Министерство образования и науки РФ

Российский государственный университет
нефти и газа имени И. М. Губкина

Кафедра высшей математики

С.И. ВАСИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие для студентов

Москва 2010

Рецензенты:

Угрозов Валерий Вячесеславович – д.ф.-м.н.,профессор;

Иванов Владимир Иосифович – к.ф.-м.н., доцент.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания посвящены одному из важнейших понятий математического анализа - производной функции.

Цель указаний - помочь студентам освоить теорию и овладеть техникой дифференцирования. Материал излагается в краткой форме в виде определений, формулировок теорем и примеров решения типовых задач.

Указания состоят из двух разделов. В первом из них рассматриваются элементы теории, а во втором - техника вычисления производных функций и применение дифференциального исчисления к вычислению пределов. Для приобретения навыков дифференцирования предлагаются упражнения для самостоятельного решения.

I. Теоретические аспекты понятия производной

1. Определение производной

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Рассмотрим предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx, при стремлении последнего к нулю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{1}$$

Определение 1. Если предел (1) существует, то его называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 по аргументу x и обозначают $f'(x_0)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную, равную $+\infty$ или $-\infty$ (случай ∞ исключается), если в этой точке $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$ или соответственно $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 правую или левую производную, если в этой точке существует $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_+(x_0)$ или соответственно $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_-(x_0)$. ($f'_+, f'_-$ - обозначения односторонних производных)

Связь между односторонними производными и просто производной устанавливает следующая

Теорема. Для того чтобы существовала производная $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные от $f(x)$ в точке x_0 справа и слева и были равны между собой, и тогда автоматически они равны $f'(x_0)$.

Доказательство этой теоремы следует из определения предела функции.

Определение 4. Если функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет производную, то говорят, что функция дифференцируема в точке $x = x_0$.

Определение 5. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a,b), то говорят, что она дифференцируема в интервале (a,b).

Определение 6. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Если функция дифференцируема в (a,b), то результатом дифференцирования является новая функция $f'(x)$, определенная в (a,b).

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения: $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дана функция $y(x) = \sqrt{x}$; найти $y'(x)$ и $y'(4)$.

Решение. Приращение функции равно $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

По определению

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Итак, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$.

Пример 2. $y(x)=\sin x$, найти $y'(x)$.

Решение. $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$;

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Итак, $(\sin x)'=\cos x$.

2. Физический смысл производной

Расстояние s, пройденное материальной точкой при прямолинейном движении, является функцией времени $s=s(t), t\in(a,b)$.

Мгновенная скорость материальной точки в момент времени $t_1\in(a,b)$ по определению равна

$$V(t_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(t_1+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s_t'(t_1),$$

т.е. скорость равна производной от пути по времени.

3. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$. Выясним геометрический смысл выражения $\Delta f/\Delta x$, стоящего под знаком предела в

определении производной. Для этого обратимся к графику функции $y = f(x)$ (см. рис. 1).

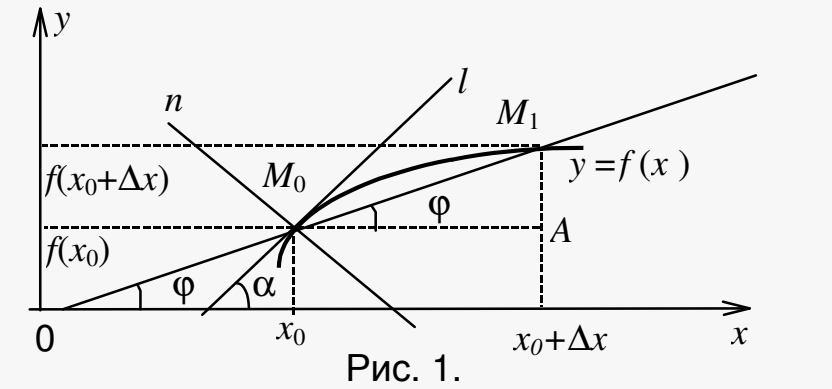

Рис. 1.

Через точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ проведем секущую $M_0 M_1$. В прямоугольном треугольнике $M_0 M_1 A$:

$$\frac{M_1 A}{M_0 A} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ - угол, который секущая $M_0 M_1$ образует с положительным направлением оси Ox. При стремлении $\Delta x \to 0$, точка $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к M_0. Секущая $M_0 M_1$ будет поворачиваться вокруг точки M_0. Угловой коэффициент секущей при $\Delta x \to 0$ будет равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Определение 1. Предельное положение секущей $M_0 M_1$ при стремлении точки M_1 по кривой к точке M_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Итак, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. значение производной $f'(x_0)$ равняется тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в соответствующей точке с положительным направлением оси Ox.

4. Уравнения касательной и нормали

Из предыдущего параграфа следует, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ - это прямая l, проходящая через точку M_0 с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ (см. рис. 1.).

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Определение 1. Нормалью к кривой в данной точке называется прямая n (см. рис. 1), проходящая через данную точку перпендикулярно к касательной в этой точке.

Угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Следовательно, угловой коэффициент нормали $k_n = -1/f'(x_0)$, и уравнение нормали имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (2)$$

Пример 3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y(x) = \sqrt{x}$ в точке $M_0(4;2)$.

Решение. $f'(4) = y'(4) = \frac{1}{4}$ (см. пример 1.).

Уравнение касательной: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ или $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Уравнение нормали: $y - 2 = -4(x - 4)$ или $y = -4x + 18$.

5. Дифференцируемость функций

Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции устанавливает следующая

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$ то, она в этой точке непрерывна.

Доказательство теоремы можно посмотреть в одном из учебников [1,2].

Следствие. В точках разрыва функция не дифференцируема.

