Лекция 1
_09.02.05_

Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

Определение 1

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на отрезке [a;b], если для всех x☐[a;b] выполнено равенство F(x)=f(x)

Примеры

$f(x)$	$F(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
x^5	$\frac{x^6}{6}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$arctgx$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$(x-1)^3$	$\frac{(x-1)^4}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$

Замечание

Если первообразная F(x) для функции f(x), то F(x)+C, где C=const также является первообразной для этой функции.

Теорема о первообразных

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные для одной и той же функции f(x) на отрезке [a;b], тогда $F_1(x)$-$F_2(x)$=const

Доказательство

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Имеем $\varphi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0$ для $\forall x\in[a;b]$. Запишем теорему Ланграджа для функции $\varphi(x)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(x-a)=0, \xi\in[a;x]$

$\varphi(x)-\varphi(a)=0$

$\varphi(x)=\varphi(a)=const$

$F_1(x)=F_2(x)=const$

Определение 2

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ функции f(x) называется выражение $\int f(x)dx=F(x)+C$, где f(x) – интегральная функция, F(x) – первообразная для функции f(x), т.е. F'(x)=f(x),

Теорема

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], то на этом отрезке существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx$

Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)dx)'=f(x)$
2. $\int d\varphi(x)=\varphi(x)+C$
3. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

Простейшие правила интегрирования

1. $\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$, если функции a1(ч) и a2(ч) интегрируемы
2. $\int A\cdot f(x)dx=A\int f(x)dx$, где A=const
3. $\int f\left(kx+b\right)dx=\frac{1}{k}F\left(kx+b\right)+C$

Доказательство

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b)$$

Замечание

Свойства (1) и (2) вытекают из свойст первообразных

Примеры

1. $\int (x+\cos x)dx = \int xdx + \int coxdx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$
2. $\int \sin(x+3)dx = -\cos(x+3) + C$
3. $\int \cos(2x-1)dx = \frac{1}{2}\sin(2x-1) + C$
4. $\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \ln|x+4| + C$
5. $\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$
6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x-1) + C$
7. $\int \frac{x+2}{x-3}dx = \int \frac{x-3+5}{x-3}dx = \int\left(1+\frac{5}{x-3}\right)dx = \int dx + 5\int\frac{dx}{x-3} = x + 5\ln|x-3| + C$
8. $\int \frac{2x^2-2x-3}{x+4}dx = \int\left(2x-10+\frac{37}{x+4}\right)dx = 2\int xdx + 10\int dx + 37\int\frac{dx}{x+4} =$
   $= x^2 - 10x + 37\ln|x+4| + C$

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0;\ a \neq 1)$

9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \dfrac{x}{2}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15* $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \dfrac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

16* $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

Лекция 2
16.02.05

Замечание 1.
Формулы 1-14 учить
Замечание 2.
Все формулы таблицы неопределенных интегралов могут быть доказаны путем дифференцирования правой части.
Доказательство (12)

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Примеры

1. $\int\left(3x + \dfrac{4}{\cos^2 x}\right)dx = \int 3x dx + \int \dfrac{4}{\cos^2 x} dx = 3\int x dx + 4\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \dfrac{3x^2}{2} + 4tgx + C$

2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7 - 6x^2}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{6(7/6 - x^2)}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{7/6 - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \int \dfrac{dx}{\sqrt{7/6 - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{7/6}} + C$

Замена переменной в неопределенном интеграле (способ подстановки)

Пусть существует $\int f(x)dx$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))dt$

Доказательство

Достаточно доказать, что производные от обеих частей неравенства $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))dt$ совпадают.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\left(\int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t))dt\right)'_t \cdot \frac{1}{dx/dt} =$$

$= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t)) = f(x)$, где dx и dt – взаимообратные функции.

Замечание

Вместо подстановки $x=\varphi(t)$ при вычислении неопределенных интегралов иногда удобно выполнить подстановку $t=\psi(x)$, тогда

$$\psi'(x)dx = d\psi(x)$$

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = \ln|\psi(x)| + C$$

Примеры

1. $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int six^2 x\, d\sin x = |\sin x = t| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$
2. $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = |x^2+1=t| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

Замечание

Прибавление константы под знак дифференциала не изменит его.

3. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}\cdot dx = \int arctg^2 x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \int arctg^2 x\, d\, arctgx = |arctgx = t| = \int t^2 dt =$

   $= \frac{t^3}{3} + C = \frac{arctg^3 x}{3} + C$

4. $\int \frac{e^x dx}{3e^{2x}-5} = \int \frac{d\,e^x}{3e^{2x}-5} = |e^x = t| = \int \frac{dt}{3t^2-5} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-5/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5/3}}\cdot\ln\left|\frac{t-\sqrt{5/3}}{t+\sqrt{5/3}}\right| + C =$

   $= \frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot\ln\left|\frac{e^x-\sqrt{5/3}}{e^x+\sqrt{5/3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3}e^x-\sqrt{5}}{\sqrt{3}e^x+\sqrt{5}}\right| + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \left|\begin{matrix} x=t^6 \\ t=\sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt\end{matrix}\right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$

   $= 6\left(\int dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt\right) = 6(t - arctgt) + C = 6\left(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + C$

Лекция 3
17.02.05

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Интегралы вида:

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

2. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Для интегрирования нужно:

a. выделить из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

b. выполнить замену переменной в подынтегральной функции:

$$t=x+\frac{b}{2a}$$

$$x=t-\frac{b}{2a}$$

$$dx=dt$$

Замечание

При необходимости разбить интеграл на сумму двух, каждый из которых вычисляется уже известным методом

Примеры

1. $$\int \frac{x+2}{x^2-6x-1}dx=\int \frac{x+2}{(x-3)^2-10}dx=\begin{vmatrix} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{t+3+2}{t^2-10}dt=\int \frac{t+5}{t^2-10}dt=\int \frac{tdt}{t^2-10}+\int \frac{5dt}{t^2-10}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2-10\right)}{t^2-10}+5\int \frac{dt}{t^2-10}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-10\right|+5\cdot\frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^2-10\right|+5\cdot\frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot\ln\left|\frac{(x-3)-\sqrt{10}}{(x-3)+\sqrt{10}}\right|+C$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x2-2x+1-1\right)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\begin{vmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin(x-1)+C$$

3. $$\int \frac{3-x}{\sqrt{2x^2+x-3}}dx=\int \frac{3-x}{2\left[(x+1/4)^2-25/16\right]}dx=\begin{vmatrix} x+1/4=t \\ x=t-1/4 \\ dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{3-t+1/4}{\sqrt{2\left(t^2-25/16\right)}}dt=\int \frac{13/4-t}{\sqrt{2\left(t^2-25/16\right)}}=$$

$$=\int \frac{13/4}{\sqrt{2\left(t^2-25/16\right)}}-\int \frac{tdt}{\sqrt{2\left(t^2-25/16\right)}}=\frac{13}{4\sqrt{2}}\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-25/16}}-\frac{1}{4}\int \frac{d\left(2t^2-25/8\right)}{\sqrt{2t^2-25/8}}=$$

$$=\frac{13}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\left|t+\sqrt{t^2-25/16}\right|-\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2t^2-25/8}+C=\frac{13}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\left|x+1/4+\sqrt{(x+1/4)^2-25/16}\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(x+1/4)^2-25/8}+C$$

II. Интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{(Mx+N)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

a. Для вычисления данного интеграла выполняется замена переменной по формуле:

$$\frac{1}{Mx+N}=z$$
$$x=\frac{1}{Mz}-\frac{N}{M}$$
$$dx=\frac{-1}{Mz^2}dz$$

После чего интегрирование сводится к уже изученному виду

Пример

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4x+1}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=z\\ x=\frac{1}{z}\\ dx=-\frac{1}{z^2}dz\end{array}\right|=\int\frac{-\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z}+1}}dz=-\int\frac{1}{z\cdot\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z}+1}}dz=-\int\frac{1}{\sqrt{1+4z+z^2}}dz=$$

$$=-\int\frac{d(z+2)}{\sqrt{(z+2)^2-3}}=|z+2=t|=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=-\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right|+C=-\ln\left|z+2+\sqrt{(z+2)^2-3}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+2+\sqrt{\left(\frac{1}{x}+2\right)^2-3}\right|+C$$

Интегрирование по частям

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

Доказательство:

$$d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=\left(\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\right)dx=vdu+udv$$
$$\Rightarrow udv=d(uv)-vdu$$

Проинтегрируем обе части получившегося неравенства

$$\int udv=\int d(vu)-\int vdu=uv-\int vdu$$

Лекция 4
02.03.05

Примеры

1. $$\int arctgx\,dx=x\cdot arctgx-\int x\,d\,arctgx=x\cdot arctgx-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$
$$=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$$

