

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Доц. Королева Ю.О., каф. высшей математики

Алгебраическая поверхность второго порядка

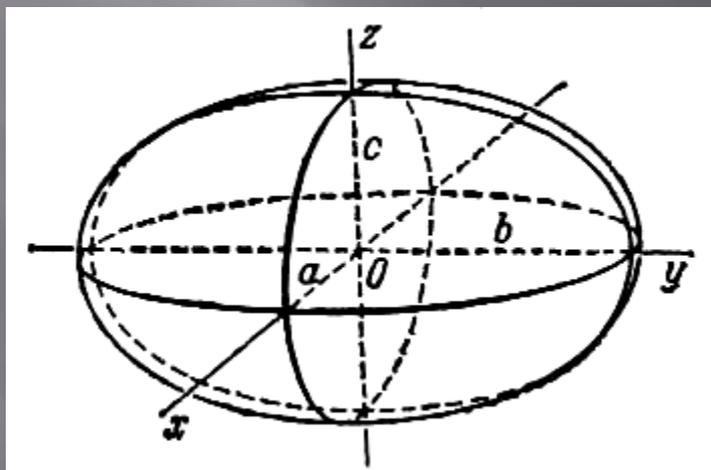
- Множество точек на плоскости, удовлетворяющее общему алгебраическому уравнению второго порядка вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

где не все коэффициенты одновременно равны нулю, называется алгебраической поверхностью второго порядка.

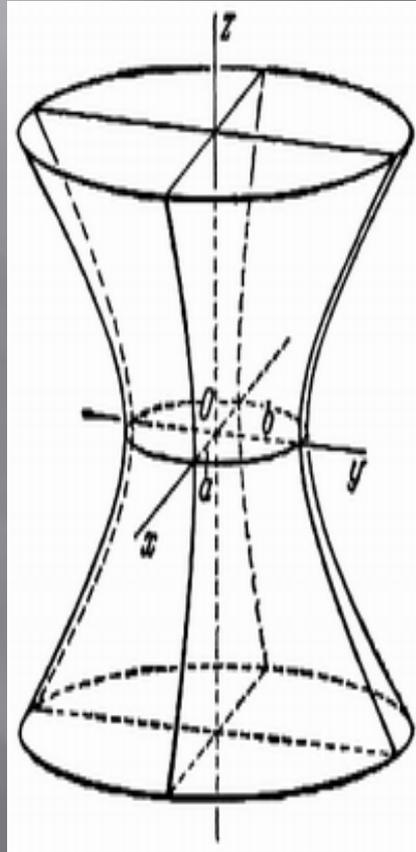
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



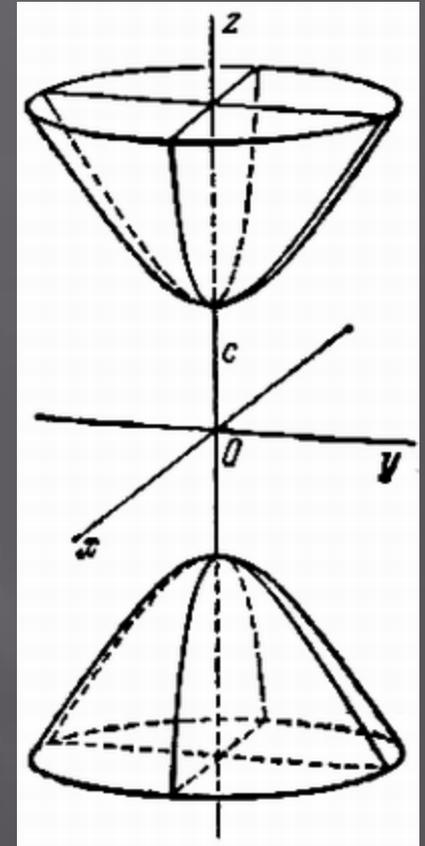
Гиперболоиды

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



однополостный

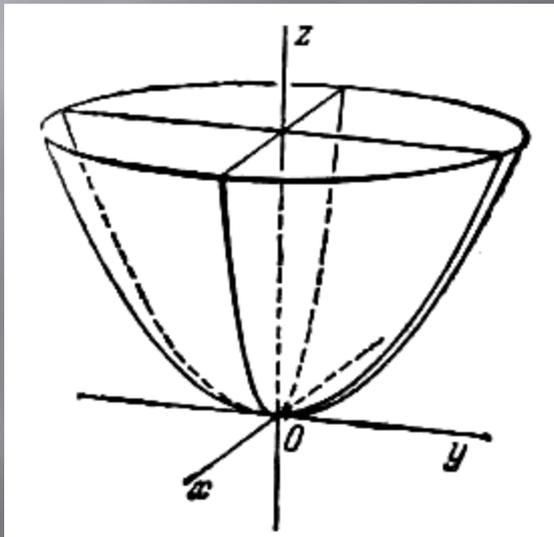
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



