Министерство образования и науки РФ

Российский государственный университет

нефти и газа имени И. М. Губкина

Кафедра высшей математики

С.И. ВАСИН

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие для студентов

Москва 2010

В пособии изложены вводные разделы из курса линейной алгебры. Определены операции над матрицами и рассмотрены основные методы решений систем линейных уравнений: метод Крамера, матричный и Гаусса. Представлены четкие алгоритмы решений задач. Теоретическое изложение материала сопровождается множеством примеров. В пособие включены разделы, предназначенные для самостоятельного изучения, что позволит сделать внеаудиторную работу студента более эффективной.

Отзывы и замечания просьба отправлять автору по адресу s.vasin@rambler.ru

Рецензенты:

Ролдугин В. И., зав. лабораторией института физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН, доктор ф-м. наук, профессор;
Скугорев В. П., доцент кафедры ВиПМ МГУПП, канд. техн. наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТРИЦЫ, ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Определение. Таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размерности $m \times n$.

Обозначения матрицы: $$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс i указывает номер строки, в которой стоит элемент, а второй индекс j – номер столбца.

Определение. Матрицы **A** и **B** равны, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

Определение. Матрица $\mathbf{A}_{m\times 1}$, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

Определение. Матрица $\mathbf{A}_{1\times n}$, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой.

Определение. Матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$ у которой число строк равняется числу столбцов называется квадратной размерности n.

Определение. Диагональ $a_{11}, a_{22}, a_{33}...$– называется главной диагональю матрицы.

Определение. Квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали расположены только нулевые элементы, называется верхней (нижней) треугольной матрицей и обозначается $\underline{\mathbf{T}}\left(\overline{\mathbf{T}}\right)$, т.е.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной матрицей и обозначается **D**.

Определение. Диагональная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны 1, называется единичной матрицей и обозначается **E**.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается **O.**

Операции над матрицами

1) ***Сложение и вычитание***

Матрицы одинаковой размерности складывают и вычитают по правилу:

$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \pm \left(b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)_{m\times n},$$

т.е. при сложении матриц соответствующие элементы складываются.

Роль нулевой матрицы: **A+O = A**.

2) ***Умножение матрицы на скаляр (число)***

Матрицу умножают на скаляр по правилу: $\lambda\left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}$,

т.е. при умножении матрицы на скаляр каждый элемент умножается на скаляр.

Пример 1. Дано $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 14 & -10 \end{pmatrix}$. Вычислить 2**A**-3**B.**

Решение. $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot 9 & 2\cdot 6 - 3\cdot 7 \\ -2\cdot 5 - 3\cdot 14 & 2\cdot 10 + 3\cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -9 \\ -52 & 50 \end{pmatrix}$.

Свойства линейных операций:

1. **A + B = B + A –** переместительный закон.

2. (**A + B**) + **C = A** + (**B + C**) – сочетательный закон.

3. λ(**A + B**) = λ**A** + λ**B** – распределительный закон относительно матриц.

4. **A**(λ+β) = λ**A**+β**A** – распределительный закон относительно чисел.

Доказательство свойств следует из определений линейных операций.

3) ***Умножение матриц***

Произведением матрицы $\mathbf{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на матрицу $\mathbf{B}_{n\times p} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $\mathbf{C}_{m\times p} = \left(c_{ij}\right)$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$, т.е. элемент c_{ij} матрицы **C=AB** равен сумме попарных произведений соответствующих элементов *i*-й строки матрицы **A** и *j*-го столбца матрицы **B.**

Из определения произведения матриц следует, что матрицу **A** можно умножить не на всякую матрицу **B**: необходимо, чтобы количество столбцов в матрице **A** было равно количеству строк в матрице **B**. В результате получится матрица **C**, количество строк которой равно количеству строк в матрице **A**, а количество столбцов – количеству столбцов в матрице **B**.

Пример 2. Дано: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вычислить произведения **AB**, **BA**.

Решение. Матрицу $\mathbf{A}_{2\times3}$ умножить на матрицу $\mathbf{B}_{2\times2}$ нельзя, т.к. количество столбцов матрицы **A –**3 неравно количеству строк матрицы **B**–2.

$$\mathbf{B}_{2\times2}\cdot\mathbf{A}_{2\times3}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot4 & 2\cdot3-1\cdot5 & 2\cdot1+1\cdot2 \\ 3\cdot2+4\cdot4 & 3\cdot3-4\cdot5 & 3\cdot1+4\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 22 & -11 & 11 \end{pmatrix}_{2\times3}.$$

Свойства произведений:

1. **AB** ≠ **BA** – некоммутативность.
2. (**AB**)**C** = **A**(**BC**) – сочетательный закон.
3. **C**(**A** + **B**) = **CA** + **CB** – распределительный закон.
4. (λ**A**)**B**=λ(**AB**).

Доказательство свойств следует из определения произведения матриц.

Роль единичной и нулевой матриц: **AE=EA=A**, **AO=OA=O**.

Пример 3. Дано: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить **AE**, **EA**.

Решение. $\mathbf{AE}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\mathbf{A}$; $\mathbf{EA}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\mathbf{A}$.

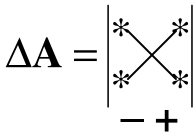
2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ.
МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

Для квадратных матриц определена числовая характеристика, которая называется *определителем матрицы*.

Обозначения определителя матрицы **A**: det **A**, Δ**A**, |**A**|.