2. $$\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\cdot\sin x-\int\sin x\,dx=x\cdot\sin x+\cos x+C$$

3. $$\int x^2e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int x^2d\,e^{2x}=\frac{1}{2}\left(x^2e^{2x}-\int e^{2x}d\,x^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2e^{2x}-x^2e^{2x}+2\int x^2d\left(e^{2x}\right)\right)=\frac{1}{2}(\ )$$

4. $$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int xd\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x-\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)dx=$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$I=x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}+2C\rightarrow$$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + 2C \to$$

$$I = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$ - табличный интеграл(16)

5. $I = \int e^x \sin x dx = \int \sin x \, d\, e^x = e^x \sin x - \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x =$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x = e^x(\sin x - \cos x) + \int e^x \sin x dx + 2C$$

$$I = e^x(\sin x - \cos x) - I + 2C \to$$

$$I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (рациональной дробью) называется выражение вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0, (a_m \neq 0)$ - многочлен в степени m

$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0, (b_n \neq 0)$ - многочлен в степени n

Например

$\frac{2x^2+1}{x^5 - x + 1}$ - правильная

$\frac{x^4 - x + 2}{3x^4 + 3x^2 + x}$ - неправильная

$\frac{x^6 + x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 1}$ - неправильная

Рациональную дробь называют правильной, если степень ее числителя меньше степени знаменателя (т.е $m<n$)

Утверждение

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (операция выделения целой части)

Определение

Простейшими называются правильные рациональные дроби следующих видов

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-A)^n}, n \geq 2$
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, n \geq 2$

Замечание

Простейшие рациональные дроби 1-го и 2-го типов интегрируются как степенные функции, на основе формул (1) и (2) таблицы интегралов.

Дроби 3-го и 4-го типов интегрируются как функции, содержащие квадратный трехчлен.

Для интегрирования дроби 4-го типа используются более сложные приемы

Пример

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = arctgx - \int \frac{x \cdot x}{(x^2+1)^2}dx = arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{xd(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= arctgx + \frac{1}{2}\int xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = arctgx + \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \int\frac{dx}{1+x^2}\right) = arctgx + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{2}arctgx + C =$$

$$= \frac{arctgx}{2} + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + C$$

Теорема

Любая правильная рациональная дробь со знаменателем

$Q(x) = (x-a)^n \cdot (x-b)^k \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + px + q\right)^m \cdot \left(x^2 + rx + s\right)^l \ldots$ может быть представлена в виде простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m} +$$

$$+ \frac{L_1x+K_1}{x^2+rx+s} + \frac{L_2x+K_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2} + \ldots + \frac{L_lx+K_l}{\left(x^2+rx+s\right)^l}\ldots$$

Формула Диез

Для нахождения коэффициентов (A_1, A_n, B_1, B_n, M_1, $M_{n\ldots}$ при разложении правильной рациональной дроби на сумму простых дробей):

1. привести дробь в правой части формулы к общему знаменателю (этот знаменатель совпадает с Q(x))
2. записать тождество числителей левой и правой части формулы Диез
3. приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной ч, получив систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения
4. решить получившуюся систему

Лекция 5
03.03.05

Замечание 1

Общее количество неизвестных коэффициентов разложения рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на сумму простейших дробей совпадает со степенью многочлена Q(x).

Замечание 2

Для определения коэффициента разложения на простейшие дроби получают более простые соотношения, придавая переменной *x* различные числовые значения.

Примеры

1. $\int\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}dx$

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим ее на сумму простейших дробей и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

Приравняем числители:

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2$$

Раскроем скобки:

$$x = Ax^2 - 2Ax + Ax - 2A + Bx - 2B + Cx^2 + 2Cx + C$$

Воспользуемся *Замечанием 2:*

$x=2:\ \ 2=9C,\ C=\frac{2}{9}$

$x=-1:\ -1=-3B,\ B=\frac{1}{3}$

Приравняем коэффициенты при x^2:

$x^2:\ \ 0=A+C,\ A=-C=-\frac{2}{9}$

Подставим получившиеся значения в выражение (*):

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{-\frac{2}{9}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{9}}{x-2}$$

Возьмем интеграл:

$$\int\frac{x}{(x+1)^2(x-2)}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}\right)dx=\int\left(\frac{-\frac{2}{9}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{9}}{x-2}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{-\frac{2}{9}}{x+1}\right)dx+\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}\right)dx+\int\left(\frac{\frac{2}{9}}{x-2}\right)dx=-\frac{2}{9}\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2}{9}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C$$