Утверждение, обратное теореме, неверно: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то отсюда не следует, что она имеет производную в этой точке.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Функция

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases} \qquad \text{(см. рис. 2.)}$$

в точке $x = 0$ имеет разрыв и, следовательно, согласно теореме, не дифференцируема в этой точке.

Пример 5. Непрерывная функция

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{для x} \le 2, \\ (x-4)^2 & \text{для } x > 2. \end{cases} \qquad \text{(см. рис. 3)}$$

дифференцируема в любой точке числовой прямой, кроме точки $x = 2$.

Действительно, при $x < 2$ имеем: $y'(x) = \left(x^2\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x,$$

при $x > 2$ имеем:

$$y'(x) = \left((x-4)^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-4)^2 - (x-4)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x-4)^2 + 2(x-4)\Delta x + \Delta x^2 - (x-4)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2(x-4) + \Delta x) = 2(x-4)$$

при $x = 2$ имеем: $\begin{array}{l} y'_-(2) = (x^2)'\big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4, \\ y'_+(2) = ((x-4)^2)'\big|_{x=2} = 2 \cdot (2-4) = -4, \end{array}$

$y'_-(2) \ne y'_+(2)$, следовательно, $y'(2)$ не существует.

В точках $A(0;0)$ и $B(4;0)$ производная $y'(x)$ равна нулю. Ось Ox является касательной к графику функции в точках A и B. В точке $C(2;4)$ функция не дифференцируема. Геометрически этому соответствует тот факт, что в точке C нельзя провести определенную касательную (см. рис. 3.).

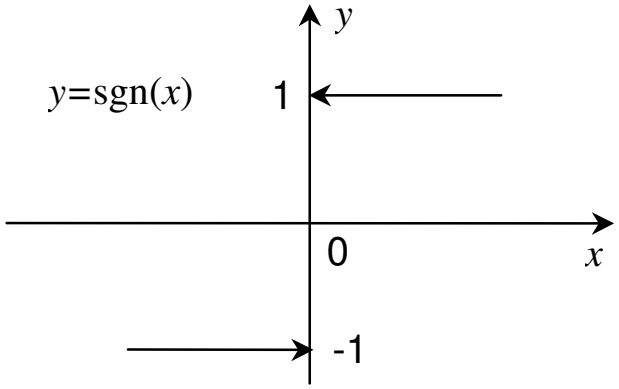

Рис. 2

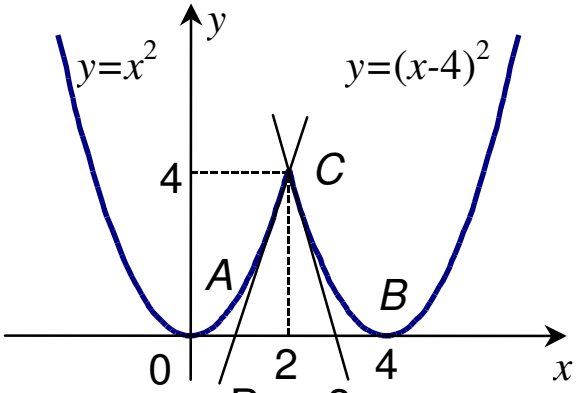

Рис. 3

Пример 6. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ (см. рис. 4.) определена и непрерывна для всех значений аргумента. Вычислим производную

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})((x+\Delta x)^{2/3}+(x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3})}{\Delta x((x+\Delta x)^{2/3}+(x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x((x+\Delta x)^{2/3}+(x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3})}=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ имеет конечную производную $y'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ во всех точках числовой оси, кроме $x=0$. В точке $x=0$ имеем:

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty.$$

Таким образом, $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=0$ имеет бесконечную производную. Геометрически этому соответствует тот факт, что касательная в точке $x=0$ образует с осью Ox угол $\pi/2$, т.е. совпадает с осью Oy (см. рис. 4.).

Пример 7. Функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ (см. рис. 5.) определена и непрерывна для всех значений аргумента, но в точке $x=0$ не дифференцируема.

Действительно
$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=-\infty,$$
$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=+\infty.$$

$y'_-(0)\neq y'_+(0)$, следовательно, $y'(0)$ не существует.

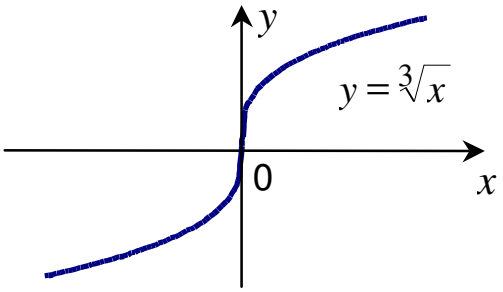

Рис. 4

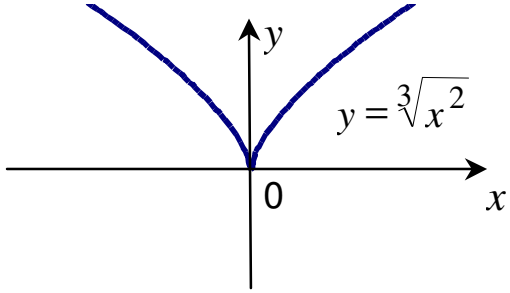

Рис. 5

II. Техника дифференцирования

6. Сложная функция

Для того чтобы овладеть техникой дифференцирования, необходимо иметь четкое представление о понятии функции и способах ее задания. Одним из способов образования новой функции является операция взятия функции от функции.

Пусть даны две функции $z = f(y)$ и $y = g(x)$.

Определение 1. Сложной функцией (или композицией функций f и g) называется функция $z = h(x)$, значения которой вычисляются по правилу $h(x) = f(g(x))$ (т.е. сначала вычисляется $g(x)$, при этом получается некоторое число y, а затем вычисляется значение f в точке y).

<u>Замечание.</u> Запись $f(g(x))$ обозначает именно композицию функций f и g, а не их умножение.