Определение. Определителем матрицы размерности 1x1 называется число её составляющее.

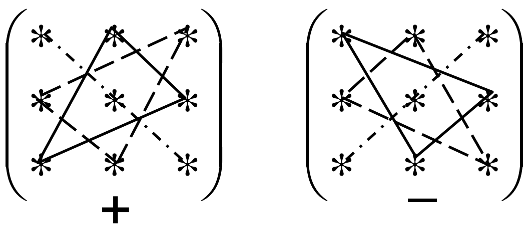
Определение. Определителем матрицы второго порядка называется выражение $\Delta\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Схема для вычисления определителя 2-го порядка 

Определение. Определителем матрицы третьего порядка называется выражение

$$\Delta\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схема для вычисления определителя 3-го порядка (правило треугольников). Три слагаемых со знаком плюс и три – со знаком минус представляют собой произведения элементов матрицы, взятых по три, как указано различными линиями на нижеприводимых схемах.



Свойства определителей

Определение. Транспонированием матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. Транспонированная матрица **A** обозначается $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Свойство 1(о равноправности строк и столбцов). При транспонировании величина определителя сохраняется, т.е. $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$.

Пример 4.

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 3 & 12 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 120 + 64 + 90 - 144 - 20 - 240 = -130,$$

$$\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 12 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 120 + 90 + 64 - 144 - 240 - 20 = -130 = \det\mathbf{A}.$$

Свойство 2. Если в определителе поменять местами две строки или два столбца, то определитель изменит знак.

Пример 5. $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 240 + 120 - 160 - 20 - 126 = 68.$

Поменяем местами 1 и 2 строки и вычислим определитель получившейся матрицы: $\det \tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 10 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 126 + 160 + 20 - 120 - 240 - 14 = -68 = -\det \mathbf{A}.$

Свойство 3. Если в определителе две одинаковых строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

Пример 6. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 180 + 216 + 54 - 54 - 216 - 180 = 0.$

Свойство 4. Если в определителе есть нулевая строка (столбец) то он равен нулю.

Пример 7. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Свойство 5. Если строку (столбец) в определителе умножить на число λ, то определитель тоже умножится на число λ, т.е. общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя

Пример 8. $\det \tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 12 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (15 + 12 + 24 - 60 - 2 - 36) = -141.$

Множитель 3 из третьей строки перед вычислением был вынесен за знак определителя.

Свойство 6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пример 9.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 112 + 40 + 36 - 40 - 36 - 112 = 0, \quad \textit{столбцы } 1 \textit{ и } 2 \textit{ пропорциональны.}$$

Свойство 7. При сложении двух определителей, различающихся только одной строкой (столбцом), соответствующие элементы этой строки (столбца) складываются.

Пример 10. Проиллюстрируем свойство 7 на примере.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3+1 & -2-1 & 3+0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

(-2+24+0+8-12-0)+(-1+0+0+4-4)= -3+24+0+12-16;

18-1=17; 17=17; верно.

Свойство 8. Если к какой-нибудь строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на число λ, то определитель не изменится.

Свойство 9. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Используя свойства 8 и 9 определители можно вычислять следующим образом: с помощью свойства 8 привести определитель к треугольному виду и вычислить его, как произведение элементов главной диагонали (свойство 9).

Пример 11. Вычислить $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Приведем матрицу к треугольному виду, используя свойство 8. Обнулим элементы a_{21} и a_{31}, для этого вычтем из второй строки 2 первые строки, а из третьей строки 3 первые:

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}.$$

Обнулим элемент a_{32}, для этого вычтем из третьей строки вторую, умноженную на (-8/5): $\det\breve{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -17/5 \end{vmatrix}.$

Мы привели матрицу к треугольному виду, определитель которой равен произведению элементов главной диагонали: $\det\breve{\mathbf{A}} = 1\cdot(-5)\cdot(-17/5) = 17 = \det\mathbf{A}$.

Свойство 10. Определитель произведения квадратных матриц одинаковой размерности равен произведению определителей этих матриц, т.е. $\det(\mathbf{A}_{n\times n}\cdot\mathbf{B}_{n\times n}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

Пример 12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 32 & 17 \end{pmatrix}$.

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4+6 = 10. \quad \det\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8-15 = -7.$$

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 32 & 17 \end{vmatrix} = -102+32 = -70 = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.$$

Определение. Минором k-го порядка матрицы **A** называется определитель k-го порядка с элементами, лежащими на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы **A**. Обозначения минора $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$, где $i_1 i_2 \ldots i_k$ – выбранные строки, а $j_1 j_2 \ldots j_k$ – столбцы.

Пример 13. $\mathbf{A}_{3\times4} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$;

$$\textit{Минор } 2-\textit{го порядка} \quad M_{1\,3}^{2\,4} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -30-8 = -38;$$

$$\textit{Минор } 3-\textit{го порядка} \quad M_{1\,2\,3}^{1\,3\,4} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -72+112-27-72-72-42 = -173;$$

Замечание. Минор (n-1)-го порядка квадратной матрицы $\mathbf{A}_{n\times n}$ n-го порядка будем обозначать M_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца матрицы не входящих в минор.

Пример 14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$.

Миноры первого порядка M_{11}=6, M_{12}=1, M_{21}= -3, M_{22}=2.

