Министерство образования и науки Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА имени И.М. ГУБКИНА

И.Н. Мельникова, Т.С. Соболева, Н.О. Фастовец

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(Для факультета АиВТ)

Москва 2014

Оглавление

1. ВЕКТОРЫ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Основные понятия

Если для отрезка AB указано, что точка A – начало, а точка B – конец, то получается направленный отрезок, который называют ***вектором*** и обозначают $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$, обозначается $\overrightarrow{BA}$ или $-\vec{a}$.

Длиной (***модулем***) ***вектора*** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Если $A=B$, то вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет направления, и $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется ***ортом вектора*** $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,0}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными***. Обозначение: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$. Коллинеарные векторы направлены либо одинаково, либо противоположно.

Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют ***равными***, если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Заметим, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$. Таким образом, можно ввести понятие ***свободного вектора***, который с помощью параллельного переноса можно перемещать в любую точку пространства.

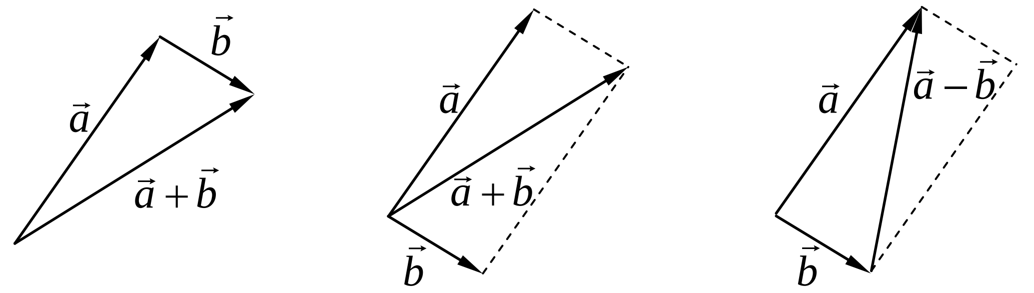
Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейные операции над векторами

1. ***Суммой*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (***правило треугольника***). Обозначение: $\vec{a}+\vec{b}$.

Векторы можно складывать по ***правилу параллелограмма***: если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, построить параллелограмм, то $\vec{a}+\vec{b}$ совпадает с диагональю параллелограмма, выходящей из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. ***Разность векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется так: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, где $-\vec{b}$ – вектор, противоположный вектору $\vec{b}$. Разность $\vec{a}-\vec{b}$ совпадет со второй диагональю указанного выше параллелограмма, выходящей из конца вектора $\vec{b}$.



3. ***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** $\lambda \neq 0$ называется вектор, модуль которого равен $|\lambda||\vec{a}|$; его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, направление противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Обозначение: $\lambda\vec{a}$.

Заметим, что:

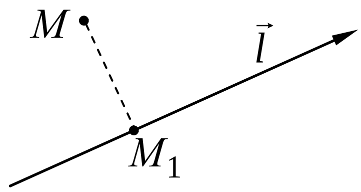
1. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо: $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0$.

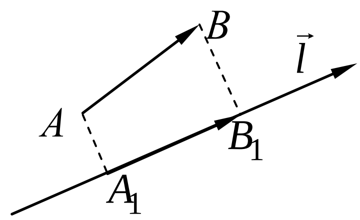
2. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a}=\lambda\vec{b}$ (признак коллинеарности векторов).

Замечание. Множество всех векторов с введенными операциями сложения и умножения на число является линейным пространством. В частности, все векторы, лежащие на плоскости, образуют линейное пространство размерности 2, базисом которого является любая пара неколлинеарных векторов. Все векторы, находящиеся в пространстве, образуют линейное пространство размерности 3, а базисом является любая тройка некомпланарных векторов (определения линейного пространства и базиса см. [1]).

Координаты вектора

Пусть M – произвольная точка, $\vec{l}$ – некоторая ось (направленная прямая). Основание M_1 перпендикуляра, опущенного из точки M на ось, называется ***проекцией точки M на ось*** $\vec{l}$.





Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор, а точки A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось $\vec{l}$. ***Проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на ось*** $\vec{l}$ называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятой со знаком «+», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси $\vec{l}$, и со знаком «–» в противном случае. Обозначение: $np_{\vec{l}}\,\overrightarrow{AB}$ или $np_{\vec{l}}\,\vec{a}$.

Если φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью $\vec{l}$, то $np_{\vec{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей Ox, Oy, Oz. Пусть числа a_1, a_2, a_3 – проекции произвольного вектора $\vec{a}$ на координатные оси, то есть

$$a_1 = np_{\vec{i}}\,\vec{a}, \quad a_2 = np_{\vec{j}}\,\vec{a}, \quad a_3 = np_{\vec{k}}\,\vec{a},$$

тогда для вектора $\vec{a}$ справедливо представление

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Эта формула называется ***разложением вектора*** $\vec{a}$ ***по ортонормированному базису*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (базисы, состоящие из единичных, попарно ортогональных векторов, называют ортонормированными). Разложение вектора $\vec{a}$ по базису единственно.