Для вычисления значений и производной сложной функции надо суметь разобраться в последовательности производимых операций, т.е. представить сложную функцию как композицию более простых.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8. Функция $y = \sin x^2$ является композицией двух функций: $y = f(u(x))$, где $u(x) = x^2$, $f(u) = \sin u$. Функция синус является внешней, а степенная - внутренней.

Вычислим $y\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$: $\quad y\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right) = \sin\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)^2\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Процесс вычисления производился в два этапа: сначала вычислили значение внутренней функции $u(x) = x^2$ в точке $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, при этом получили значение $u = \frac{\pi}{4}$, а затем вычислили значение внешней функции $f(u) = \sin u$ в точке $\frac{\pi}{4}$.

Пример 9. Функция $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ является композицией функций: $y = u(f(x))$, где $f(x) = \sin x$ внутренняя функция, а $u(f) = f^2$ внешняя.

Вычислим $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$: $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Пример 10. Функция $y = \ln^3 \operatorname{tg} x = \left(\ln \operatorname{tg} x\right)^3$ является композицией трех функций: $y = f(g(u(x)))$, где $u(x) = \operatorname{tg} x,\ g(u) = \ln u,\ y = f(g) = g^3$.

7. Дифференцирование функций, заданных аналитически

Отвлекаясь от содержательного определения производных функций, их нахождение можно истолковать с чисто алгебраической точки зрения как своеобразное преобразование аналитического выражения (функции).

Определение 1. Функция вида $y = f(x)$, где f есть выражение, составленное из простейших элементарных функций ($x^n, a^x, \sin x, \arcsin x$ и т. д.) с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, называется функцией, заданной аналитически.

Дифференцирование функций производится на основе формул и правил дифференцирования. При записи этих правил, на знак производной (′) следует смотреть как на знак особого преобразования, так же как смотрим на знаки сложения, умножения и др.

В записи формул и правил дифференцирования $u = u(x)$ и $v = v(x)$ обозначают любые аналитические выражения (функции). Независимой переменной величиной является x.

Формулы дифференцирования	
Ф.0. $(x)' = 1$.	Ф.6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
Ф.1. $(c)' = 0$, c- число.	Ф.7. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
Ф.2. $(u^p)' = p \cdot u^{p-1} \cdot u'$, p- число.	Ф.8. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
Ф.3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, a- число.	Ф.9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
Ф.3.а. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.	Ф.10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
Ф.4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, a- число.	Ф.11. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
Ф.4.а. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.	Ф.12. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
Ф.5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.	
Правила дифференцирования	
П.1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (производная суммы и разности).	П.2.а. $(c \cdot v)' = c \cdot v'$ (c- постоянный множитель).
П.2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ (производная произведения).	П.3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ (производная частного).

Формулы и правила дифференцирования доказываются с использованием определения производной (см. примеры 1-7), теорем о производной сложной и обратной функции. Вывод формул и правил можно посмотреть в учебнике [1].

Алгоритм вычисления производных функций

1-й шаг. Устанавливаем, какое действие в данном выражении производится последним. Под действием мы понимаем четыре арифметические операции, а также операции вычисления элементарных функций.

2-й шаг. Если последнее действие арифметическое, то применяем соответствующее правило дифференцирования, иначе применяем формулу дифференцирования, соответствующую последнему действию.

3-й шаг. В результате выполнения 2-го шага, дифференцирование заданного выражения сводится к дифференцированию одного или двух более простых выражений. К каждому из них применяем последовательно шаги 1 и 2, и так до тех пор, пока дифференцирование не будет закончено.

Покажем применение этого общего алгоритма на примерах.

Пример 11. Найти производную функции $y = 5x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}$.

Решение. При дифференцировании номера применяемых формул и правил будем писать над знаком равенства.

$$y' = \left(5x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}\right)' \overset{\text{п .1.}}{=} \left(5x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}\right)' + \left(\frac{\pi}{2}\right)' \overset{\text{п .1.,Ф.1.}}{=}$$

$$= \left(5x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x^2}\right)' + \left(x^{1/2}\right)' + 0 \overset{\text{п .1.,Ф.2.}}{=} \left(5x^3 + \frac{x^2}{2}\right)' -$$

$$-\left(4 \cdot x^{-2}\right)' + \frac{1}{2}x^{-1/2}x' \overset{\text{п .1.,п .2.а.,Ф 0.}}{=} \left(5 \cdot x^3\right)' + \left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)' - 4\left(x^{-2}\right)' + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\overset{\text{п .2.а.,Ф.2.}}{=} 5\left(x^3\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' - 4(-2)x^{-3}x' + \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Ф.2.,Ф.0.}}{=}$$

$$= 5 \cdot 3x^2x' + \frac{1}{2}2x \cdot x' + 8\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Ф.0.}}{=} 15x^2 + x + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Применяя формулы дифференцирования, мы полагали $u(x) = x$.

Проанализировав решение, можно сделать несколько выводов:

1) Если в выражении содержатся корни, то следует избавляться от них, используя правило $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$, а затем, применяя формулу Ф.2., вычислять производную.

2) Выражения вида $v(x)/c$ и $c/v(x)$ удобно представлять как произведения $\frac{1}{c} \cdot v(x)$ и $c \cdot \left[v(x)\right]^{-1}$ соответственно, а затем, применяя правило П.2.а., вычислять производную.

Пример 12. Продифференцировать функцию $y = \ln a \cdot \log_a x + \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$.