Пример 15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Миноры 2-го порядка:

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-0=-1;\quad M_{12}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4-0=-4;\quad M_{13}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-1=7;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-2+6=4;\quad M_{22}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+3=2;\quad M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-2=0;$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0+3=3;\quad M_{32}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0+12=12;\quad M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1-8=-7.$$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ называется выражение $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{\mathrm{ij}}$, где M_{ij} – минор.

Пример 16. Найдем алгебраические дополнения матрицы **A** из примера 14.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}*6=6,\ A_{12}=(-1)^{1+2}*1=-1, A_{21}=(-1)^{2+1}*(-3)=3,\ A_{22}=(-1)^{2+2}*2=2.$$

Пример 17. Найдем алгебраические дополнения матрицы **A** из примера 15.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}*(-1)=-1;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}*(-4)=4;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}*7=7;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}*4=-4;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}*2=2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}*0=0;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}*3=3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}*12=-12;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}*(-7)=-7.$$

Свойство 11 (разложение определителя по строке или столбцу). Определитель можно разложить по любой строке или столбцу по формулам:

$\left|a_{ij}\right|_{n\times n}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$ – разложение по i-ой строке;

$\left|a_{ij}\right|_{n\times n}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$ – разложение по j-ому столбцу,

т.е. сумма произведений всех элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения равна значению определителя.

Пример 18. Разложим определитель матрицы **A** 4-го порядка по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1*(-1)^{1+1}*\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -7 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} + 5*(-1)^{1+2}*\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \\ 9 & 0 & -6 \end{vmatrix} +$$

$$+3*(-1)^{1+3}*\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 1 \\ 9 & 4 & -6 \end{vmatrix} + 2*(-1)^{1+4}*\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 8 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (48+0+0-64-$$

$$-0-0)-5*(-288+0+0-288-0-0)+3*(252-9+0+252-24-0)-$$

$$-2*(0-72+0-0-192-0) = -16+2880+1413+528 = 4805.$$

Разложим определитель матрицы **A** 4-го порядка по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1*(-1)^{1+1}*\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -7 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} + 6*(-1)^{2+1}*\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} +$$

$$+0*(-1)^{3+1}*\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} + 9*(-1)^{4+1}*\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (48+0+0-64-$$

$$-0-0)-6*(-240+0+12-64-0-126)-9*(0-16-84-0-160+3) =$$

$$= -16+2508+2313 = 4805.$$

Определитель порядка n.

Свойство 11 является индуктивным определением определителя порядка *n*, т.е. зная определение определителя порядка (*n*-1), определитель порядка *n* вычисляется по одной из формул свойства 11 (см. пример 18).

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение. Квадратные матрицы **A** и $\mathbf{A}^{-1}$ называются взаимно обратными, если $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема. Обратная матрица к матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ существует и находится по формуле $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\Delta\mathbf{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n\,n} \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{\Delta\mathbf{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n\,n} \end{pmatrix}$

(A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы **A**) тогда и только тогда, когда матрица **A** *невырожденная*, т.е. $\Delta\mathbf{A}\neq 0$.

Пример 19. Дано: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ Найти $\mathbf{A}^{-1}$.

Решение. $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{vmatrix}=12+3=15\neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует. Алгебраические дополнения матрицы **A** вычислены в примере 16.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\ -1/15 & 2/15\end{pmatrix}.$$

Проверка: $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

Пример 20. Дано: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Найти $\mathbf{A}^{-1}$.

Решение. $\Delta\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1-24+3+8=-14\neq 0;$ Следовательно, обратная матрица существует. Алгебраические дополнения матрицы **A** вычислены в примере 17.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta\mathbf{A}}*\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-14}*\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ 4 & 2 & -12\\ 7 & 0 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/14 & 2/7 & -3/14\\ -2/7 & -1/7 & 6/7\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ 4 & 2 & -12\\ 7 & 0 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 0 & 0\\ 0 & -14 & 0\\ 0 & 0 & -14\end{pmatrix}\left(\frac{-1}{14}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{E}.$$

4. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ. БАЗИСНЫЙ МИНОР. РАНГ МАТРИЦЫ

Определение. Объекты **A, B,…,C** для которых определены операции сложения и умножения на скаляр, называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа $\alpha,\beta,...,\gamma$ не все равные нулю, при которых справедливо равенство $\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{B}+\ldots+\gamma\,\mathbf{C}=0$.

Объекты, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми.

Определение. Объект **A** является линейной комбинацией объектов **B,**…,**C,** если найдутся числа λ,...,μ такие, что **A=**λ**B**+…+μ**C**.

В дальнейшем будем говорить о линейной зависимости строк, столбцов матрицы, а также уравнений в системе.

Теорема. Для того чтобы объекты были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них являлся линейной комбинацией остальных.

Доказательство этого простого, но важного утверждения предоставляем читателю.

Теорема (необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя). Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.

Определение. Рангом матрицы называется максимальный порядок минора отличного от нуля.

Обозначение ранга матрицы **A**: $\mathrm{rg}\mathbf{A}$.

Ранг матрицы не превосходит минимума из числа строк и столбцов, т.е. $\mathrm{rg}\left(\mathbf{A}_{m\times n}\right)\le\min(m,n)$.

Определение. Минор максимального порядка неравный нулю называется базисным минором. Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, называются базисными.

Замечание. Базисный минор определен неоднозначно, их может быть несколько.

