $C_n^{\ k}$

$$p = \frac{C_n^{\ k} * C_{N-n}^{\ m-k}}{C_n^{\ m}}$$

Ограниченность классического определения вероятности

1. классическое определение вероятности не применимо в случае бесконечного числа элементарных исходов
2. классическое определение вероятности не применимо в случае неравновозможных исходов

Статистическое определение вероятности

Пусть проведено n испытаний в каждом из которых вероятность появления события А одинакова, т.е. испытания однородны.
Пусть m количество испытаний, в которых событие А произошло, тогда
m/n – относительная частота.

Теорема Бернулли.

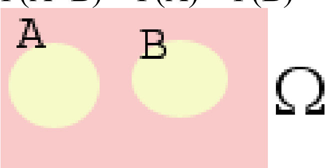
При неограниченном увеличении числа неоднородных испытаний относительная частота появления события А стремится по вероятности к вероятности события А, т.е. для любого

$$\sigma \ >0 \ \lim_{n\to\infty} p\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \sigma \right\} = 1$$

В качестве вероятности события А принимается относительная частота появления этого события в достаточно большом числе испытаний.

Теорема сложения для несовместимых событий

Если А и В несовместимы, то вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей.
P(A+B) = P(A) + P(B)



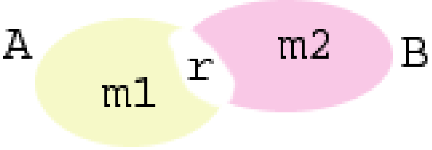
Пусть пространство элементарных событий отвечает
Ω - n, исх.
A – m_1, исх.
B – m_2, исх.

Тогда событию A + B отвечает $m_1 + m_2$ элементарных исходов, т.к. события А и В несовместны

Вероятность события P(A + B) = $\frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$

Теорема сложения для совместных событий

Вероятность суммы событий A и B равна сумме вероятности этих событий минус вероятность произведения.



Ω - n, исх.
A – m_1, исх.
B – m_2, исх.
AB – r, исх.

A + B = $m_1 + m_2 - r$
Тогда:

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-r}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{r}{n}=P(A)+P(B)-P(AB)$$

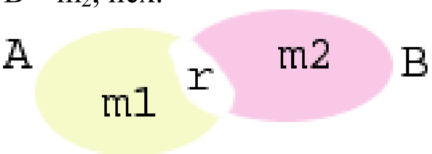
Определение: вероятность события B при условии, что произошло A называется условной вероятностью B при событии A.
P_A (B)
P(B(A)
P(B/A)

Теорема умножения

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них умноженной на условную вероятность другого.

$$P(AB)=P(A)-P_A(B)$$

пусть пространство элементарных событий имеет:
Ω - n, исх.
A – m_1, исх.
B – m_2, исх.



AB – r, исх.

$$P(AB)=\frac{r}{n}$$

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

$$P_A(B)$$

Если событие A произошло, то всего возможно исходов m1 из благоприятных r.

$P_A=\frac{m_1}{r}$, тогда

$$P(AB)=\frac{r}{n}=\frac{m_1}{n}*\frac{r}{m_1}=P(A)*P_A(B)$$

Следствие 1: если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от B. Такие события называются **независимыми.**
Доказательство:
По теореме умножения

$P(AB) = P(A) * P_A(B) = P(B) * P_B(A)$

если B не зависит от A, то вместо $P_A(B)$ ставится $P(B)$.

Следствие 2 (теорема умножения для независимых событий):

Если A и B независимы, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей

$P(AB) = P(A) * P(B)$

Пример:

Студент знает 41 вопрос из 45, какова вероятность, что он ответит на 2 вопроса.

A – студент ответит на 1 вопрос

B – студент ответит на 2 вопрос

C – студент ответит на два вопроса

C = AB

$P(C) = P(AB) = P(A) * P_A(B)$

A и B совместно заменяемые события

$P(A) = \frac{41}{45}$

$P_A(B) = \frac{40}{44}$

$P(C) = \frac{41}{45} * \frac{40}{44}$

В помещении установлены две противопожарные сигнализации. Вероятность срабатывания одной = 0.8; второй = 0.6.

Какова вероятность, что при пожаре сработает хотя бы одна.

A – сработала первая

B – сработала вторая

C – хотя бы одна

C = A+B

$P(A) = 0.8$

$P(B) = 0.6$ - НЕПРАВИЛЬНО

$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.8 + 0.6 = 1.4$

$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$ события A и B несовместн. $= P(A) + P(B) - P(A) * P(B) =$ A и B независимы

$= 0.8 + 0.6 - 0.8 * 0.6 = 0.92$

Второй способ:

Найдем вероятность события $\overline{C}$ (ни одно не сработало).

$\overline{C} = A * B$

$P(\overline{C}) = P(\overline{A} * \overline{B}) = P(\overline{A}) * P(\overline{B}) = (1 - P(A)) * (1 - P(B)) = 0.2 * 0.4 = 0.08$

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.08 = 0.92$

Вероятность наступления хотя бы одного события.

Пусть $A_1, A_2 \ldots A_n$ – независимые события.

A – произошло хотя бы одно из событий.

$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

$\overline{A}$ - ни одно из событий не произошло, т.е. одновременно не произошло A_1, не произошло $A_2 \ldots A_n$.

$A = A_1 * A_2 * \ldots * A_n$ тогда по теореме умножения

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) * P\left(\overline{A_2}\right) \ldots . P\left(\overline{A_n}\right)$$

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots . (1 - P(A_n))$$

Следствие:

Если все события A_i равновероятны

$$P(A_i) = P \Rightarrow P(A) = 1 - (1 - P)^n = 1 - q^n \Rightarrow q = 1 - p$$

Пример:

Вероятность выигрыша на 1 билет в лотерею =0.01. Найти вероятность выигрыша при покупке 100 билетов.

P = 0.01

n = 100

$\overline{A}$ - ни один билет не выиграл

$\overline{A} = \overline{A_1} * \overline{A_2} \ldots . \overline{A}_{100}$

$$P\left(\overline{A}\right) = (1 - p)^{100}$$

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - (1 - p)^{100} = 1 - 0.99^{100} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2.7} = 1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$