Решение. $$y' = \left(\ln a \cdot \log_a x + \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}\right)' \overset{\text{П.1.}}{=} \left(\ln a \cdot \log_a x\right)' + \left(\frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}\right)'. \qquad (1)$$

Продифференцируем отдельно каждое из полученных выражений. (т.к. a - const, то $\ln a$ - const)

$$\left(\ln a \cdot \log_a x\right)' \overset{\text{п.2.а.}}{=} \ln a \left(\log_a x\right)' \overset{\text{Ф.4.}}{=} \ln a \frac{1}{x \cdot \ln a} x' \overset{\text{Ф.0.}}{=} \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

$$\left(\frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}\right)' \overset{\text{п.3.}}{=} \frac{\left(e^x\right)' \operatorname{arctg} x - e^x \left(\operatorname{arctg} x\right)'}{\left(\operatorname{arctg} x\right)^2} \overset{\text{Ф.3.а., Ф.11.}}{=}$$
$$= \frac{e^x x' \operatorname{arctg} x - e^x \frac{1}{1+x^2} x'}{\left(\operatorname{arctg} x\right)^2} \overset{\text{Ф.0.}}{=} \frac{e^x \operatorname{arctg} x - e^x \frac{1}{1+x^2}}{\left(\operatorname{arctg} x\right)^2}. \qquad (3)$$

Теперь, подставив из (2) и (3) в (1), найдем окончательно

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{e^x \operatorname{arctg} x - e^x \frac{1}{1+x^2}}{\left(\operatorname{arctg} x\right)^2}.$$

Пример 13. Найти производную функции $y = \sin x^2$.

Решение. Данная функция является сложной (см. пример 8.). Взятие синуса от x^2 последнее действие, совершенное над переменной. Поэтому сначала применяем формулу Ф.5., полагая $u = x^2$:

$$y' = \left(\sin x^2\right)' \overset{\text{Ф.5.}}{=} \left(\cos x^2\right)\cdot\left(x^2\right)' \overset{\text{Ф.2.}}{=} \left(\cos x^2\right)\cdot 2x\cdot x' \overset{\text{Ф.0.}}{=} 2x\cos x^2.$$

Пример 14. Найти производную функции $y = \sin^2 x$.

Решение. В отличие от предыдущего примера, взятие синуса - первое действие, а возведение в квадрат - второе (последнее). Поэтому, при дифференцировании сначала применяем формулу Ф.2., полагая $u = \sin x$:

$$y' = \left[(\sin x)^2\right]' \overset{\text{Ф.2.}}{=} 2\sin x(\sin x)' \overset{\text{Ф.5.}}{=} 2\sin x\cdot\cos x\cdot x' \overset{\text{Ф.0.}}{=} 2\sin x\cos x..$$

Пример 15. Найти производную функции $y = \ln^3 \operatorname{tg} x$.

Решение. Для того чтобы легче было определить последнее действие, перепишем наше выражение следующим образом: $y = \ln^3 \operatorname{tg} x = [\ln \operatorname{tg} x]^3$.

Теперь проще заметить, что последнее действие - возведение в куб.

Вычисляем производную:

$$y' = \left([\ln \operatorname{tg} x]^3\right)' = [\text{Ф.2., полагая } u = \ln \operatorname{tg} x] = 3\cdot[\ln \operatorname{tg} x]^2\cdot[\ln \operatorname{tg} x]' =$$
$$= [\text{Ф.4.а., } u = \operatorname{tg} x] = 3\ln^2 \operatorname{tg} x\,\frac{1}{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)' \overset{\text{Ф.7.}}{=}$$

$$= 3\ln^2 \operatorname{tg} x\,\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x' \overset{\text{Ф.0.}}{=} 3\ln^2 \operatorname{tg} x\,\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 16. Продифференцировать функцию $y = \dfrac{e^x \cos\sin x}{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}$.

Решение. Прежде всего, отметим, что в выражении $e^x \cos\sin x$ знак умножения стоит между e^x и $\cos\sin x$, а $\cos\sin x$ - сложная функция. Вычислим производную:

$$y' = \left(\frac{e^x \cos\sin x}{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}\right)' \overset{\text{п.3.}}{=} \frac{\left(e^x \cos\sin x\right)'\sqrt{\operatorname{tg} x^2} - \left(e^x \cos\sin x\right)\left(\left(\operatorname{tg} x^2\right)^{1/2}\right)'}{\left(\sqrt{\operatorname{tg} x^2}\right)^2}. \qquad (1)$$

Каждую из полученных производных вычислим отдельно:

(2)

$$\left(\left(\operatorname{tg} x^2\right)^{1/2}\right)' \overset{\text{Ф.2.}}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} x^2\right)^{-1/2}\left(\operatorname{tg} x^2\right)' \overset{\text{Ф.7.}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}\frac{1}{\cos^2 x^2}\left(x^2\right)' \overset{\text{Ф.2.}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}\frac{1}{\cos^2 x^2}2x\cdot(x)' \overset{\text{Ф.0.}}{=} \frac{2x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^2}\cos^2 x^2}. \qquad (3)$$

Подставив выражения из (2) и (3) в (1), найдем окончательно

$$y' = \frac{e^x(\cos\sin x - \sin\sin x\cdot\cos x)\sqrt{\operatorname{tg} x^2} - \dfrac{xe^x\cos\sin x}{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}\cos^2 x^2}}{\operatorname{tg} x^2}.$$

Пример 17. Найти производную функции $y = 4^{\frac{\sin\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{\sin x}}}$.

Решение. Имея достаточные навыки дифференцирования, промежуточные выкладки можно опускать и сразу писать ответ.

$$y' = 4^{\frac{\sin\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{\sin x}}}\cdot\ln 4\,\frac{\cos\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x+\sqrt[3]{\sin x}\right) - \sin\sqrt{x}\left(1+\dfrac{\cos x}{3\cdot\sqrt[3]{\sin^2 x}}\right)}{\left(x+\sqrt[3]{\sin x}\right)^2}.$$

Пример 18. Найти тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \sqrt{x^2+3}$ в точке $x = 2$.