Числа a_1, a_2, a_3 называются ***координатами вектора*** $\vec{a}$. Обозначение $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Пусть α, β, γ – углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно, тогда для координат вектора $\vec{a}$ имеем

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_2 = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_3 = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}$ и удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

ПРИМЕР 1. Может ли вектор составлять с осями координат следующие углы: $\alpha = 60^\circ, \beta = 135^\circ, \gamma = 45^\circ$?

Решение. Так как

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{4} \neq 1,$$

то вектор не может составлять указанные углы с осями координат.■

Замечание. Все изложенное выше можно применить к векторам на плоскости. В этом случае ортонормированный базис состоит из двух векторов $\vec{i}, \vec{j}$, а разложение любого вектора, принадлежащего плоскости, имеет вид $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

Действия над векторами, заданными координатами

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, то есть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, тогда

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}$.
2. $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.
3. $\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.
5. $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

(координаты орта $\vec{a}^0$ – это направляющие косинусы вектора $\vec{a}$).

Напомним, что вектор, соединяющий начало координат $O(0;0;0)$ с произвольной точкой $M(x,y,z)$ пространства, называется ***радиус-вектором*** точки M и обозначается $\vec{r}$, причем координаты точки M являются координатами ее радиус-вектора, то есть

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – произвольные точки пространства, то справедливо:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

ПРИМЕР 2. Найти координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}=\{2;-3;4\}$, если известны координаты начала $A(-1;0;2)$.

Решение. Пусть точка $B(x,y,z)$ – конец вектора, тогда $\overrightarrow{AB}=\{x-(-1);y-0;z-2\}$. Так как по условию $\overrightarrow{AB}=\{2;-3;4\}$, то приравнивая соответствующие координаты, получаем

$$x+1=2,\quad y=-3,\quad z-2=4.$$

Следовательно, $x=1,\quad y=-3,\quad z=6$. Итак, $B(1;-3;6)$.■

ПРИМЕР 3. Найти проекции вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$ на координатные оси, если $\vec{a}=\{2;-1;0\}$, $\vec{b}=\{-1;3;1\}$.

Решение. Так как $2\vec{a}=\{4;-2;0\}$, $3\vec{b}=\{-3;9;3\}$, то

$$2\vec{a}-3\vec{b}=\{4-(-3);-2-9;0-3\}=\{7;-11;-3\}.$$

Поскольку координаты вектора являются проекциями этого вектора на координатные оси, то имеем

$$np_{\vec{i}}\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)=7,\quad np_{\vec{j}}\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)=-11,\quad np_{\vec{k}}\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)=-3.$$■

ПРИМЕР 4. Даны векторы: $\vec{a}=\{2;3\}$, $\vec{b}=\{1;-3\}$, $\vec{c}=\{0;3\}$. При каком значении α векторы $\vec{p}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{c}$ коллинеарны?

Решение. Найдем $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\vec{p}=\{2+\alpha;3-3\alpha\},\quad \vec{q}=\{2;9\}.$$

Поскольку векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны, то их координаты должны быть пропорциональны, то есть

$$\frac{2+\alpha}{2}=\frac{3-3\alpha}{9}.$$

Это равенство справедливо при $\alpha=-0,8$, то есть векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны при $\alpha=-0,8$.■

ПРИМЕР 5. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\{1;2\}$, $\vec{b}=\{2;-3\}$, $\vec{c}=\{9;4\}$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ может быть единственным образом разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть представлен в виде $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$.

Так как $\vec{c}=9\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$, то

$$\underline{9}\vec{i}+\underline{\underline{4}}\vec{j}=\lambda_1(\vec{i}+2\vec{j})+\lambda_2(2\vec{i}-3\vec{j})=\underline{(\lambda_1+2\lambda_2)}\vec{i}+\underline{\underline{(2\lambda_1-3\lambda_2)}}\vec{j}.$$

Векторы равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты, то есть

$$\begin{cases} 9=\lambda_1+2\lambda_2, \\ 4=2\lambda_1-3\lambda_2. \end{cases}$$

Решая полученную систему (например, методом Крамера), находим $\lambda_1=5, \lambda_2=2$. Итак, $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=5\vec{a}+2\vec{b}$.■

ПРИМЕР 6. Найти орт и направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{-1;5;3\}$.

Решение. Так как $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+3^2}=\sqrt{35}$, то

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{35}};\frac{5}{\sqrt{35}};\frac{3}{\sqrt{35}}\right\}.$$

Поскольку координаты орта являются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$, то

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{35}},\quad \cos\beta=\frac{5}{\sqrt{35}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Заметим, что $\cos\alpha<0$, $\cos\beta>0$, $\cos\gamma>0$. Это означает то, что вектор $\vec{a}$ образует тупой угол с осью *Ox* и острые углы с осями *Oy* и *Oz*.■

ПРИМЕР 7. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b} = \{1; -2; 4\}$ и составляющий тупой угол с осью *Oz*, если $|\vec{a}| = 5$.

