Домашнее задание №1 для магистрантов по курсу
«Дополнительные главы математики. Дифференциальные уравнения»

1. Получить 1-2 члена асимптотической формулы решения при $x \to +\infty$. Дать график.

В-1. $y' + x^3 y = 1;\ y(0) = y_o.$

В-2. $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2};\ y(0) = y_o.$

В-3. $y' + xy = arctg\, x;\ y(0) = y_o.$

В-4. $y' + xy = Sin\, x;\ y(0) = y_o.$

В-5. $y' + x^2 y = 1;\ y(0) = y_o.$

2. Найти решение задачи Коши.

В-1. $y'' - 2y' + 5y = \dfrac{Sin 2x}{1+x^2};\quad y(\frac{\pi}{4}) = 0;\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 0.$

В-2. $y'' + 12y' + 5y = arctgx;\quad y(1) = 2;\quad y'(1) = 3.$

В-3. $y'' + 4y' = Cos\, x^2;\quad y(0) = y'(0) = 0.$

В-4. $y'' + 4y = xCos\, x^2;\quad y(0) = y'(0) = 0.$

В-5. $y'' - 4y' + 12y = \dfrac{1}{x^2 - x + 4};\quad y(0) = 0;\quad y'(0) = 2.$

3. В-1. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 7x = \sum\limits_{k=0}^{N} A_k\, Sin(k\omega t + \varphi_k).$

При каких ω существует установившийся режим?

В-2. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 7x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\, Sin(k\omega t + \varphi_k).$

Зависит ли главный член асимптотической формулы $x(t)$ при $t \to +\infty$ от $x(0)$, $\dot{x}(0)$?

В-3. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_o^2 x = \sum\limits_{k=0}^{N} A_k\, Sin(k\omega t + \varphi_k),\ h > 0,\ \omega_o \neq 0.$

Имеет ли система периодические решения?

В-4. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_o^2 x = \sum\limits_{k=0}^{N} A_k\, Sin(k\omega t + \varphi_k),\ h > 0,\ \omega_o \neq 0.$

При каких $h>0$ все решения имеют одинаковый главный член асимптотики при $t \to +\infty$?

В-5. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + 25x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\, Sin\, k\pi t.$

Найти все периодические решения 1) $h \neq 0$; 2) $h = 0$.

4. В-1. $\ddot{x} + 4x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\, Cos(k\omega t + \varphi_k).$

При каких условиях имеется резонанс? (можно ограничиться случаем $\omega = 0{,}2$).

В-2. $\ddot{x} + 4x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\, Cos\, kt + B_k\, Sin\, kt.$

Найти условия отсутствия резонанса.

В-3. $\ddot{x} + 25x = \sum_{k=0}^{N} A_k \, Sin(kt + \varphi_k)$.

При каких условиях уравнение имеет периодические решения? Сколько их?

В-4. $\ddot{x} + 9x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Sin\, k\pi t}{1 + k^2}$. Найти все периодические решения.

В-5. $\ddot{x} + 16x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Cos\, kt}{1 + k^2}$. Найти все ограниченные при $t \geq 0$ решения (если существуют).

5. Филиппов А.Ф. № 1065; 1066; 1072; 1074 или 1075; 1092; 1100^0; 1101; 1103^0.

Литература

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: «РХД», 2000.

Домашнее задание №2 для магистрантов по курсу «Дополнительные главы математики. Дифференциальные уравнения»

1.1) Нарисовать фазовый портрет вблизи положения равновесия для уравнения $\ddot{x} = f(x)$, если $f(x) = \frac{dV}{dx}$. График функции $z = V(x)$ приведен на рис. 1, 2, 3.

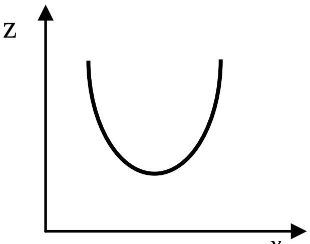


Рис. 1

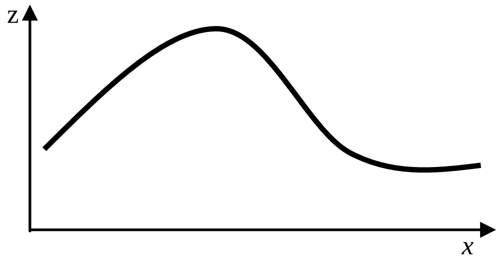


Рис. 2

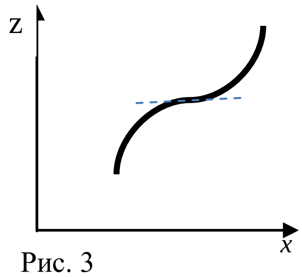


Рис. 3

2) Нарисовать фазовый портрет системы. Определить характер устойчивости положения равновесия. Филиппов А.Ф. Варианты № 1-5: № 1003-1006; 1010. № 1035

2. Филиппов А.Ф. № 787; 790; 803; 806. Варианты № 1-5: № 796-800.

1) Выписать общее решение системы $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$.

2) Решить задачу Коши $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{f}(t), \quad \bar{x}(0) = \bar{X}_o$.

В-1. $\bar{f}(t) = e^{-t^2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; \quad \bar{X}_o = \bar{0}.$

В-2. $\bar{f}(t) = Sint^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}; \quad \bar{X}_o = \bar{0}.$

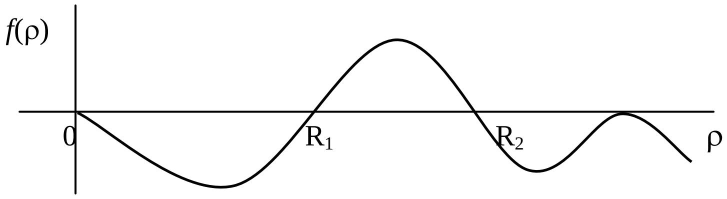
В-3. $\bar{f}(t) = \begin{bmatrix}sint^2\\0\\1\end{bmatrix}; \quad \bar{X}_o = \bar{0}.$

В-4. $\bar{f}(t) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} arctg\, t; \quad \bar{x}_o = \bar{0}.$

В-5. $\bar{f}(t) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{1+t^2}; \quad \bar{X}_o = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$

3. Система в полярных координатах приведена к виду $\dot{\rho} = f(\rho), \quad \dot{\varphi} = \omega = Const > 0.$

Определить положения равновесия и предельные циклы системы и их устойчивость.



4. Филиппов А.Ф. № 1014 (1015); 915 (916); 889; 918; 1010^0; 1005^0; 1054. Исследовать устойчивость положений равновесия.
5. Уравнение Клеро. Особые решения. Огибающие.
Филиппов А.Ф. № 241 (243); 251^*; 287; 297 a^0), *в*).

Литература

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: «РХД», 2000.