Решение. Тангенс угла наклона касательной — значение производной в точке касания (см. п. 3): $y'(x) = \dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+3}}$; $\operatorname{tg}\alpha = y'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{4+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

8. Производная показательно-степенной функции

Определение 1. Функция вида $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ называется показательно-степенной функцией (п-с. ф.).

Например, функции $y = x^x$, $y = (\sin x)^{\cos x}$, $y = (\ln x)^{x\cdot\operatorname{arctg} x}$ являются п-с.ф.

К п-с. ф. непосредственно применять правила и формулы дифференцирования нельзя. Действительно, по формуле Ф.2. вычисляется производная степенной функции, у которой показатель $p = \text{const}$, а у п-с. ф. показатель $\psi(x)$ является функцией. Формулой Ф.3. также пользоваться нельзя, т. к. основание в Ф.3. $a = \text{const}$, а у п-с. ф. - $\varphi(x)$ функция. Поэтому,

прежде чем дифференцировать п-с. ф., следует с помощью основного логарифмического тождества привести ее к показательной функции.

Основное логарифмическое тождество: $a = e^{\ln a}$.

Применим его к п-с.ф.: $y = \varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\ln \varphi(x)^{\psi(x)}} = e^{\psi(x)\ln \varphi(x)}$

Итак, мы привели п-с. ф. к показательной функции, которую можно продифференцировать, применяя формулы и правила дифференцирования.

Пример 19. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Приведем нашу п-с. ф. к показательной функции:

$$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

Теперь дифференцируем уже показательную функцию:

$$y' = \left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Пример 20. Найти производную функции $y = (\ln x)^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2}$.

Решение. $y = (\ln x)^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2} = e^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2 \ln\ln x}$.

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2 \ln\ln x}\left(x\cdot \operatorname{arctg} x^2 \ln\ln x\right)' = \\
&= (\ln x)^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2}\left[\left(x\cdot \operatorname{arctg} x^2\right)'\ln\ln x + x\cdot \operatorname{arctg} x^2 (\ln\ln x)'\right] = \\
&= (\ln x)^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2}\left[\left(\operatorname{arctg} x^2 + x\frac{2x}{1+x^4}\right)\ln\ln x + x\cdot \operatorname{arctg} x^2 \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right] = \\
&= (\ln x)^{x\cdot \operatorname{arctg} x^2}\left[\left(\operatorname{arctg} x^2 + \frac{2x^2}{1+x^4}\right)\ln\ln x + \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\ln x}\right].
\end{aligned}$$

Пример 21. Найти производную функции $y = x^{x^x}$.

Решение. $y = x^{x^x} = e^{x^x\cdot \ln x}$;

$$y' = \left(e^{x^x\cdot \ln x}\right)' = e^{x^x\cdot \ln x}\cdot\left(x^x\cdot \ln x\right)' = x^{x^x}\left(\left(x^x\right)'\ln x + x^x(\ln x)'\right).$$

Используя результат примера 19, в котором мы вычислили производную функции x^x, окончательно получим:

$$y' = x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x\frac{1}{x}\right).$$

9. Производная функции, заданной неявно

Пусть значения переменных x и y связаны равенством

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где F есть функция двух переменных.

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a,b), такова, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то говорят, что функция $y = f(x)$ задана неявным образом с помощью равенства (1).

Например, уравнение окружности (см. рис. 6.) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ неявно определяет следующие элементарные (явные) функции

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \; y = -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

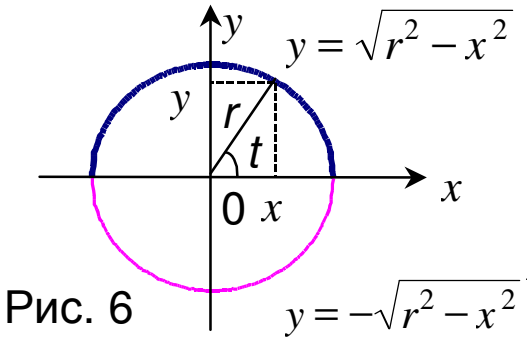

Рис. 6

Действительно, после подстановки в уравнение окружности этих значений y, получаем тождество $x^2 + \left(r^2 - x^2\right) - r^2 \equiv 0.$

Каждая явная функция $y = f(x)$ всегда может быть представлена и как неявная $y - f(x) = 0$. Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно.

Так, например, функции заданные неявно уравнениями

$$y^5 - x + 3y^2 = 0; \qquad \mathrm{tg}\frac{x}{y} + e^y - x = 0$$

не выражаются явно через элементарные функции, т. к. эти уравнения неразрешимы относительно y.

Для нахождения производной функции, заданной неявно, необязательно представлять ее в явном виде. На уравнение $F(x,y)=0$ можно смотреть как на тождество. Дифференцируя обе его части по x, считая, что y есть функция от x, получим линейное уравнение относительно y'. Выразив из него y', найдем производную неявной функции.

Пример 22. Найти производную функции, заданной неявно уравнением

$$y^4 + xy + \pi^2 = 0.$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства:

$$4y^3y' + x'y + xy' = 0;$$

($x'_x = 1$, но $y'_x \neq 1$, т. к. дифференцируем по x).