Решение. Найдем орт вектора $\vec{b}$:

$$\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{21}}; -\frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}} \right\}.$$

Этот вектор коллинеарен искомому, имеет единичную длину и образует острый угол с осью *Oz* (третья координата положительна). Вектор $-\vec{b}^0 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{21}}; \frac{2}{\sqrt{21}}; -\frac{4}{\sqrt{21}} \right\}$ тоже коллинеарен искомому, имеет единичную длину, но составляет тупой угол с осью *Oz*.

Легко видеть, что всем условиям задачи удовлетворяет вектор

$$\vec{a} = 5 \cdot \left(-\vec{b}^0 \right) = \left\{ -\frac{5}{\sqrt{21}}; \frac{10}{\sqrt{21}}; -\frac{20}{\sqrt{21}} \right\}. \blacksquare$$

Деление отрезка в данном отношении

Координаты точки *M*, которая делит отрезок *AB* в отношении $\lambda = \frac{AM}{MB}$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, находятся по формулам:

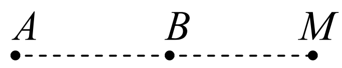
$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, для координат точки *C*, которая является серединой отрезка *AB* ($\lambda = 1$), имеем:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

ПРИМЕР 8. Даны точки *A*(2;–1;0) и *B*(3;1;2). Определить координаты точки *M*, симметричной точке *A* относительно точки *B*.

Решение. Так как точки *A*(2;–1;0) и *M*(*x*,*y*,*z*) симметричны относительно точки *B*, то точка *B* является серединой отрезка *AM*.



Тогда для координат точки B имеем

$$3=\frac{2+x}{2},\quad 1=\frac{-1+y}{2},\quad 2=\frac{0+z}{2}.$$

Следовательно, $x=4,\ \ y=3,\ \ z=4$. Итак, имеем $M(4;3;4)$.■

Задачи

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;–2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти четвертую вершину D.

2. При каких α,β векторы $\vec{a}=\{2;\alpha;-1\}$, $\vec{b}=\{4;3;\beta\}$ коллинеарны?

3. Дано: $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Найти

а) координаты орта $\vec{a}^{\,0}$;

б) координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$;

в) разложение вектора $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;

г) $np_{\vec{k}}(4\vec{a}-\vec{b})$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{c}=\{-2;5;-1\}$.

5. Вектор составляет с осями Oy и Oz углы 135° и 60° соответственно. Какой угол он составляет с осью Ox?

6. Найти вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{b}=\{0;3;-2\}$ и образующий тупой угол с осью Oy, если $|\vec{c}|=4$.

7. Точки $A(1;2)$, $B(5;–3)$, $C(3;4)$ являются вершинами треугольника. Найти точку пересечения медиан.

8. Разложить вектор $\vec{c}=\{3;5\}$ по базису $\vec{a}=\{2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;3\}$.

Ответы: 1. $D(4;0;6)$. **2.** $\alpha=3/2;\ \ \beta=-2$.

4. $\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{30}},\ \cos\beta=\dfrac{5}{\sqrt{30}},\ \cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

5. 60° или 120°. **6.** $\vec{c}=\left\{0;-\dfrac{12}{\sqrt{13}};\dfrac{8}{\sqrt{13}}\right\}$. **7.** (3;1). **8.** $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$.

Задания для самостоятельной работы

1.1. Доказать, что точки $A(1;2;-3)$, $B(2;2;0)$, $C(0;3;-4)$, $D(-2;3;-10)$ являются вершинами трапеции.

1.2. Даны точки $A(1;0;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(3;-2;-3)$. Существует ли треугольник с вершинами в этих точках?

1.3. Заданы векторы $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}-\vec{k}$. Найти

а) координаты орта $\vec{a}^{\,0}$;

б) координаты вектора $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$;

в) разложение вектора $\vec{f}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;

г) $np_{\vec{j}}(\vec{a}-3\vec{b})$.

1.4. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Ox и Oy углы 60° и 120° соответственно. Найти его координаты, если $|\vec{a}|=4$.

1.5. Найти координаты вектора $\vec{a}$, составляющего равные углы с осями координат, если $|\vec{a}|=7$.

1.6. На оси Oy найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

1.7. Найти вектор $\vec{a}$, параллельный вектору $\vec{b}=\{1;3;-5\}$ и противоположного с ним направления, если $|\vec{a}|=3$.

1.8. Даны вершины треугольника $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A, и координаты точки пересечения медиан треугольника.

1.9. Найти вектор $\vec{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}=7\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, если $|\vec{x}|=5\sqrt{6}$.

1.10. Разложить вектор $\vec{c}=\{-8;6\}$ по векторам $\vec{a}=\{2;-1\}$, $\vec{b}=\{3;-2\}$.

1.11. Разложить вектор $\vec{d}=\{9;7;-5\}$ по векторам $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{-1;0;2\}$, $\vec{c}=\{2;1;-3\}$.

2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **<u>число</u>**, которое обозначается $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ или $\vec{a}\vec{b}$ и находится следующим образом

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Так как $np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$ и $np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$, то для скалярного произведения справедливо

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Свойства скалярного произведения

1°. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

2°. $\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$.