2. $\displaystyle\int\frac{2x^2-x-13}{x^2-x-6}dx$

Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть и разложим знаменатель на множители:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x-13 & x^2-x-6 \\ \underline{-\ 2x^2-2x-12} & \overline{2} \\ x-1 & \end{array}$$

$x^2-x-6=0$

$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot 6=25,\ D>0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

$1\cdot(x+2)(x-3)=0$

$$\frac{2x^2-x-13}{x^2-x-6}=2+\frac{x-1}{x^2-x-6}=2+\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

Разложим дробную часть подынтегральной функции на сумму простейших дробей:

$$\frac{2x^2-x-13}{x^2-x-6}=2+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}\quad (*)$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Приравняем числители:

$x-1=A(x-3)+B(x+2)$

Раскроем скобки:

$x-1=Ax-3A+Bx+2B$

Воспользуемся *Замечанием 2*:

$x=3:\ \ 2=5B,\ \text{В}=\dfrac{2}{5}$

$x=-2:\ -3=-5A,\ A=\dfrac{3}{5}$

Подставим получившиеся значения в выражение (*):

$$\frac{2x^2-x-13}{x^2-x-6}=2+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=2+\frac{\frac{3}{5}}{x+2}+\frac{\frac{2}{5}}{x-3}$$

Возьмем интеграл:

$$\int\left(\frac{2x^2-x-13}{x^2-x-6}\right)dx=\int\left(2+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}\right)dx=\int\left(2+\frac{\frac{3}{5}}{x+2}+\frac{\frac{2}{5}}{x-3}\right)dx=$$

$$2\int dx+\frac{3}{5}\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{2}{5}\int\frac{d(x-3)}{x-3}=2x+\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{2}{5}\ln|x-3|+C$$

3. $\displaystyle\int\frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+2)}dx$

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим ее на сумму простейших дробей и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}\quad(*)$$

$$\frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)}$$

Приравняем числители и раскроем скобки:

$x^2+5=A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+2A+Bx^2-Bx+Cx-C$

Воспользуемся *Замечанием 2:*

$x=1:\ \ 6=3A,\ A=2$

Приравняем коэффициенты при x^n:

$x^2:\ \ 1=A+B,\ B=1-A=1-2=-1$

$x^0:\ \ 5=2A-C,\ C=2A-5=2\cdot2-5=-1$

Возьмем интеграл? подставив получившиеся значения в выражение (*):

$$\int\frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+2)}dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-x-1}{x^2+2}\right)dx=2\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+2}dx=$$

$$=2\ln|x-1|-\int\frac{x+1}{x^2+2}dx+C$$

Интегрирование тригонометрических функций (m и n – целые числа)

I. $\boxed{\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx}$

1. одно из чисел (*m* или *n*) – нечетное положительное
   a. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$
      $\sin^2 x=1-\cos^2 x$
   b. $\sin x=t$
      $\cos x=t$
   c. $dx=dt$

Пример:

$$\int\cos^6 x\cdot\sin^3 x\,dx=-\int\cos^6 x\cdot\sin^2 x\,d\cos x=-\int\cos^6 x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x=\left|\cos x=t\right|=$$

$$= -\int t^6\left(1-t^2\right)dt = -\int\left(t^6 - t^8\right)dt = -\int t^6 dt + \int t^8 dt = -\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} + C$$

2. оба числа m и n – четные неотрицательные

a. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ - формулы понижения степени

Пример:

$$\int \sin^4 x dx = \int\left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx + C =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 4x dx\right) + C = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C =$$

$$\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

Тема: интегрирование тригонометрических функций.

I. Интегралы вида $\int \sin^m x \times \cos^n x\, dx$ (m, n $\in Z$)

1) *Одно из чисел (m или n)- нечетное положительное.*

Для вычисления интеграла используется подстановка cos x = t (sin x = t) и формула

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Пример:

$$\int \cos^6 x \times \sin^3 x\, dx = -\int \cos^6 x \times \sin^2 x\, d\cos x = \int \cos^8 x\, d\cos x - \int \cos^6 x\, d\cos x = \frac{\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

2) *m и n – четные неотрицательные числа.*

Для вычисления интеграла используются формулы

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

Пример:

$$\int \sin^4 x\, dx = \int\left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

3) Числа m и n имеют одинаковую четность и одно из них отрицательно.