двуполостный

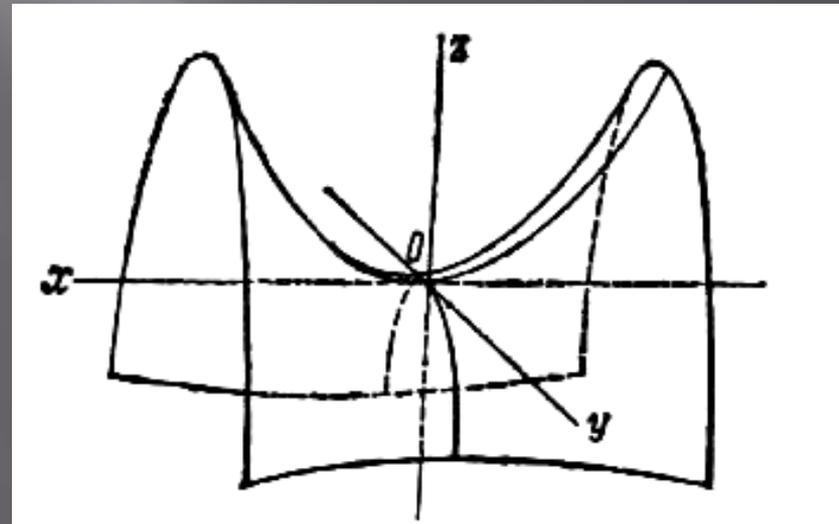
Параболоиды

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$



ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ

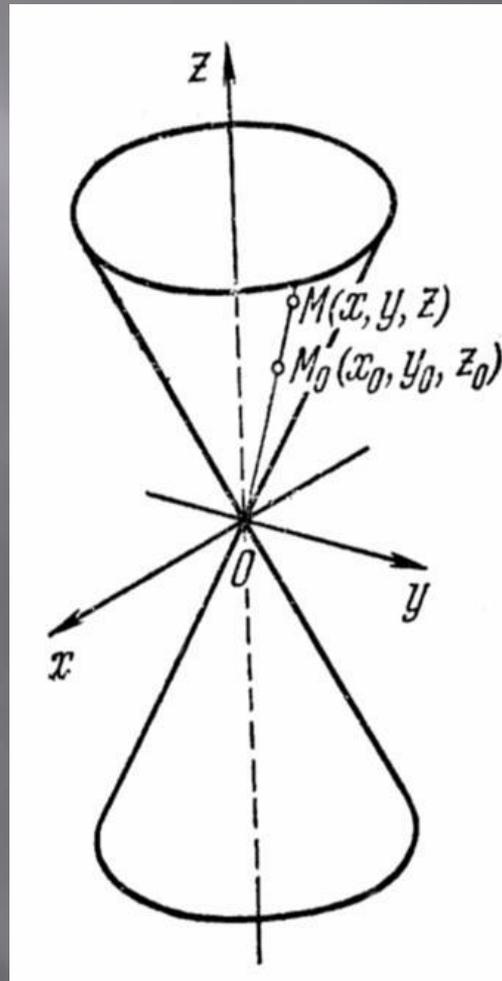
$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$



ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ

Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

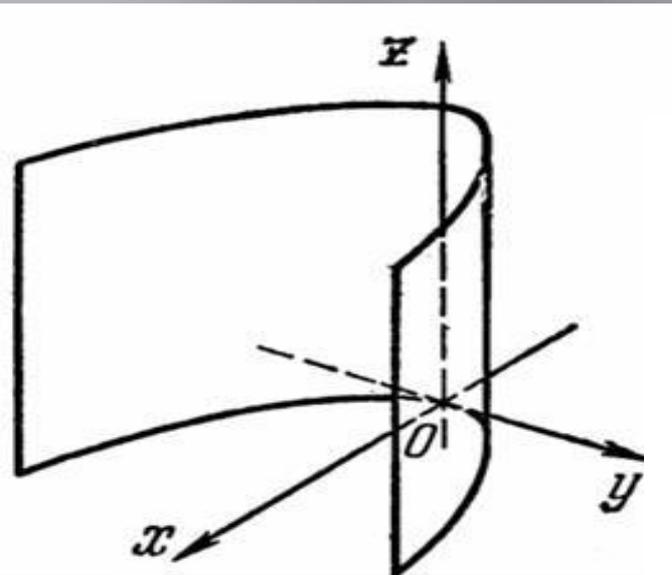


Цилиндры второго порядка

$$y^2 = 2px$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Параболический

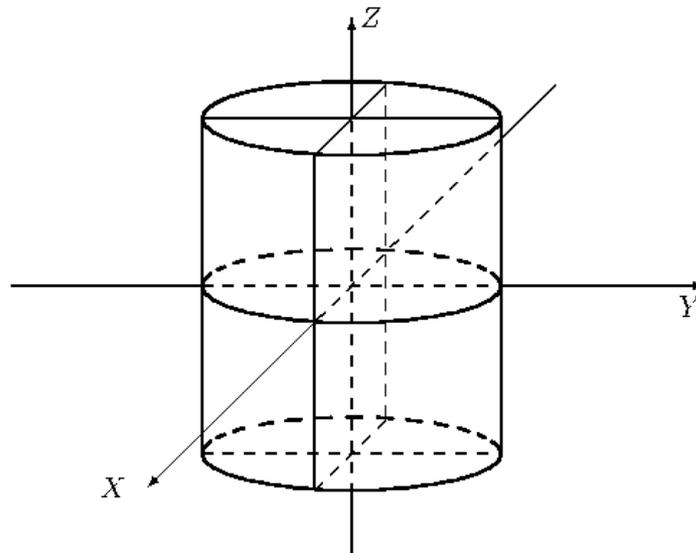
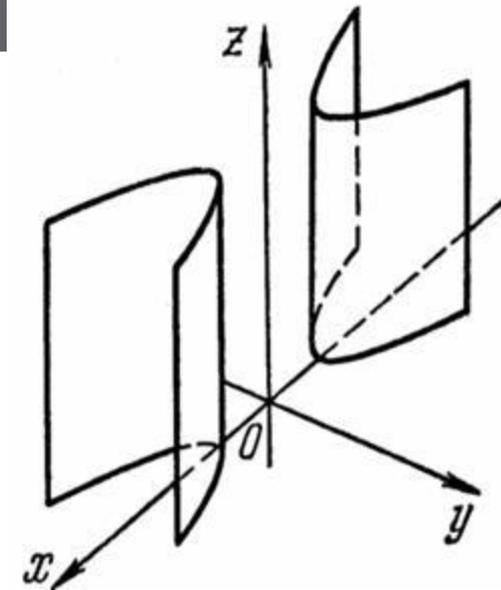


Рис. 1

Эллиптический



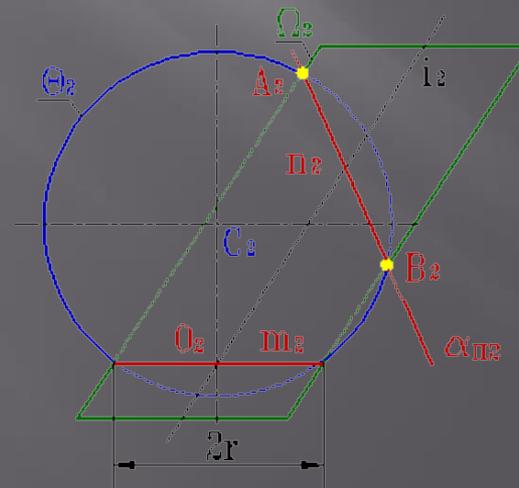
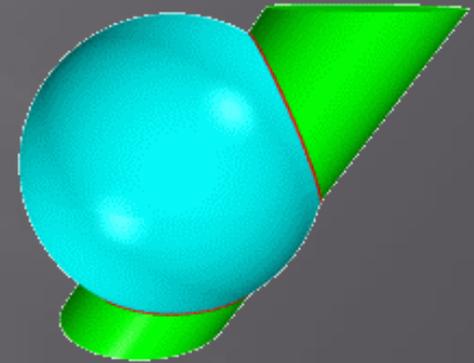
Гиперболический

Распадающиеся поверхности

- ▣ $x^2 = a^2$ — пары параллельных плоскостей,
- ▣ $x^2 = -a^2$ — пары мнимых параллельных плоскостей ,
- ▣ $x^2 = 0$ — пары совпадающих плоскостей,
- ▣ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пары пересекающихся плоскостей,
- ▣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пары мнимых пересекающихся плоскостей.