3°. $\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

4°. $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=|\vec{a}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}|=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}$.

5°. $\vec{a}\perp\vec{b}\ \left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$.

ПРИМЕР 1. Дано: $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $2\pi/3$. Вычислить $\left(\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Решение. Используя свойства и определение скалярного произведения, имеем

$$\left(\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right)\overset{2^\circ}{=}\left(\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}\right)+\left(\vec{a}+2\vec{b},-\vec{b}\right)\overset{1^\circ}{=}\left(3\vec{a},\vec{a}+2\vec{b}\right)+\left(-\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right)\overset{2^\circ}{=}$$

$$=\left(3\vec a,\vec a\right)+\left(3\vec a,2\vec b\right)+\left(-\vec b,\vec a\right)+\left(-\vec b,2\vec b\right)\overset{3^\circ}{=}3\left(\vec a,\vec a\right)+6\left(\vec a,\vec b\right)-\left(\vec b,\vec a\right)-$$

$$-2\left(\vec b,\vec b\right)\overset{1^\circ}{=}3\left(\vec a,\vec a\right)+6\left(\vec a,\vec b\right)-\left(\vec a,\vec b\right)-2\left(\vec b,\vec b\right)=3\left(\vec a,\vec a\right)+5\left(\vec a,\vec b\right)-2\left(\vec b,\vec b\right)=$$

$$=3\left|\vec a\right|^2+5\left|\vec a\right|\left|\vec b\right|\cos\frac{2\pi}{3}-2\left|\vec b\right|^2=3\cdot 4+5\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot 9=-21.$$

Найдем длину вектора $\vec a+\vec b$. Из свойства 4° скалярного произведения следует, что

$$\left|\vec a+\vec b\right|=\sqrt{\left(\vec a+\vec b,\vec a+\vec b\right)}=\sqrt{\left(\vec a,\vec a\right)+2\left(\vec a,\vec b\right)+\left(\vec b,\vec b\right)}=\sqrt{4-6+9}=\sqrt{7}\,.\blacksquare$$

Скалярное произведение в координатах

Если векторы $\vec a$ и $\vec b$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec i,\vec j,\vec k$: $\vec a=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec b=\{b_1,b_2,b_3\}$, то

$$\left(\vec a,\vec b\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

В частности,

$$\left(\vec a,\vec a\right)=\vec a^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2\quad\Rightarrow\quad\left|\vec a\right|=\sqrt{(\vec a,\vec a)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$$

С помощью скалярного произведения можно найти угол φ между векторами $\vec a$ и $\vec b$:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec a,\vec b\right)}{\left|\vec a\right|\left|\vec b\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,,$$

а также проекцию вектора $\vec a$ на направление, заданное вектором $\vec b$:

$$np_{\vec b}\vec a=\frac{\left(\vec a,\vec b\right)}{\left|\vec b\right|}=\left(\vec a,\vec b^{\,0}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,.$$

ПРИМЕР 2. Найти $\left(3\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)$, где $\vec{a}=\{2;3;-2\}$, $\vec{b}=\{1;2;0\}$.

Решение. <u>Первый способ.</u> Найдем координаты векторов $3\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$:

$$3\vec{a}+2\vec{b}=\{8;13;-6\},\ \ \vec{a}-\vec{b}=\{1;1;-2\}.$$

Тогда

$$\left(3\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)=8\cdot 1+13\cdot 1+(-6)\cdot(-2)=33.$$

<u>Второй способ.</u> Можно сначала применить свойства скалярного произведения, а затем выражение скалярного произведения через координаты:

$$\left(3\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)=3(\vec{a},\vec{a})-3\left(\vec{a},\vec{b}\right)+2\left(\vec{b},\vec{a}\right)-2\left(\vec{b},\vec{b}\right)=$$

$$=3(\vec{a},\vec{a})-\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2\left(\vec{b},\vec{b}\right)=3\cdot(4+9+4)-(2+6+0)-2(1+4+0)=33.\blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Найти угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках $A(1;2;-3)$, $B(2;2;0)$, $C(0;3;-4)$, $D(-2;3;-10)$.

Решение. Угол между диагоналями четырехугольника есть угол между векторами $\overrightarrow{AC}=\{-1;1;-1\}$, $\overrightarrow{BD}=\{-4;1;-10\}$. Найдем косинус этого угла:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{(-1)\cdot(-4)+1\cdot 1+(-1)\cdot(-10)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+1^2+(-10)^2}}=\frac{5}{\sqrt{39}}.$$

Итак, острый угол (так как $\cos\varphi>0$) между диагоналями равен $\varphi=\arccos\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.■

ПРИМЕР 4. Найти $пр_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$, где $A(2;-1;0)$, $B(3;1;2)$, $C(-4;1;3)$.