Теорема. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Метод окаймляющих миноров для вычисления ранга

1. Находим минор первого порядка неравный нулю.
2. Находим минор второго порядка, содержащий найденный минор первого порядка, отличный от нуля.
3. И т. д. Порядок последнего ненулевого минора и будет рангом матрицы.

Пример 21. Найти ранг, базисные минор, строки и столбцы матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$.

Решение. Ранг данной матрицы меньше или равен трем, меньшей размерности матрицы (количеству строк). Найдем минор первого порядка неравный нулю. Таким минором является любой ненулевой элемент. Возьмем например минор $M_1^1=1$. Будем искать минор второго порядка неравный нулю, содержащий найденный. Минор $M_{1\,2}^{1\,2}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$ не подходит. $M_{1\,2}^{1\,3}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0-8=-8$ ненулевой минор второго порядка. Вычисляем миноры третьего порядка, окаймляющие найденный минор второго порядка.

$$M_{1\,2\,3}^{1\,2\,3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}=-16+16+0-16+16-0=0;$$

$$M_{1\,2\,3}^{1\,3\,4}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & -5\end{pmatrix}=0+4-48-0+4+40=0.$$

Все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю. Следовательно, ранг матрицы **A** равен двум. Минор $M_{1\,2}^{1\,3}$, строки 1, 2, столбцы 1, 3 – базисные. Выразим оставшиеся строки и столбцы через базисные. Строка 3 – разность между второй и первой строкой. Второй столбец получается из первого умножением на два. Четвертый столбец равен сумме первого столбца, умноженного на 1/2, и третьего, умноженного на 11/8.

5. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Система уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$

называется алгебраической линейной системой m уравнений с n неизвестными, где x_1, x_2… x_n – неизвестные, a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены.

Матрица-столбец $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется столбцом неизвестных.

Матрица **A**=$(a_{ij})_{mxn}$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей системы.

Матрица-столбец $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ называется столбцом свободных членов.

В матричном виде система уравнений записывается в виде **AX=B**.

Решением системы называется совокупность чисел (x_1^0, x_2^0… x_n^0), которая при подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных обращает все уравнения системы в тождества.

Система может иметь либо одно решение, либо много решений, либо не иметь решений.

Система называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной*, если решений не имеет.

Система, имеющая одно решение, называется *определенной*, а имеющая много решений – *неопределенной*.

Система называется *квадратной*, если число уравнений m равняется числу неизвестных n.

Квадратная система, у которой определитель основной матрицы неравен нулю, называется *невырожденной*.

Система называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю.

Существует три основных способа решения линейных систем: метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса.

Метод Крамера

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

Решим её методом подстановки:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}, \\ a_{21}\dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \end{cases}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

Полученные формулы называются формулами Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными. Данными формулами можно пользоваться, если главный определитель системы Δ неравен нулю.

Для квадратной системы любой размерности имеются аналогичные формулы.

Формулы Крамера. Если определитель матрицы **A** квадратной системы **AX=B** неравен нулю, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}; (i = 1,....n)$, где Δ – определитель матрицы **A**, а Δ_i – определитель, получающийся из Δ заменой *i*-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 22. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x-y=-2. \end{cases}$

Решение.

$$\Delta\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7;\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-2-10=-12;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta\mathbf{A}}=-\frac{1}{7};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta\mathbf{A}}=\frac{12}{7}.\ \text{Проверка}\ \begin{cases} -\frac{1}{7}+\frac{3\cdot 12}{7}=5, \\ -\frac{2}{7}-\frac{12}{7}=-2. \end{cases}\ \begin{cases} 5\equiv 5, \\ -2\equiv -2. \end{cases}\ \text{Верно.}$$

Ответ: *x= -1/7; y=12/7.*

Пример 23. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 3x+2y+z=10, \\ 4x+3y-2z=4. \end{cases}$

Решение. $\Delta\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-4+8+9-8-3+12=14;$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-32+8+30-8-24+40=14;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-20+32+12-40+48-4=28;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}=8+72+80-64-30-24=42;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{14}{14}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{28}{14}=2;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{42}{14}=3.$$

Ответ: *x=1; y=2; z=3.*

Матричный метод

Рассмотрим невырожденную квадратную систему **AX=B.** Умножим левую и правую часть системы слева на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\Leftrightarrow\mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\Leftrightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Последняя формула представляет собой решение системы.

Пример 24. Решить матричным способом систему $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x+6y=15. \end{cases}$

Решение. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ найдена в примере 19: $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 45 \\ 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: *x=3, y=2.*

Пример 25. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 4x+y=5 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ найдена в примере 20: $A^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -12 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -12 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: *x=1, y=1, z=1.*

Метод Гаусса

Элементарные преобразования над уравнениями системы, строками и столбцами матрицы

Первое преобразование. Перестановка двух уравнений (строк, столбцов).

Второе преобразование. Умножение уравнения (строки, столбца) на число отличное от нуля.

Третье преобразование. Прибавление к одному уравнению (строке, столбцу) другого уравнения (строки, столбца) умноженного на константу.

Теорема. Элементарные преобразования над строками и столбцами не меняют ранга матрицы.

Теорема. Ранг треугольной матрицы равен количеству ненулевых строк.

Матрицу ($\mathbf{A|B}$) называют *расширенной матрицей* системы **AX=B**.

Теорема. В результате элементарных преобразований над строками и первого преобразования над столбцами расширенной матрицы получается матрица, которой соответствует система, имеющая такие же решения, что и исходная система.