Группируем слагаемые, содержащие y': $y'(4y^3 + x) = -y.$

Откуда следует $y' = -\dfrac{y}{4y^3 + x}.$

Пример 23. Найти y' от неявной функции

$$\sin\frac{x}{y^2} + e^{y\cdot\operatorname{tg}x} = \operatorname{arctg}x^2.$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства:

$$\cos\frac{x}{y^2}\left(\frac{x'y^2 - 2yy'x}{y^4}\right) + e^{y\cdot\operatorname{tg}x}\left(y'\operatorname{tg}x + \frac{y}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{1+x^4}2x.$$

Раскрываем скобки:

$$\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y^2} - \frac{2x}{y^3}y'\cos\frac{x}{y^2} + y'\operatorname{tg}x\cdot e^{y\cdot\operatorname{tg}x} + \frac{y}{\cos^2 x}e^{y\cdot\operatorname{tg}x} = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Группируем слагаемые, содержащие y':

$$y'\left(\operatorname{tg}x\cdot e^{y\cdot\operatorname{tg}x} - \frac{2x}{y^3}\cos\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y^2} - \frac{y\cdot e^{y\cdot\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}.$$

Отсюда
$$y' = \frac{\dfrac{2x}{1+x^4} - \dfrac{1}{y^2}\cos\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y\cdot e^{y\cdot\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}x\cdot e^{y\cdot\operatorname{tg}x} - \dfrac{2x}{y^3}\cos\dfrac{x}{y^2}}.$$

Пример 24. Написать уравнение касательной к кривой

$$\ln\frac{y^3}{x}+e^{x\cdot y}=e \qquad \text{в точке} \quad M(1,1).$$

Решение. Точка $M(1,1)$ действительно принадлежит нашей кривой, т. к. ее координаты удовлетворяют уравнению линии:

$$\ln\frac{1^3}{1}+e^{1\cdot 1}=e.$$

Уравнение касательной имеет вид (см. п. 4) $y-y_0=y'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)$; $x_0=1, y_0=1$; Найдем $y'(x_0,y_0)$. Продифференцируем уравнение кривой

$$\frac{x}{y^3}\cdot\frac{3y^2y'x-y^3x'}{x^2}+e^{x\cdot y}(y+xy')=0.$$

В получившееся равенство вместо x и y подставим координаты точки M и выразим y':

$$\frac{1}{1^3}\frac{3\cdot 1^2\cdot 1y'-1^3\cdot 1}{1^2}+e^{1\cdot 1}(1+1\cdot y')=0;$$

$$3y'-1+e+e\cdot y'=0; \qquad y'(1,1)=\frac{1-e}{3+e}.$$

Уравнение искомой касательной принимает следующий вид

$$y-1=\frac{1-e}{3+e}(x-1) \text{ или } y=\frac{1-e}{3+e}x+\frac{2+2e}{3+e}.$$

10. Производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом r (см. рис. 6.). Как мы отметили в предыдущем параграфе, она задается уравнением

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

Каждая точка окружности однозначно характеризуется декартовыми координатами x и y. Выберем в качестве новых координат расстояние от точки окружности до начала координат, т. е. радиус окружности r и угол t, который составляет радиус с положительным направлением оси Ox. Декартовы

координаты x и y выражаются через новые - r и t следующим образом (см. рис. 6.)

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Итак, мы выразили переменные x и y через третью переменную t, которую назовем параметром. Такой способ задания окружности называется параметрическим.

Дадим общее определение.

Два уравнения: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in [T_1, T_2]$ (φ и ψ аналитические выражения)

называются параметрическими уравнениями кривой, t - параметром, а способ задания функции - параметрическим.

Вычислим производную y'_x функции, заданной параметрически. Для этого поступим формальным образом: $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$.

Итак, $y'_x = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$.

Более строгое доказательство формулы можно посмотреть в учебнике [1].

Пример 25. Найти производную y'_x функции

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{t} \\ y = t(1 - e^{\operatorname{tg} t}) \end{cases}$$

Решение.

$$x'_t = \left(\operatorname{arctg}^2 \sqrt{t}\right)' = 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{t}\right)\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}},$$

$$y'_t = \left(t\left(1-e^{\operatorname{tg}t}\right)\right)' = 1-e^{\operatorname{tg}t} + t\left(-e^{\operatorname{tg}t}\right)\frac{1}{\cos^2 t},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-e^{\operatorname{tg}t} - \dfrac{t\cdot e^{\operatorname{tg}t}}{\cos^2 t}}{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{t}\right)}(1+t)\sqrt{t}.$$

Пример 26. Написать уравнение нормали к кривой

$$\begin{cases} x = \sin\ln t, \\ y = \operatorname{arcctg} t^2 \end{cases} \qquad \text{в точке } t = 1.$$

Решение. Уравнение нормали имеет вид (см. п. 4)

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(x_0)}(x - x_0);$$

$$x_0 = x(1) = \sin\ln 1 = 0; \quad y_0 = y(1) = \operatorname{arcctg} 1^2 = \frac{\pi}{4};$$

$$x'_t = (\cos\ln t)\frac{1}{t}; \quad y'_t = -\frac{1}{1+t^4}2t;$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{2t\cdot t}{(1+t^4)\cos\ln t}; \quad y'_x(x_0)\big|_{t=1} = -1;$$

Уравнение искомой нормали принимает вид $y - \dfrac{\pi}{4} = x$ или $y = x + \dfrac{\pi}{4}$.

11. Производные высших порядков

Как мы уже отмечали ранее в п. 1, результатом дифференцирования функции $y = f(x)$ является новая функция $y'(x)$, и поэтому можно говорить о производной от производной.

$y'(x)$ называется производной первого порядка функции $y = f(x)$.

Производная от первой производной называется производной второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначается

$$\left(y'(x)\right)' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''.$$

Аналогично определяется производная третьего порядка:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \left(y''\right)'.$$

Вообще, производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная (первого порядка) от производной (n-1)-го порядка и обозначается символом $y^{(n)}$: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Пример 27. Найти $y^{(5)}$ функции $y = \sin^2 x$.

Решение.

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x;$$

$$y'' = \left(\sin 2x\right)' = 2\cos 2x;$$

$$y''' = \left(2\cos 2x\right)' = -4\sin 2x;$$

$$y^{(4)} = \left(-4\sin 2x\right)' = -8\cos 2x;$$

$$y^{(5)} = (-8\cos 2x)' = 16\sin 2x.$$

12. Правило Лопиталя

Аппарат дифференциального исчисления позволяет автоматизировать процесс вычисления многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0.