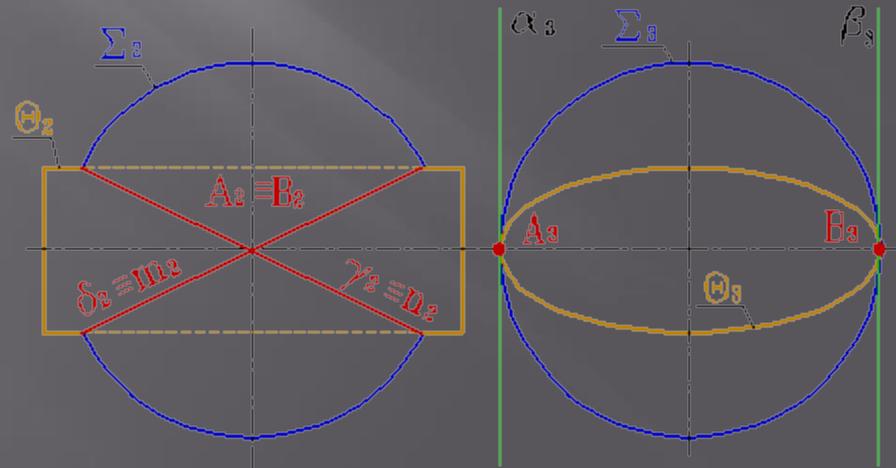
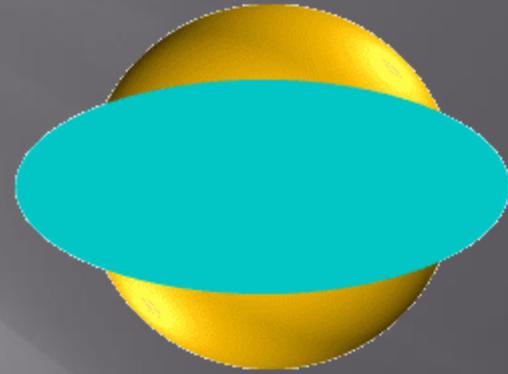
Пересечение кривых

- ▣ Теорема 1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то существует и другая плоская кривая, по которой они пересекаются.



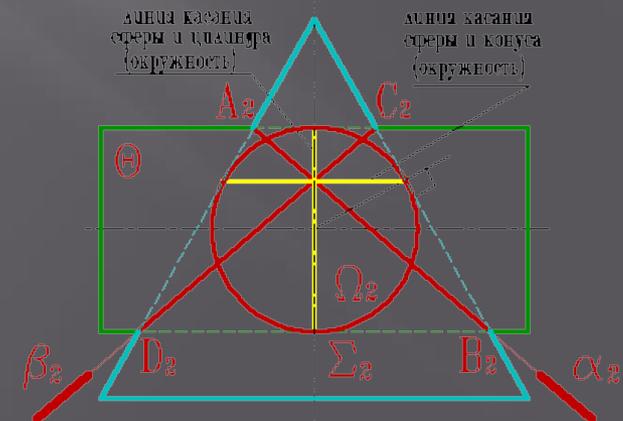
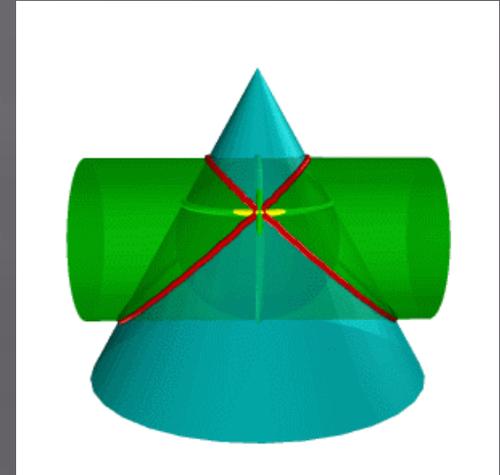
Пересечение кривых

- ▣ Теорема 2 (о двойном касании). Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках A и B , то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскость которых проходит через отрезок AB , соединяющий точки касания.