Теорема. С помощью элементарных преобразований над строками и первого преобразования над столбцами расширенной матрицы ее можно привести к одному из трех видов.

1) ($\mathbf{E|C}$), где **E**– единичная матрица. В этом случае система имеет единственное решение.
2) $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{array}\right)$, где **T**– верхняя треугольная матрица, **O** – нулевая матрица, **S** – столбец из ненулевых элементов. В этом случае система решений не имеет (несовместна).
3) $\left(\mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{C}\right)$. В этом случае система имеет бесконечно много решений (неопределена). Переменные, соответствующие столбцам матрицы, стоящим слева от пунктирной линии, называются зависимыми, а стоящие справа – независимыми. Цель — выразить зависимые переменные через независимые.

Теорема Кронекера-Капелли

Система **AX=B** совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы ($\mathbf{A|B}$) равен рангу **A,** т.е. $\mathrm{rg}(\mathbf{A|B}) = \mathrm{rg}\mathbf{A}$.

Доказательство.

Из предыдущей теоремы следует, что в случаях 1 и 3, когда система имеет единственное решение или бесконечно много, ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы. Действительно, $\mathrm{rg}(\mathbf{E|C})=\mathrm{rg}(\mathbf{E})$ и $\mathrm{rg}\left(\mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{C}\right) = \mathrm{rg}\left(\mathbf{E} \mid \mathbf{F}\right)$. В случае 2, когда система решений не имеет, ранг расширенной матрицы больше ранга основной матрицы, $\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{array}\right) > \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}\right)$.

Отметим, что в случае, когда система имеет единственное решение, её ранг равен количеству неизвестных, а в случае бесконечного числа решений ранг системы меньше числа неизвестных и равен количеству зависимых переменных.

Пример 26. Решить методом Гаусса систему $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4, \\ x + y + z = 3, \\ -x + 2y - z = 0. \end{cases}$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее к треугольному виду. При обнулении следует придерживаться следующих правил. Если возможно, сделать элемент a_{11} равным единице с помощью перестановки строк. Затем обнуляем элементы ниже диагонали в первом столбце, путем вычитания из строк первой строки, умноженной на константу. После этого обнуляем элементы ниже диагонали во втором столбце, путем вычитания второй строки, умноженной на константу. И.т.д. пока не приведем матрицу к треугольному виду. Преобразования, совершаемые над матрицей, будем писать над и под знаком эквивалентности. Например, (2)-2*(1) обозначает: из второй строки вычесть первую строку, умноженную на 2; [1]↔[2] обозначает: поменять местами первый и второй столбец. Руководствуясь выше сказанным, приведем нашу матрицу к треугольному виду:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{(1)\leftrightarrow(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)+(1)}{\overset{(2)-2*(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)+(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Далее обнулим элементы выше главной диагонали. Сначала обнулим элементы выше диагонали последнего столбца с помощью прибавления последней строки, умноженной на константу, к другим строкам. Затем обнуляются элементы предпоследнего столбца с помощью предпоследней строки. И.т.д. пока не приведем матрицу к диагональному виду с приписанным столбцом. Далее, деля строки на соответствующие диагональные элементы, получим единичную матрицу с приписанным столбцом свободных членов, что соответствует случаю единственного решения. Согласно теореме Кронекера-Капелли ранг расширенной матрицы и ранг главной матрицы системы равны трем (количеству неизвестных).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)-(3)}{\overset{(1)-(3)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)\to(2)\cdot\frac{-1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

Ответ: *x=1, y=1, z=1.*

Пример 27. Решить методом Гаусса систему $\begin{cases} 2x+y+z=1, \\ x+2y-z=3, \\ x-y+2z=5. \end{cases}$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \overset{(1)\leftrightarrow(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \underset{(3)-(1)}{\overset{(2)-2*(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Третьей строке последней матрице соответствует уравнение 0=7, которое решений не имеет. Следовательно, и система решений не имеет.

Отметим, что несовместность системы следует и из теоремы Кронекера-Капелли. Действительно, ранг главной матрицы системы два не равен трем, рангу расширенной матрицы.

Ответ: решений нет.

Пример 28. Решить методом Гаусса систему $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+4x_2+3x_3=5, \\ 3x_1+6x_2+5x_3+x_4=9. \end{cases}$

Решение. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 9 \end{array}\right) \underset{(3)-3(1)}{\overset{(2)-2(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right).$

Диагональный элемент a_{22} в процессе преобразований оказался равным нулю, чего быть не должно. Чтобы сделать его ненулевым возникает необходимость поменять местами столбцы. Мы поменяем местами столбцы 2 и 3, что соответствует перемене местами неизвестных x_2 и x_3 в системе уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \overset{[2]\leftrightarrow[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right) \overset{(3)-2(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В результате преобразований получилась нулевая строка, которой соответствует тождественное равенство 0=0, и поэтому она вычеркивается и в дальнейшем не рассматривается. В получившейся трапециевидной матрице пунктирной линией отделяем слева квадратную матрицу и приводим её к единичной.

$$\left(\begin{array}{cc:cc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Система привелась к случаю бесконечного множества решений. Переменные x_1 и x_3, стоящие слева от пунктирной линии, являются зависимыми, а x_2 и x_4 – независимыми. Выразим зависимые переменные через независимые. Для этого выпишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 3 - 2x_4, \\ x_2, x_4 - \textit{любые.} \end{cases}$$

Итак, система имеет бесконечно много решений, которые задаются последними формулами. Полученное решение называется общим решением системы. Укажем одно из частных решений системы, для этого положим x_2 и x_4 равными чему-нибудь произвольным образом, а x_1 и x_3 вычислим по формулам: x_2=0, x_4=0, x_1= -2, x_3=3– частное решение системы.