Решение. Так как $\overrightarrow{AB}=\{1;2;2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-6;2;3\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$, то

$$пр_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}=\frac{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{1\cdot(-6)+2\cdot 2+2\cdot 3}{3}=\frac{4}{3}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 28$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Тогда $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \lambda\vec{a}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = \lambda \cdot (1+4+9) = \lambda \cdot 14 = 28$, то есть $\lambda = 2$. Итак, $\vec{b} = 2\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$.■

Задачи

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/4$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить $\left(\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}\right)$.

2. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$. Найти $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|$.

3. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$, $C(1;0;2)$. Найти внутренний угол при вершине C и $np_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}$.

4. При каком λ векторы $\vec{a} = \lambda\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \lambda\vec{k}$ ортогональны?

Ответы: 1. $40 + 20\sqrt{2}$.**2.** $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$.**3.** $\arccos\frac{18}{\sqrt{19}\sqrt{26}}; \frac{18}{\sqrt{19}}$.**4.** $\lambda = -2{,}5$.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения

1. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.
2. Изменится ли скалярное произведение векторов, если к одному из них добавить вектор, перпендикулярный к другому сомножителю?
3. Следует ли из равенства $\left(\vec{a}, \vec{e}\right) = \left(\vec{b}, \vec{e}\right)$, где $\vec{e}$ – единичный вектор, равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
4. Доказать теорему косинусов.

Задачи

2.1. Дано: $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=(\vec{a},\vec{b})=\pi/3$. Вычислить $\left(\vec{a}-4\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right)$ и $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$.

2.2. Дано: $\vec{a}=\{2;-4;1\},\ \vec{b}=\{1;3;-1\}$. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$.

2.3. Показать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(–5;3;4)$, $B(–1;–7;5)$, $C(6;–5;–3)$ и $D(2;5;–4)$ есть квадрат.

2.4. Дан треугольник с вершинами $A(1;2;–3)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$. Найти внешний угол при вершине A и острый угол между медианой BD и стороной AC.

2.5. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{\sqrt{2};-3;-5\}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox и Oz углы 45° и 60° соответственно, а с осью Oy – острый угол.

2.6. Даны векторы $\vec{a}=\{1;2;-3\},\ \vec{b}=\{-1;0;2\},\ \vec{c}=\{3;-1;0\}$. Найти $np_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

2.7. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{n}=5\vec{a}-4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

2.8. Дано: $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2$. При каком значении λ векторы $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ и $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ ортогональны?

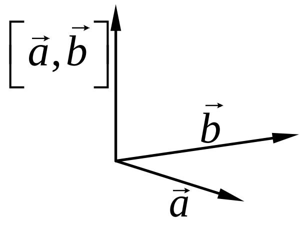
2.9. Ортогональны ли векторы $\vec{p}=2\vec{a}+4\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{b}-\vec{a}$, если $\vec{a}=\{1;-2;3\},\ \vec{b}=\{3;0;-1\}$?

2.10. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен оси Oz, и удовлетворяет условиям: $\left(\vec{x},\vec{a}\right)=9,\ \left(\vec{x},\vec{b}\right)=-4$, где $\vec{a}=\{3;-1;5\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$.

2.11. Единичные векторы $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ удовлетворяют условию $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=\vec{0}$. Найти $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)+\left(\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)+\left(\vec{e}_3,\vec{e}_1\right)$.

3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется <u>**вектор**</u>, который обозначается $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$ и удовлетворяет следующим условиям:



1. $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$

(φ– угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

2. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a},\ \left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$;

3. векторы $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ образуют правую тройку (если векторы $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ приведены к общему началу, то вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (вектор $\vec{a}$), а указательный палец – по второму (вектор $\vec{b}$)).

Замечание. Результатом векторного произведения является вектор. Условие 1 из определения векторного произведения задает длину этого вектора, а условия 2 и 3 указывают его направление.

Замечание. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (**геометрический смысл векторного произведения**).

Свойства векторного произведения

1°. $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$.

2°. $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$.

3°. $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

4°. $\vec{a}\parallel\vec{b}\ \left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}\right)\ \Leftrightarrow\ \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$. В частности, $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=\vec{0}$.

ПРИМЕР 1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$, где $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ \varphi=(\vec{a},\vec{b})=5\pi/6$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, равна модулю векторного произведения векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Используя свойства векторного произведения, найдем $[\vec{p},\vec{q}]$:

$$[\vec{p},\vec{q}]=\left[2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+3\vec{b}\right]=2[\vec{a},\vec{a}]+6\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\vec{a}\right]-3\left[\vec{b},\vec{b}\right]\overset{1^\circ}{=}$$
$$=\vec{0}+6\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\vec{0}=7\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Следовательно,

$$S=\left|[\vec{p},\vec{q}]\right|=7\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=7|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=7\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=7\ .\blacksquare$$

Векторное произведение в координатах

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\ \vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, то

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\,.$$

ПРИМЕР 2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Решение. Найдем векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-8\vec{j}-5\vec{k}\,.$$

Тогда $S_\vartriangle=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-8)^2+(-5)^2}=\dfrac{\sqrt{90}}{2}.\blacksquare$

ПРИМЕР 3. Найти вектор $\vec{c}$ длины 3, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}=\{2;-1;1\}$ и $\vec{b}=\{1;-3;1\}$ и образующий острый угол с осью *Oz*.

