

Типовые задачи по теме

«Определенный интеграл и его применение»

1. Вычислить интегралы $\int_0^1 x e^{-x} dx$, $\int_1^4 x \sqrt{x^2 + 5} dx$;
2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$;
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.
4. Найти площадь фигуры, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3, \quad y \geq 3.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат:
 $r = 4 + \cos 2\varphi$.
6. Вычислить длину дуги кривой $y = 0,5x^2$, отсеченной прямой $y = 2$.
7. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

8. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах :

$$r = 2e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

9. Найти объем тела вращения, если вокруг оси OY вращается фигура, ограниченная линиями

$$y = (x-1)^2, \quad y = 1.$$

10. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$.

11. Доказать, что $9 \leq \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2} dx \leq 9,5$ не вычисляя интеграл.

12. Оценить интеграл $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, не вычисляя его.