Поиск обратной матрицы с помощью метода Гаусса

Укажем отличный от ранее предложенного способ поиска обратной матрицы. К исходной матрице справа припишем единичную матрицу. Матрицу (**A**|**E**) с помощью элементарных преобразований над строками приведем к виду (**E**|**B**). Получившаяся матрица **B** и будет обратной к матрице **A**.

Пример 29. Найти матрицу обратную к матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)-4(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+3(3)}{\overset{(2)+5(3)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -11 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -20 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{2(1)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -20 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{(2)\to 0{,}25(2) \\ (3)\to -(3)}}{\overset{(1)\to 0{,}5(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -5 & 0{,}25 & 1{,}25 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -5 & 0{,}25 & 1{,}25 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$. Верно.

6. ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Линейное уравнение называется однородным, если его свободный член равен нулю. Система уравнений называется однородной, если она состоит только из однородных уравнений, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}.$$

Матричный вид: $\mathbf{AX} = 0$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

Однородная система всегда имеет решение: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, которое называется нулевым. Кроме того, существуют условия, при которых однородные системы имеют множество ненулевых решений.

Из теоремы Кронекера-Капелли вытекают следствия.

Следствие 1. Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела множество ненулевых решений, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был меньше числа неизвестных ($rg\mathbf{A} < n$).

Следствие 2. Любая система линейных однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных ($m < n$), имеет множество ненулевых решений.

Следствие 3. Для того чтобы квадратная система однородных уравнений ($m = n$), имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю.

Следствие 4. Система линейных однородных уравнений имеет $k=n-rg\mathbf{A}$ линейно независимых частных решений: $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2,\ldots\mathbf{X}_k$, которые называются фундаментальной системой решений (ФСР). Любое решение однородной системы является линейной комбинацией ФСР.

Определение. Общим решением системы линейных однородных уравнений называется линейная комбинация ФСР, т. е. $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2+\ldots+c_k\mathbf{X}_k$, где $c_1, c_2,..., c_k$ произвольные постоянные.

Пример 30. Имеют ли данные системы множество ненулевых решений?

$$a)\begin{cases}-4x+8y+4z=0,\\ 2x-4y-2z=0,\\ -x+2y+z=0.\end{cases} \quad b)\begin{cases}-2x+y-z=0,\\ 3x-y+2z=0,\\ x+2y-3z=0.\end{cases}$$

Решение. Вычисляем определители систем:

$$a)\,\Delta=\begin{vmatrix}-4 & 8 & 4\\ 2 & -4 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0. \quad b)\,\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=6.$$

Ответ: $a)\,\Delta=0,$ система имеет множество ненулевых решений; $b)\,\Delta=6,$ система имеет только нулевое решение.

Пример 31. Найти значение параметра a при котором система имеет множество решений.

$$a)\ \begin{cases}-2x+ay-z=0,\\3x-y+2z=0,\\x+2y-3z=0.\end{cases}\quad b)\ \begin{cases}-2x+ay-z=0,\\3x-y+2az=0,\\x+2y-3z=0.\end{cases}\quad c)\ \begin{cases}-2x+y-z=0,\\x-y+2z=0,\\\sin ax+2y-z=0.\end{cases}$$

Решение: $a)\ \Delta=\begin{vmatrix}-2 & a & -1\\3 & -1 & 2\\1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -5+11a=0 \Rightarrow a=\dfrac{5}{11}.$

$b)\ \Delta=\begin{vmatrix}-2 & a & -1\\3 & -1 & 2a\\1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2a^2+17a-13=0 \Rightarrow a=\dfrac{-17\pm\sqrt{393}}{4}.$

$c)\quad \Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\1 & -1 & 2\\\sin a & 2 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \sin a=0 \quad \Rightarrow a=k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,...$

Ответ: $a)\ a=\dfrac{5}{11};\ b)\ a=\dfrac{-17\pm\sqrt{393}}{4};\ c)\ a=k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,...$

Правило нахождения фундаментальной системы решений

1. Решаем однородную систему методом Гаусса. Количество зависимых переменных равно рангу системы $rg\mathbf{A}$, а количество независимых $k=n\text{-}rg\mathbf{A}$.
2. Находим ФСР, содержащую $k=n\text{-}rg\mathbf{A}$ решений $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots\mathbf{X}_k$. Для этого последовательно полагаем одну из независимых переменных равной единице, а остальные независимые переменные равными нулю.
3. Общее решение системы $\mathbf{X}$ является линейной комбинацией ФСР:

   $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_1\mathbf{X}_2+\ldots+c_1\mathbf{X}_k$.

Пример 32: Решить однородную систему $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+4x_4+x_5=0,\\2x_1+5x_3+9x_4+x_5=0,\\x_1+x_2+3x_3+4x_4+2x_5=0,\\x_1-3x_2+4x_3+3x_4+2x_5=0.\end{cases}$

Решение: 1) Решим систему методом Гаусса, столбец свободных членов не пишем, т.к. он равен нулю.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 5 & 9 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2\\ 1 & -3 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\underset{\substack{(3)-(1)\\(4)-(1)}}{\overset{(2)-2*(1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\underset{(4)+(2)}{\overset{(3)-(2)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\underset{(2)+(3)}{\overset{(1)-3*(3)}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & 0 & 7 & -5\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\overset{2*(1)+(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:cc}2 & 0 & 0 & 14 & -9\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{(2)/2}{\overset{(1)/2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 7 & -4.5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right).$$

Решение системы имеет вид $\begin{cases}x_1 = 7x_4 - 4.5x_5,\\ x_2 = 0.5x_5,\\ x_3 = -x_4 + 2x_5.\end{cases}$.