Для интегрирования необходимо сделать замену tg x = t (ctg x = t) и воспользоваться тождествами (✳)

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{tg^2 x} + 1 \qquad\qquad \frac{1}{\cos^2 x} = tg^2 x + 1$$

Пример:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \left| d \text{ tg x} = \frac{1}{\cos^2 x} \right| = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} d \text{ tg x} = \int \text{tg}^2 x \left(\text{tg}^2 x + 1\right) d \text{ tg x} = \left|\text{tg x} = \text{t}\right| =$$

$$= \int t^2 \left(t^2 + 1\right) d \text{ t} = \int \left(\text{t}^4 + t^2\right) d \text{ t} = \frac{\text{tg}^5 x}{5} + \frac{\text{tg}^3 x}{3} + \text{c}$$

Интегралы вида $\int tg^m x \, \text{dx}, \int \text{ctg}^\text{m} x \, \text{dx}$

Для интегрирования используются формулы (✳).

Пример:

$$\int ctg^3 x \text{ dx} = \int \text{ctg x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \text{dx} = \int \frac{ctg \text{ x}}{\sin^2 x} dx - \int ctg \text{ x dx} = -\int \text{ctg x d } ctg \text{ x} - \int \frac{\text{cosx}}{\text{sinx}} dx =$$

$$= -\frac{\text{ctg}^2 x}{2} - \int \frac{d \text{ sinx}}{\text{sinx}} = -\frac{ctg^2 x}{2} - \ln\left|\sin x\right| + c$$

•.Интегралы вида $\int \sin \text{mx} \times \cos \text{nx dx}$, $\int \cos \text{mx} \times \cos \text{nx dx}$, $\int \sin \text{mx} \times \sin \text{nx dx}$

Для вычисления интегралов используются тригонометрические формулы

$$\sin\alpha \times \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

$$\sin\alpha \times \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\cos\alpha \times \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

Пример:

$$\int \sin 7x \times \sin 8x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(7x-8x)-\cos(7x+8x)]dx = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 15x)dx = \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{\sin 15x}{15}\right)+c$$

•.Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

R- рациональная функция своих аргументов.

Для интегрирования выражений данного типа используется универсальная тригонометрическая подстановка.

$$tg\frac{x}{2}=t \qquad \mathrm{dx}=\frac{2\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}$$

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Примеры:

1) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \left|\textit{универсальная}\ \text{ттригонометрическая подстановка}\right| =$

$$= \int \frac{\frac{2\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}}{\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+1-t^2} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2-2} = -2\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|+c =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+c$$

2) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}} = \left|\textit{универсальная}\ \text{ттригонометрическая подстановка}\right| =$

$$= \int \frac{\frac{2\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}}{\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c$$

3) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{cosx}} = \left|u=\frac{\pi}{2}+x; \mathrm{dx}=\mathrm{du}=\cos\left(\mathrm{u}-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{sinu}\right| = \int \frac{d\sin u}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+c = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

•а.Интегралы вида $\int R(\sin^2 x, \sin x\times\cos x, \cos^2 x)dx$

R- рациональная функция своих аргументов.

В этом случае подынтегральная функция содержит только четные степени синуса и косинуса и степени их произведения.

Тогда используем подстановку tg x = t (ctg x = t).

Примеры:

$$1)\int\frac{dx}{1+2\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\right)}=\int\frac{d\,tgx}{tg^2 x+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{3}}+c$$

$$2)\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\times\cos x}=\int\frac{dx}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}\right)\cos^2 x}=\int\frac{d\,\mathrm{tgx}}{\mathrm{tg}^2\mathrm{x}+2\mathrm{tgx}}=\int\frac{d\,\mathrm{tgx}}{(\mathrm{tgx}+1)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{tgx}}{\mathrm{tgx}+2}\right|+c$$

Интегрирование иррациональных функций

I. Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right)dx$***, где R – рациональная функция своих аргументов***

Заменой $x=t^k$, где $k=НОК(n, n_2\ ...)$, задача сводится к интегрированию рациональной функции

Пример:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{l}x=t^6\\dx=6t^5dt\\t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^5dt}{t^2(t+1)}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{t^3\pm1}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1}{t+1}dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-6\int\frac{dt}{t+1}=6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}-6t-6\ln|t+1|+c=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+c$$