Решение. Найдем $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и его орт:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k},\quad \left[\vec{a},\vec{b}\right]^0=\left\{\frac{2}{\sqrt{30}};-\frac{1}{\sqrt{30}};-\frac{5}{\sqrt{30}}\right\}.$$

Вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^0$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеет единичную длину и составляет тупой угол с осью *Oz*. Легко видеть, что вектор

$$\vec{c}=-3\left[\vec{a},\vec{b}\right]^0=\left\{-\frac{6}{\sqrt{30}};\frac{3}{\sqrt{30}};\frac{15}{\sqrt{30}}\right\}$$

удовлетворяет всем условиям задачи.■

ПРИМЕР 4. Даны вершины треугольника *A*(1;–1;2), *B*(3;1;–1), *C*(–1;0;2). Найти длину высоты, опущенной из вершины *B* на сторону *AC*.

Решение. Найдем площадь треугольника *ABC*. Для этого рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}=\{2;2;-3\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{-2;1;0\}$ и найдем их векторное произведение:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_\vartriangle=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9+36+36}=\frac{1}{2}\sqrt{81}=4{,}5.$$

С другой стороны, $S_\vartriangle=\frac{1}{2}h_B\cdot\left|AC\right|$, откуда $h_B=\frac{2S_\vartriangle}{\left|AC\right|}=\frac{9}{\sqrt{5}}$.■

Задачи

1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, где $|\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 3,\ \varphi = (\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$.

2. Даны векторы $\vec{a} = \{-1; -2; 1\},\ \vec{b} = \{4; 3; 2\}$. Найти $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Найти единичный вектор $\vec{e}$, перпендикулярный вектору $\vec{a} = \{1; 4; 3\}$ и оси абсцисс.

4. Найти площадь треугольника *ABC* и длину высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC*, если *A*(1;–2;3), *B*(0;–1;2), *C*(3;4;5).

Ответы: 1. $42\sqrt{2}$. **2.** $\{-7; 6; 5\},\ S = \sqrt{110}$.

3. $\left\{0; \pm\frac{3}{5}; \mp\frac{4}{5}\right\}$. **4.** $S = 4\sqrt{2}, h_A = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{43}}$.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические упражнения

1. Изменится ли векторное произведение, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю?

2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

3. Дано: $[\vec{a}, \vec{c}] = \left[\vec{b}, \vec{c}\right],\ \vec{c} \neq \vec{0}$. Следует ли отсюда, что $\vec{a} = \vec{b}$?

4. Вывести формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

5. Дано: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{c}, \vec{d}\right],\ [\vec{a}, \vec{c}] = \left[\vec{b}, \vec{d}\right]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

6. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, вдвое больше площади этого параллелограмма.

Задачи

3.1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-3\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=1,\ \varphi=(\vec{a},\vec{b})=\pi/6$.

3.2. Найти $\left[\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, если $\vec{a}=\{1;2;-3\},\ \vec{b}=\{-1;0;2\}$.

3.3. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\{1;4;-2\}$ и $\vec{b}=\{-1;3;2\}$.

3.4. Даны вершины треугольника $A(-1;0;1)$, $B(2;1;-1)$, $C(3;-1;0)$. Найти площадь треугольника ABC и длину высоты, опущенной из вершины C на строну AB.

3.5. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный вектору $\vec{a}=\{1;-3;4\}$ и оси ординат, если он образует острый угол с осью Ox и $\left|\vec{x}\right|=13$.

3.6. Найти координаты вектора $\vec{x}$, перпендикулярного векторам $\vec{a}=\{2;-3;1\},\ \vec{b}=\{1;-2;3\}$, и удовлетворяющего условию $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=10$, где $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$.

3.7. Найти $np_{\vec{c}}\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, где $\vec{a}=\{0;2;-1\},\ \vec{b}=\{2;-3;1\},\ \vec{c}=\{1;2;-2\}$.

3.8. Найти $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$, где $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – векторы из задачи 3.7.

3.9. С помощью векторного произведения найти синус угла между векторами $\vec{a}=\{1;-1;4\},\ \vec{b}=\{2;0;1\}$.

4. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется **<u>число</u>**, которое обозначается $\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c} \rangle$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и находится следующим образом:

$$\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c} \rangle = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

Свойства смешанного произведения

1°. $\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c} \rangle = \langle \vec{b},\vec{c},\vec{a} \rangle = \langle \vec{c},\vec{a},\vec{b} \rangle$,

то есть смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

2°. $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$.

3°. $\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c} \rangle = -\langle \vec{b},\vec{a},\vec{c} \rangle = -\langle \vec{c},\vec{b},\vec{a} \rangle = -\langle \vec{a},\vec{c},\vec{b} \rangle$,

то есть смешанное произведение меняет знак на противоположный при перестановке любых двух векторов.

4°. $\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны.