Неопределенности $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ раскрываются с помощью следующей теоремы.

Правило Лопиталя. Если

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль;

2) $f(x)$ и $\varphi(x)$ обе бесконечно малые или обе бесконечно большие при $x \to a$, т. е. если частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет в точке $x = a$ неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$,

то $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$ при условии, что предел отношения производных существует.

Доказательство теоремы можно посмотреть в учебнике [2].

Замечание 1. Правило применимо и в случае, когда $a = \infty$.

Замечание 2. Если после применения правила Лопиталя частное вновь дает неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $f'(x), \varphi'(x)$ удовлетворяют требованиям теоремы, то снова можно воспользоваться правилом Лопиталя, т. е. перейти к отношению вторых производных и т. д. (см. примеры).

Замечание 3. Следует помнить, что предел отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать, в то время как предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует (см. пример 30).

Пример 28. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$.

Решение. Функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $\varphi(x) = \sin 3x$ удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому, можно записать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2 x}{3\cos 3x} = \frac{1}{3}.$$

Пример 29. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Пример 30. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-\sin\pi x}{x}$.

Решение. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-\sin\pi x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{\sin\pi x}{x}\right)=4-0=4$

существует,

в то время как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x-\sin\pi x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}(4-\pi\cos\pi x)$ не существует.

Другие неопределенности можно свести к двум предыдущим.

Неопределенность вида $\infty-\infty$**.** Если $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то пишем

$$\lim_{x\to a}(f-\varphi)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to a}\frac{\left(1/\varphi-1/f\right)}{1/f\cdot\varphi}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Пример 31. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+1-\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{1/x}{1/x+1/x^2}=\frac{1}{2}.$$

Неопределенность вида $0\cdot\infty$**.** Если $f(x)\to0$ и $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то пишем

$$\lim_{x\to a}(f\cdot\varphi)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to a}\frac{f}{1/\varphi}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ или } \lim_{x\to a}(f\cdot\varphi)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi}{1/f}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

При этом выбираем тот способ, который позволяет легче получить конечный результат.

Пример 32. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}(\ln x\cdot\sin x)$.

Решение.

Степенные неопределенности 1^{∞}; 0^0; ∞^0 приводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью основного логарифмического тождества (см. п. 8).

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)^{\psi(x)}=\begin{bmatrix}0^0\\ \infty^0\\ 1^{\infty}\end{bmatrix}=\lim_{x\to a}e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\ln\varphi(x)}=e^{[0\cdot\infty]}.$$

Пример 33. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin^2 x\right)^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\left(\sin^2 x\right)^x=\left[0^0\right]=\lim_{x\to0}e^{x\ln\sin^2 x}=e^{[0\cdot\infty]}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\sin^2 x}{1/x}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\ln\sin^2 x\right)'}{\left(1/x\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}}{-1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-2\cos x\frac{x^2}{\sin x}\right)}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}(-2\cos x)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(x^2\right)'}{(\sin x)'}}=e^{-2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\cos x}}=e^0=1.$$

13. Частные производные функции многих переменных

Производная от функции $u = f(x, y, z, ...t)$ по x, взятая в предположении, что все остальные аргументы $y, z, \ldots t$ являются постоянными величинами, называется частной производной от функции u по x, и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные от функции u по каждому из остальных аргументов.

Пример 34.. Найти все частные производные первого порядка от функции $u = \sqrt[x]{e^y}$.

Решение.

$$u'_x = \left(\sqrt[x]{e^y}\right)'_x = \left(e^{y/x}\right)'_x = e^{y/x}\left(y/x\right)'_x = \frac{-ye^{y/x}}{x^2}.$$

$$u'_y = \left(\sqrt[x]{e^y}\right)'_y = \left(e^{y/x}\right)'_y = e^{y/x}\left(y/x\right)'_y = \frac{e^{y/x}}{x}.$$

Упражнения

1. Найти производные функций, пользуясь непосредственно определением производной:

а) $y = c$; б) $y = x$; в) $y = \cos x$; г) $y = e^x$.

2. а) Даны функции $u(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \log_4 x$. Составить функции $u(f(g(x)))$, $u(g(f(x)))$, $f(u(g(x)))$, $f(g(u(x)))$, $g(u(f(x)))$, $g(f(u(x)))$.

б) Даны функции $u(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = \arcsin x$. Составить функции $u(f(g(x)))$, $u(g(f(x)))$, $f(u(g(x)))$, $f(g(u(x)))$, $g(u(f(x)))$, $g(f(u(x)))$.

Вычислить производные функции:

3. а) $y = 3x^2 + x\sqrt{x} - \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x}{e} + \ln 5$; б) $y = \sqrt{x}\log_3 x$;

в) $y = \arccos x - \sqrt[3]{x}\operatorname{arcctg} x$; г) $y = x + x\operatorname{ctg} x$;

. д) $y = \frac{3\arccos x - \ln 3}{\operatorname{tg} x \cdot \ln x}$; е) $y = \frac{\log_\pi x \cdot \operatorname{arcctg} x}{\sqrt{x}} - 4^x \cdot x^4$;

ж) $y=\dfrac{2+4x}{\sqrt{x}-\pi}$; з) $y=\dfrac{e^x \operatorname{arctg} x}{3^x}$;

и) $y=\dfrac{\pi \arcsin x}{e-\ln x}$; к) $y=2^x+\dfrac{x^2}{2\sin x}$;

4. а) $y=e^{3x}$; б) $y=\ln^2 x$; в) $y=\ln x^2$;

г) $y=\sin\cos x$; д) $y=\operatorname{tg}^2 \arccos x$; е) $y=3^{\operatorname{ctg} x}$;

ж) $y=\operatorname{arcctg}(1/x)$ з) $y=2\cos 2x^2$; и) $y=\sqrt[3]{\ln\operatorname{tg} x}$;