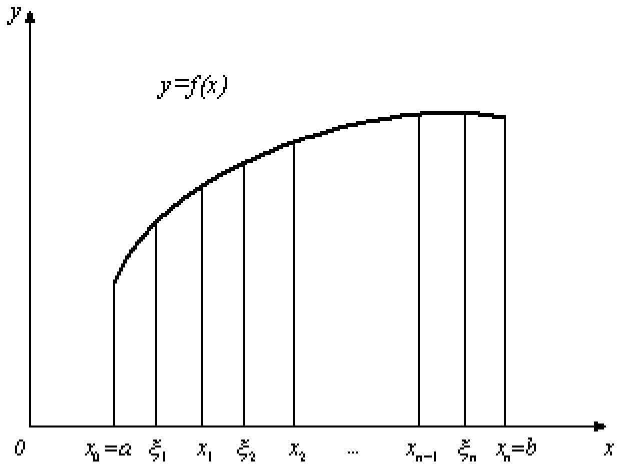
II. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right)dx$***, где R – рациональная функция своих аргументов***

Для сведения задачи к интегрированию рациональной дроби необходимо выполнить замену $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где $k=НОК(n, n_2\ ...)$.

Пример:

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \begin{vmatrix} 1-x=t^2 \\ x=1-t^2 \\ dx=-2tdt \\ t=\sqrt{1-x} \end{vmatrix} = \int \frac{-2tdt}{(t^2+1)t} = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\,arctg\,t + c = -2\,arctg\sqrt{1-x} + c$$

Определенные интегралы



Пусть функция *y=f(x)* непрерывна на *[a; b]*. Разобьем *[a; b]* произвольным образом на *n* частей в точках $x_0 = a$, x_1, x_2, … $x_n = b$.

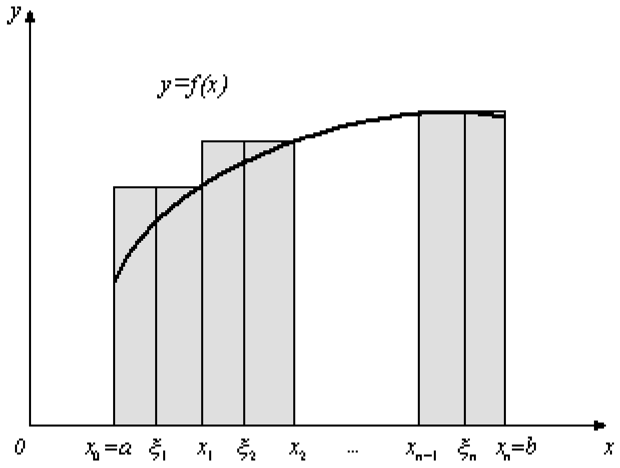
Тогда $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ - длины отрезков разбиения.

Обозначим через λ максимальную длину отрезков разбиения $\lambda = \max\limits_{i=1,2,3...n} \Delta x_i$. Величина λ называется *диаметром разбиения*. На каждом из отрезков разбиения произвольным образом выберем по одной точке $\xi_1 \in [x_0; x_1]; \xi_2 \in [x_1; x_2]; \xi_n \in [x_{n-1}; x_n]$.

Выражение $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ или $S_n = f(\xi_1)\Delta x_i + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$ называется *интегральной суммой* функции *f(x)* на *[a; b]*.

Геометрический смысл интегральных сумм.

В случае *f(x)*≥ *0* интегральная сумма представляет собой площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основания которых представляют отрезки разбиения, а высоты – значения функции *f(x)* в точках $x = \xi_i$.



Определение 1. Если для любых разбиений *[a; b]* таких, что диаметр разбиения $\lambda = \max\limits_{i=1,2,3...n} \Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ интегральные суммы S_n стремятся к одному и тому же пределу, то этот предел называется *определенным интегралом.*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (*)$$

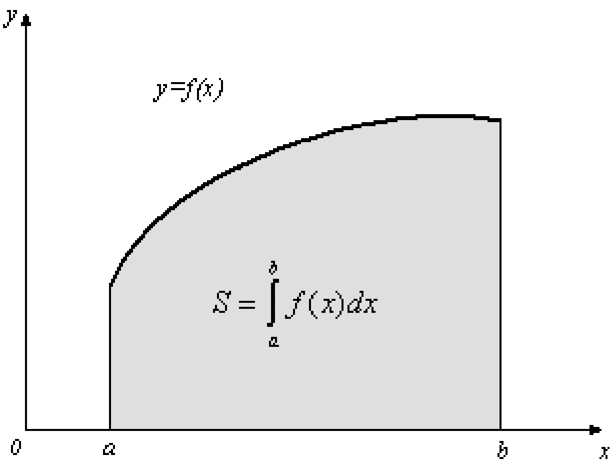
a – нижний предел интегрирования
b – верхний предел интегрирования

Определение 2. Функция *f(x)* называется интегрируемой, если существует предел (**),* т. е. существует определенный интеграл на *[a; b].*

Теорема об интегрируемости непрерывной функции.