Переменные x_1, x_2, x_3 зависимые (их количество равно рангу системы, т.е. трем), а x_4, x_5 независимые.

2) Найдем фундаментальную систему решений. Для этого полагаем одну свободную переменную равной 1, а другую 0.

Пусть $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, тогда из формул следует $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}7\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ – первое частное решение.

Пусть $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, тогда из формул следует $x_1 = -4.5$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 2$.

$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}-4.5\\0.5\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ – второе частное решение.

Решения $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ образуют ФСР.

3) Общее решение системы выражается через ФСР:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_2 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4.5 \\ 0.5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.

7. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Определение. Число λ называется собственным значением квадратной матрицы **A**, если существует ненулевой вектор-столбец **X** такой, что **AX=λX.** При этом вектор **X** называется собственным вектором матрицы **A**.

Уравнение **AX=λX** эквивалентно уравнению (**A – λE**)**X=**0. Это однородная система линейных уравнений, нетривиальные решения которой являются искомыми собственными векторами.

Как было отмечено ранее, однородная система имеет нетривиальные решения только тогда, когда ее определитель det(**A – λE**) = 0.

Определение. Уравнение det(**A – λE**) = 0 называется характеристическим, его решения являются собственными значениями матрицы.

Свойства собственных значений и собственных векторов

1) Определитель матрицы равен произведению собственных значений с учетом кратных и комплексных значений.
2) Собственные векторы соответствующие различным собственным значениям линейно независимы.

Пример 33. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения матрицы найдем из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий λ_1=5:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\mathbf{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 & -2 \\ -4 & 1-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1-2x_2=0, \\ -4x_1-4x_2=0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы получается из первого умножением на 2, поэтому его отбрасываем (так должно получаться всегда), в первом уравнении x_1 полагаем равным c_1 и выражаем x_2, окончательно получаем $x_1=c_1$, $x_2=-c_1$.

Собственный вектор $\mathbf{X}_1=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Аналогично находим второй собственный вектор $\mathbf{X}_2=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Как видим, собственные векторы определены неоднозначно, с точностью до умножения на константу.

Найденные собственные векторы линейно независимы, т.к. их координаты не пропорциональны, что соответствует второму свойству.

$\Delta\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=3-8=-5=\lambda_1\cdot\lambda_2=5\cdot(-1)$, что соответствует первому свойству.

Пример 34. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения матрицы найдем из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)+2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1=2+i,\ \lambda_2=2-i.$$

Собственные значения комплексные, следовательно, собственные векторы также комплексные.

Найдем собственный вектор, соответствующий λ_1=2+i:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\mathbf{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2-i & 1 \\ -2 & 1-2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)x_1+x_2=0, \\ -2x_1+(-1-i)x_2=0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы получается из первого умножением на $(-1-i)$, поэтому его отбрасываем, в первом уравнении x_1 полагаем равным c_1 и выражаем x_2, окончательно получаем $x_1=c_1$, $x_2=(i-1)c_1$.

Собственный вектор $\mathbf{X}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}$.

Аналогично находим второй собственный вектор $\mathbf{X}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$.

Пример 35. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственные значения матрицы найдем из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)(1+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1,\ \lambda_3 = 1.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_{1,2} = -1$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_{1,2}\mathbf{E})\mathbf{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1+1 & 1 & -2 \\ 4 & 1+1 & 0 \\ 2 & 1 & -1+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы получается из третьего умножением на 2, поэтому его отбрасываем, полагаем x_2 равным c_1, из первого уравнения выражаем x_3, а из третьего x_1, окончательно получаем $x_1= -c_1/2$, $x_2= c_1$, $x_3= c_1/2$.

Собственный вектор $\mathbf{X}_1 = c_1\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Аналогично находим второй собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 1$,

$$\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. УПРАЖНЕНИЯ

Даны матрицы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}$; $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\6 & 8\end{pmatrix}$; $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$;

$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 9\\1 & 1 & 4\end{pmatrix}$; $\mathbf{H}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}$; $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1\\8\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\9 & 0 & -3\\2 & 1 & 5\end{pmatrix}$; $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\3 & -1 & 0\\3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Вычислить: *1)* **C+F**; *2)* **L+M**; *3)* 2**B**-3**A**; *4)* 4**L**+5**M**; *5)* **AB; BA**; *6)* **AC; CA;** *7)* **BC; CB;** *8)* **CF; FC;** *9)* **BF; FB;** *10)* **AE; EC;** *11)* **FG; GF;** *12)* **BG; GB;** *13)* **AG; GB;** *14)* **GK; KG;** *15)* **HK; KL;** *16)* **HL; LH;** *17)* **KM; MK;** *18)* **LM; ML;** *19)* (2**C**- 6**F**)**B;** *20)* **BAC;** *21)* (3**M**- 5**L**)**KH;** *22)* **A**(3**C+F**)**B.**

Вычислить определители второго порядка:

23) $\begin{vmatrix}1 & 3\\-2 & 4\end{vmatrix}$; *24)* $\begin{vmatrix}4 & -2\\0 & -3\end{vmatrix}$; *25)* $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$;

Вычислить определители третьего порядка, используя правило треугольников: *26)* $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 3 & -4\\0 & 5 & 6\end{vmatrix}$; *27)* $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$; *28)* $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & 0 & 4\\1 & 3 & 1\end{vmatrix}$;

29) Вычислите определитель из примера 26, раскладывая его по первой строке.