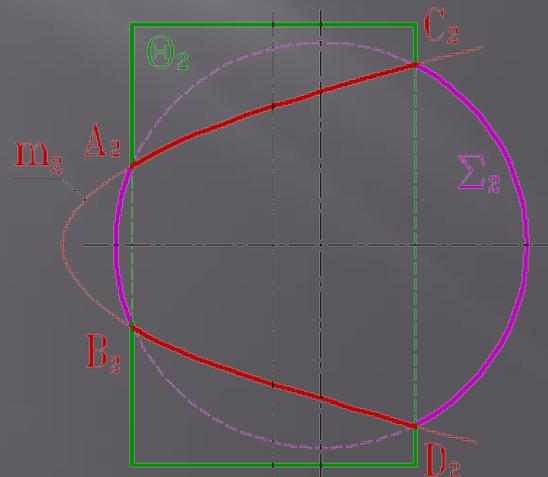
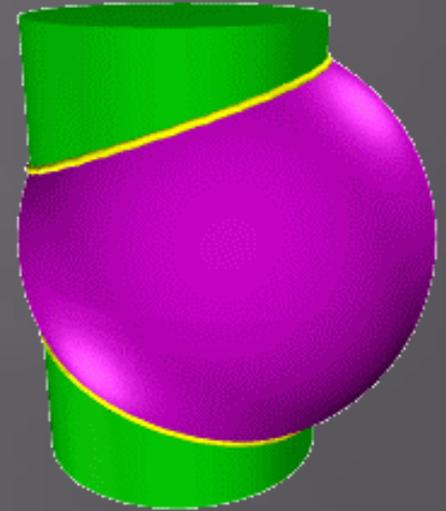
Пересечение кривых

- Теорема 3 (теорема Г. Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки линий касания.

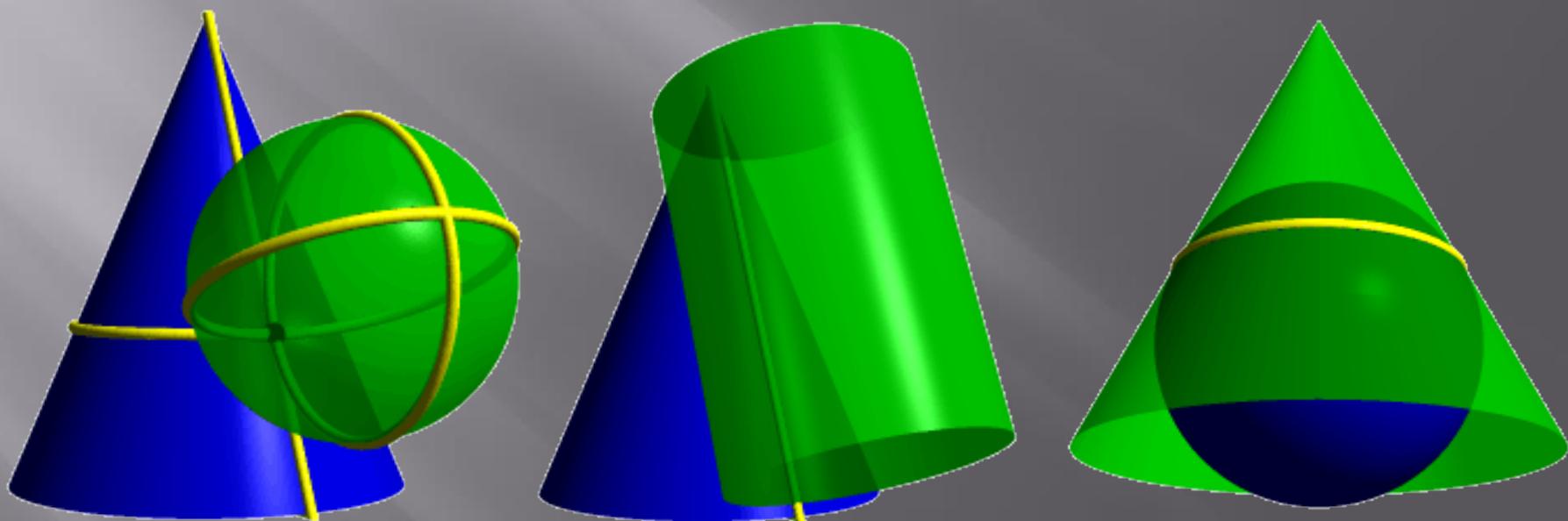


Пересечение кривых

- ▣ Теорема 4. Если две поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проектируется на эту плоскость в виде кривой второго порядка.



Примеры касаний поверхностей



Литература

- ▣ Смирнов Ю. М., Лекции по аналитической геометрии, - М.: Изд. Московского Университета, 1998.
- ▣ Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1979.