Замечание. Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (**геометрический смысл смешанного произведения**).

Смешанное произведение в координатах

Пусть векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a} = \{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1,b_2,b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1,c_2,c_3\}$, тогда

$$\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Применение смешанного произведения

1. Установление компланарности векторов:

если $\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

2. Определение взаимной ориентации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

если $\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle > 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;

если $\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle < 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку.

3. Определение объемов параллелепипеда и тетраэдра, построенных на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V_{пар.} = \left| \left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \right|, \quad V_{тетр.} = \frac{1}{6} \left| \left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \right|.$$

ПРИМЕР 1. Принадлежат ли одной плоскости точки $A(1;2;3)$, $B(0;–1;1)$, $C(2;0;1)$, $D(–1;3;0)$?

Решение. Рассмотрим векторы с общим началом

$$\overrightarrow{AB} = \{-1;-3;-2\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{1;-2;-2\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{-2;1;-3\}.$$

Если эти векторы окажутся компланарными, то это будет означать, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Найдем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -23 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение не равно нулю, то векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ не являются компланарными, следовательно, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.■

Замечание. В последнем примере $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle < 0$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ образуют левую тройку.

ПРИМЕР 2. При каком значении параметра λ векторы $\vec{a}=\{2;-1;\lambda\}$, $\vec{b}=\{3,-1,1\}$, $\vec{c}=\{1;2;-3\}$ компланарны?

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\left\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1-(-1)\cdot(-10)+\lambda\cdot 7 = 7\lambda - 8.$$

Векторы компланарны, если $\left\langle \vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle = 0$, то есть $7\lambda-8=0$. Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны при $\lambda = 8/7$.■

ПРИМЕР 3. Дан тетраэдр с вершинами $A(1;1;0)$, $B(2;3;-1)$, $C(2;0;1)$, $D(-1;2;3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки D на грань ABC.

Решение. Так как для объема тетраэдра справедлива формула $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$, то для нахождения высоты необходимо вычислить объем тетраэдра и площадь основания, то есть площадь треугольника ABC.

Найдем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ и объем тетраэдра $ABCD$:

$$\left\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -13 \;\Rightarrow\; V_{тетр} = \frac{13}{6}.$$

Вычислим площадь основания:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k} \;\Rightarrow\; S_{осн.} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Следовательно, $h=\dfrac{3V}{S_{осн.}}=\dfrac{3\cdot 13\cdot 2}{6\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{13}{\sqrt{14}}$.■

Задачи

1. Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{1;-3;4\}$, $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, $\vec{c}=\{2;4;-3\}$?

2. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках $A(5;1;–4)$, $B(1;2;–1)$, $C(3;3;–4)$, $D(2;2;2)$. Найти длину высоты тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC.

3. Какую тройку (правую или левую) образуют векторы $\vec{a}=\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{b}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$?

Ответы: 1. нет. **2.** 4; $h=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **3.** правая.

Задания для самостоятельной работы

4.1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $(\vec{a},\vec{b})=\pi/6$. Найти $\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$.

4.2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют левую тройку. Найти $\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$.

4.3. Дан тетраэдр с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(–2;4;1)$, $C(7;6;3)$, $S(4;–3;–1)$. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

4.4. Объем пирамиды равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2;1;–1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;–1;3)$. Найти координаты четвертой вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.

4.5. При каком λ векторы $\vec{a}=\{1;-3;0\}$, $\vec{b}=\{3;\lambda;1\}$, $\vec{c}=\{2;-4;3\}$ компланарны?

4.6. Показать, что точки $A(5;7;–2)$, $B(3;1;–1)$, $C(9;4;–4)$, $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

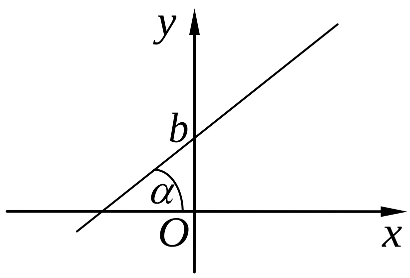
4.7. Вычислить произведение $\left\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}\right\rangle$.

5. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy задается следующими уравнениями:

1. ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg}\alpha,$$



где α $(\alpha \neq \pi/2)$ – угол наклона прямой к оси Ox, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Частные случаи:

$b = 0 \;\Rightarrow\; y = kx \;\Rightarrow$ прямая проходит через начало координат;

$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; y = b \;\Rightarrow$ прямая параллельна оси Ox;

$\alpha = \pi/2 \;\Rightarrow\; x = a \;\Rightarrow$ прямая параллельна оси Oy, a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox.

Если известна точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая прямой, то уравнение этой прямой удобно записывать в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

2. ***Общее уравнение прямой на плоскости***

$$Ax + By + C = 0.$$

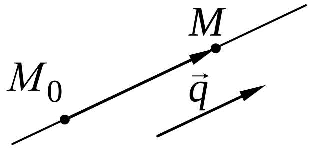
Частные случаи:

$C = 0 \;\Rightarrow\; Ax + By = 0 \;\Rightarrow$ прямая проходит через точку O;

$A = 0 \;\Rightarrow\; y = -C/B \;\Rightarrow$ прямая параллельна оси Ox;

$B = 0 \;\Rightarrow\; x = -C/A \;\Rightarrow$ прямая параллельна оси Oy.