30) Вычислите определитель из примера 27, раскладывая его по третьей строке.

31) Вычислите определитель из примера 28, раскладывая его по второму столбцу.

Используя свойства определителей вычислите *32)* $\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{vmatrix}$; *33)* $\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\-1 & 3 & 6\\4 & 2 & 8\end{vmatrix}$.

Вычислите определитель, раскладывая его по строке или столбцу

34) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 6 & 2\\-3 & 2 & 5 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$; *35)* $\begin{vmatrix}0 & 2 & 1 & -1\\2 & 3 & 1 & 1\\3 & 4 & 2 & 1\\-1 & 3 & 4 & 1\end{vmatrix}$.

36) С помощью свойств определителя приведите определители из примеров 34 и 35 к треугольному виду и вычислите их.

37) Вычислите все миноры 1, 2, 3-го порядка матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\-4 & 2 & 1 & 3\\2 & 1 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

38) Вычислите ранг матрицы **A** из примера 37.

Методом окаймляющих миноров вычислите ранг матрицы:

39) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; 40*)* $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 8\end{pmatrix}$;

Вычислите обратные матрицы к матрицам: а) с помощью алгебраических дополнений; б) с помощью метода Гаусса

41) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; *42)* $\mathbf{H}=\begin{pmatrix} -1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$; *43)* $\mathbf{S}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; *44)* $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

Решить системы: а) методом Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса

45) $\begin{cases} 3x-2y=1,\\ x+y=3.\end{cases}$ *46)* $\begin{cases} 4x+y=-1,\\ 2x+4y=6.\end{cases}$ *47)* $\begin{cases} 3x+y=-1,\\ y-5x=10.\end{cases}$ *48)* $\begin{cases} -x+y-1=0,\\ x+2y+3=0.\end{cases}$

49) $\begin{cases} x+2y-3z=0,\\ 3x+y+z=5,\\ x+z=2.\end{cases}$ *50)* $\begin{cases} 2x-y+z=2,\\ 3x+y-2z=8,\\ x-2y+z=0.\end{cases}$ 51*)* $\begin{cases} x+y-z=4,\\ 2y-x+z=0,\\ z-y+x=-3.\end{cases}$ *52)* $\begin{cases} 3x-y+z=2,\\ 2x-y=3,\\ 4x-3y+2z=1.\end{cases}$

Проверить совместность и решить системы методом Гаусса

53) $\begin{cases} x+y+2z=-1,\\ 2x+y-3z=2,\\ 3x+2y-z=3.\end{cases}$ *54)* $\begin{cases} 2x+y-z=4,\\ x+3y-2z=2,\\ -x+2y-z=-2.\end{cases}$ *55)* $\begin{cases} x+y-z+2w=-1,\\ 2x+3y-w=2,\\ 2y+3z-2w=3.\end{cases}$

56) $\begin{cases} 2x-y-3z-w=1,\\ x-y+2z-3w=-2,\\ -x+2y-z+w=3,\\ 4x-4y-5w=-4.\end{cases}$ *57)* $\begin{cases} x+y-2z=-2,\\ 2x-y+3z=1,\\ -x+3y-z=2,\\ 3x+2y+z=3.\end{cases}$ *58)* $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_5=1,\\ 2x_1+4x_2+x_4+3x_5=-2.\end{cases}$

Найти значение параметра *a*, при котором система имеет ненулевое решение

59) $\begin{cases} 4x-ay+2z=0,\\ 3x-2y-5z=0,\\ -2x+y+3z=0.\end{cases}$ *60)* $\begin{cases} x-2y+3z=0,\\ -2x+5y-7z=0,\\ 3x+y+az=0.\end{cases}$ *61)* $\begin{cases} -5x+2y-z=0,\\ ax-y+3z=0,\\ x+6y+4z=0.\end{cases}$ *62)* $\begin{cases} -x-y+3z=0,\\ 2x+ay-3z=0,\\ 3x-4y+z=0.\end{cases}$

Найти фундаментальную систему решений и общее решение систем уравнений

63) $\begin{cases} 3x+3y+7z=0,\\ -x+2y+z=0,\\ 2x+5y+8z=0.\end{cases}$ *64)* $\begin{cases} -2x+2y-4z=0,\\ -x+y-2z=0,\\ 4x-4y+8z=0.\end{cases}$ *65)* $\begin{cases} -3x+2y-z=0,\\ x-2y-z=0,\\ 2x+5y+7z=0.\end{cases}$ *66)* $\begin{cases} 2x+3y-4z=0,\\ x+4y+z=0,\\ -x+6y+11z=0.\end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти собственные значения и векторы матриц

67) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; *68)* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$; *69)* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; *70)* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

71) $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$; *72)* $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$; *73)* $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$; *74)* $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М: Наука, 1974.
2. Фадеев В.С. Сборник задач по линейной алгебре. – М: Высшая школа, 1968.