Если *f(x)* непрерывна на *[a; b]*, то она интегрируема на этом отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла.



Пусть *f(x)* $\geq$ *0* непрерывна на *[a; b]*, тогда $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции *y= f(x)*, снизу – осью *Ox* и с боков – прямыми *x=a* и *x=b*.

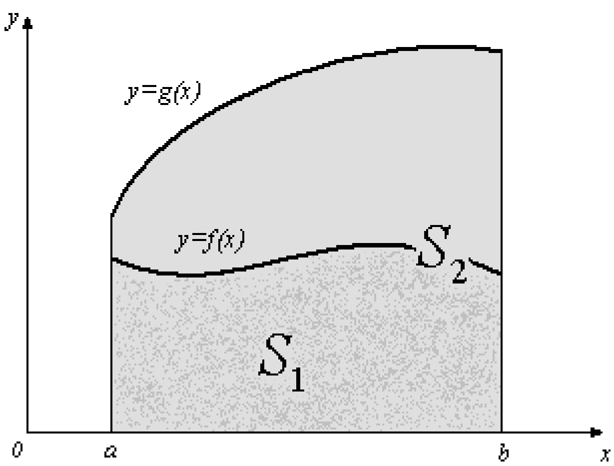
Замечание. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Определение 3. В случае *a>b* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Определение 4. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Свойства определенного интеграла.

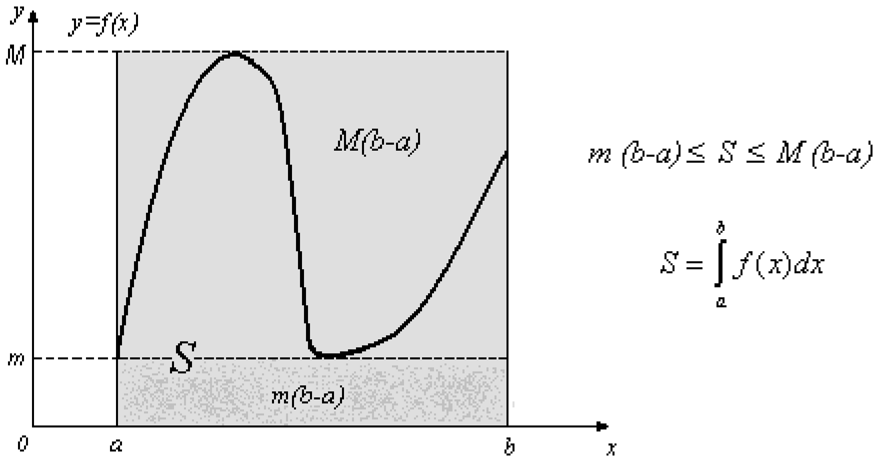
1) Если *f(x)* интегрируема на *[a; b]*, то $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, k = const.
2) Если *f(x)* и *g(x)* интегрируемы на *[a; b]*, то $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3) Пусть *f(x)* и *g(x)* интегрируемы на *[a; b]*, и *a<b*, *f(x)* $\leq$ *g(x)*, тогда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.



$S_1 = \int_a^b f(x)dx$

$S_2 = \int_a^b g(x)dx$

4) Пусть *f(x)* непрерывна на *[a; b]* и *a<b*, точка *m* – наименьшее значение функции, точка *M* – наибольшее значение функции, тогда *m (b-a)* $\leq \int_a^b f(x)dx \leq$ *M (b-a)*.



5) ***Теорема о среднем.***

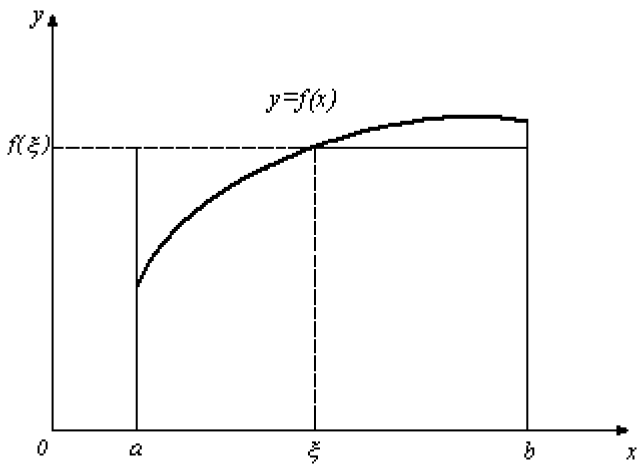
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда $\exists\xi\in[a;b]:\ \int_a^b f(x)dx = f(\xi)\,(b-a)$