к) $y=\operatorname{tg}\cos\cos x$; л) $y=\ln^2\operatorname{tg}\ln x$; м) $y=\arcsin\sqrt{\cos 2x}$;

н) $y=\sqrt{\sin x^2}$; о) $y=2^{\cos^2 x}$; п) $y=\operatorname{ctg}^2 \sin x$;

5. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos 4x}}$; б) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\ln 5x}{\sin x}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{\sin\cos 3x}{\ln x\cdot\operatorname{tg} x^2}}$;

г) $y=x\sin(x\cos x)$; д) $y=x^2-\operatorname{tg}(x-\cos x)$; е) $y=3\log_4\left(\sqrt[3]{\arcsin x}\right)$;

ж) $y=\dfrac{e^{3\operatorname{tg} x}\cdot\sin 5x}{\log_4\sqrt{x\cdot\operatorname{tg} x}}$; з) $y=\dfrac{\sin\ln x-\ln\sin x}{5}$; и) $y=\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sin x\ln x}\right)$;

к) $y=e^{x^2\sin\ln x}$; л) $y=x\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{1}{\sin\ln x}\right)$; м) $y=\dfrac{e^{x^2}e^{3x}}{\sin 5}-\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x+a}}{\ln 3-4^{\ln x}}}$;

н) $y=\sqrt{\sin x}-\dfrac{x}{\cos 3x}$; о) $y=\dfrac{x-\operatorname{tg}(x\sin x)}{1-\arccos^2\ln x}$; п) $y=x\dfrac{2^{\sin x}}{x-3\cos 4x}$;

6. а) $y=x^{\sin x}$; б) $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$; в) $y=\left(\sqrt{\ln x}\right)^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$;

г) $y=\left(\sin x^2\right)^{x\cos\sqrt{x}}$; д) $y=\left(x\pi^x\right)^{\arcsin 3x}$; е) $y=[\operatorname{tg}(x\sin x)]^{x^2}$;

ж) $y=(\cos 3x)^{\cos^3 x}$; з) $y=\operatorname{tg}\left(x^{\arcsin 2x}\right)$; и) $y=x^{\cos^x x}$;

7. а) $\begin{cases} x=t\sin t, \\ y=\sqrt{\cos t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=a\operatorname{tg}^2\sqrt{t}, \\ y=\ln\operatorname{tg} t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=t(1-e^t), \\ y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{t-\sin t}{\ln^2 t}\right); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{\sin t\operatorname{tg} t}, \\ y=\arcsin e^t; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x=t\cdot\sqrt[3]{t\operatorname{tg} t}, \\ y=\cos\ln 3t; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x=a\operatorname{tg}^2\sin(1/t), \\ y=\ln^2\operatorname{tg} t^2; \end{cases}$

8. а) $y=\sin\ln y+\cos x$; б) $\operatorname{ctg} xy-\operatorname{tg}^2 x=\sqrt{\pi}$; в) $y+\sin y=\sqrt{x}$;

г) $y^3+\sin(xy)=1/y^2$; д) $y\sin x+\cos^2 y=e^x$; е) $y-\ln\frac{y^2}{\sqrt{x}}+\cos xy=e^5$;

9. Найти тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции:

а) $y=x\sqrt{x}-3/\sqrt{x}$ в точке x=4; б) $y=\ln\sin x$ в точке $x=\pi/4$;

в) $\begin{cases} x=\sqrt{5}t-\sin 2t, \\ y=\operatorname{ctg}\left(t+\pi/4\right) \end{cases}$ в точке $t=0$; г) $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\operatorname{arcctg}^2 t \end{cases}$ в точке $t=0$;

д) $y^2-7xy+x+11=0$ в точке x=0; е) $\sin^2 y+x+e^{yx}=2$ в точке y=0.

10. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к графику функции:

а) $y=e^{\sin^2 x}$ в точке $x=\pi/4$; б) $y=\sqrt{x+4}$ в точке x=5;

в) $\begin{cases} x=t^2-5t+7, \\ y=\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{cases}$ в точке $x=1$; г) $\begin{cases} x=-5t+7, \\ y=\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{cases}$ при t=1;

д) $y^2-6y\sin^2 x+2=0$ при $x=\pi/4$; е) $y\cdot x+\operatorname{tg} y+2=0$ при $y=\pi/4$.

11. Вычислить производные высших порядков:

а) $y=\cos\ln x$. Найти y''. б) $y=x\arccos^3 x$. Найти y''.

в) $y=\ln^2(1-x)$. Найти y'''. г) $y=5x^3-12x^2-6$. Найти $y^{(n)}$.

Используя правило Лопиталя вычислить:

12. а) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{4x^7-x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$;

13. а) $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x+\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{6}{x^2-x-2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)$;

14. а) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x)$; б) $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x\ln x)$;

в) $\lim\limits_{x \to +0} xe^{1/x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg} x\left(1 - e^{x}\right)$;

15. а) $\lim\limits_{x \to +0} x^{x}$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{1/x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

г) $\lim\limits_{x \to +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;

Список литературы

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. - М.: Наука. 1976.
2. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. - М: Наука. 1990.

Содержание

Введение 3

I. Теоретические аспекты понятия производной 3

1. Определение производной 3
2. Физический смысл производной 5
3. Геометрический смысл производной 6
4. Уравнения касательной и нормали 7
5. Дифференцируемость функций 8

II. Техника дифференцирования 11

6. Сложная функция 11
7. Дифференцирование функций, заданных аналитически 12
8. Производная показательно-степенной функции 17
9. Производная функции, заданной неявно 19
10. Производная функции, заданной параметрически 21
11. Производные высших порядков 23
12. Правило Лопиталя 24
13. Частные производные функции многих переменных 28

Упражнения 28