Доказательство:

Пусть $b>a$; m, M – соответственно наименьшее и наибольшее значение $f(x)$ на $[a; b]$. По свойству (4) $m\,(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\,(b-a)$, тогда разделим неравенство на $(b-a)>0$, отсюда: m $\le\int_a^b\frac{f(x)dx}{b-a}\le M$.

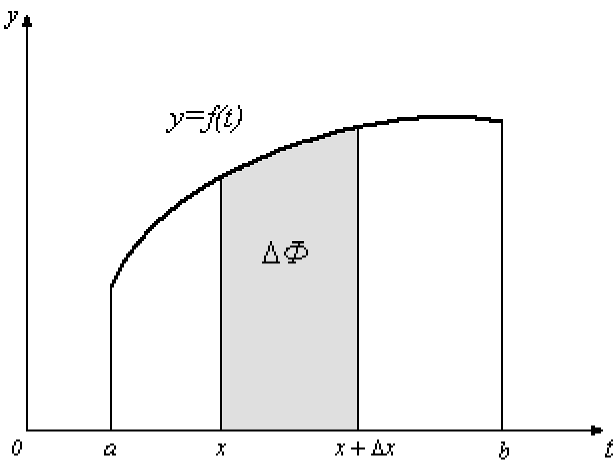
По свойству функций, непрерывных на отрезке, для любого μ, лежащего между m и M, т. е. $m<\mu<M$, $\exists\xi\in[a;b]: f(\xi)=\mu$, тогда приняв $\mu=\int_a^b\frac{f(x)dx}{b-a}$, получим, что $f(\xi)=\int_a^b\frac{f(x)dx}{b-a}$

$\Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx = f(\xi)\,(b-a)$.



6) Если $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $c\in[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Вычисление определенных интегралов.



Пусть *f(x)* интегрируема на *[a; b],* а *x* – произвольная точка интервала. Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_x^x f(t)dt$$

Тогда по свойству (6):

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По теореме о среднем (свойство (5)):

$$\Delta\Phi=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x,\ \xi\in(x;x+\Delta x)$$

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x$$

Теорема 1.

Если *f(x)* непрерывна и $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, то $\Phi'(x)=f(x)$.

Доказательство:

$\Phi'(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(x)$, т. к. *f(t)* непрерывна.

Следствие из теоремы 1:

Любая непрерывная функция имеет первообразную. В качестве первообразной может быть взят $\int_a^x f(t)dt$.

Теорема 2. Формула Ньютона-Лейбница.

Если *f(x)* непрерывна и *F(x)* – первообразная для этой функции, то $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Доказательство:

По теореме 1 $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$, тогда по теореме о двух первообразных $\Phi(x)= F(x)=const$. Отсюда $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + const$.

Предположим $x=a$, тогда:

$0=\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+const \Rightarrow const = -F(a)$,

тогда получаем:

$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

Положим $x=b$:

$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Примеры:

1) $\int\limits_0^1 x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{1}{6}$

2) $\int\limits_{-2}^1 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} = \frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \frac{33}{5}$

3) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\big|_1^e = \ln|e| - \ln|1| = \ln|e| - \ln|1| = 1 - 0 = 1$

4) $\int\limits_0^{4\pi} \sin 2x dx = -\left.\frac{\cos 2x}{2}\right|_0^{4\pi} = -\frac{1}{2}(\cos 8\pi - \cos 0) = 0$

5) $\int\limits_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{e-1}{2e}$

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)xdx - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)xdx$

Обозначим данный интеграл как I и рассмотрим два случая, считая, что $m, n > 0;\ m, n \in Z$

а) $m \neq n$

$$I = \frac{1}{2}\left.\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

б) $m = n$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2mx dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left.\frac{\sin 2mx}{2m}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi + \pi) = \pi$$

$$I = \begin{cases} 0,\ m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$$

Замечание. Если ввести скалярное произведение двух функций по формуле $f(x)g(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, то окажется, что функции sinmx и sinnx ортогональны при $m \neq n$.