3. ***Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***параллельно вектору*** $\vec{q} = \{l, m\}$



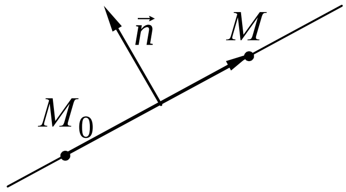
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Это уравнение представляет собой условие коллинеарности векторов $\vec{q}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x,y)$ – произвольная точка прямой.

Любой ненулевой вектор $\vec{q}$, параллельный прямой, будем называть ***направляющим вектором*** этой прямой.

4. ***Уравнение прямой, проходящей через точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\vec{n} = \{A, B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$



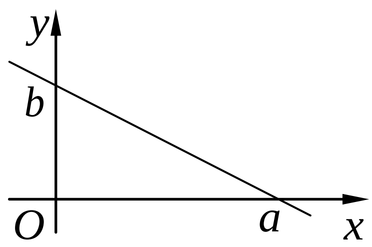
Это уравнение является условием ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x,y)$ – произвольная точка прямой.

Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой, будем называть ***нормальным вектором*** этой прямой.

Если в последнем уравнении раскрыть скобки, то получится общее уравнение $Ax + By + C = 0$, то есть коэффициенты A и B из общего уравнения прямой являются координатами ее нормального вектора.

5. ***Уравнение прямой в отрезках***

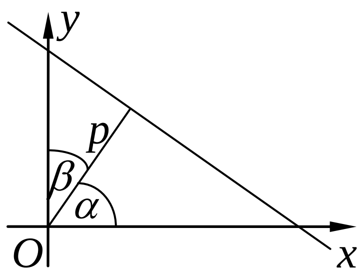
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

6. ***Нормальное уравнение прямой***

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$



где $p \geq 0$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α и β – углы, который этот перпендикуляр образует с осями Ox и Oy соответственно.

Замечание. Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ можно преобразовать в нормальное, умножив его на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \begin{pmatrix} "+", \text{ если } C<0; \\ "-", \text{ если } C>0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1. Даны точки $P(1;–2)$ и $Q(4;0)$. Составить все возможные уравнения прямой PQ.

Решение. Так как вектор $\overrightarrow{PQ}=\{3;2\}$ является направляющим вектором прямой (он лежит на прямой), а точка P принадлежит прямой (можно взять точку Q), то каноническое уравнение прямой PQ имеет вид:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}.$$

Получим общее уравнение этой прямой:

$$2\cdot(x-1)=3\cdot(y+2) \quad \Rightarrow \quad 2x-3y-8=0.$$

Уравнение в отрезках:

$$2x-3y=8 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{8}-\frac{3y}{8}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{-8/3}=1.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом может быть получено, если из общего уравнения выразить y:

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}.$$

И, наконец, преобразуем общее уравнение в нормальное. Из общего уравнения находим: $A=2,\ B=-3,\ \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Так как $C=-8<0$, то μ берется со знаком «+». Следовательно, нормальное уравнение прямой имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{8}{\sqrt{13}}=0. ■$$

ПРИМЕР 2. Составить каноническое и общее уравнения оси Ox.

Решение. Для того чтобы написать каноническое уравнение любой прямой, достаточно иметь какую-нибудь точку, лежащую на этой прямой, и какой-нибудь направляющий вектор.

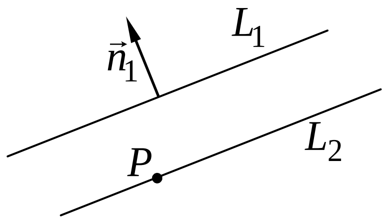
Точка $M_0(0;0)$ принадлежит оси Ox, а в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{i}=\{1;0\}$. Тогда каноническое уравнение оси Ox имеет вид

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}.$$

А общее уравнение оси Ox:

$$y=0.\blacksquare$$

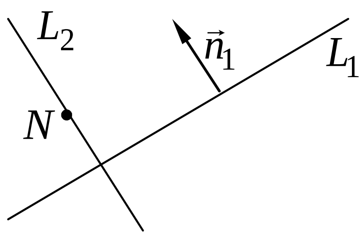
ПРИМЕР 3. Составить уравнение прямой L_2, проходящей через точку $P(4;–2)$ параллельно прямой $L_1: x-4y+7=0$.



Решение. Так как прямые L_1 и L_2 параллельны, то нормальный вектор $\vec{n}_1=\{1;-4\}$ прямой L_1 является нормальным вектором прямой L_2, то есть $\vec{n}_2=\vec{n}_1$. Тогда для L_2 имеем

$$1\cdot(x-4)+(-4)\cdot(y-(-2))=0 \quad\Rightarrow\quad x-4y-12=0.\blacksquare$$

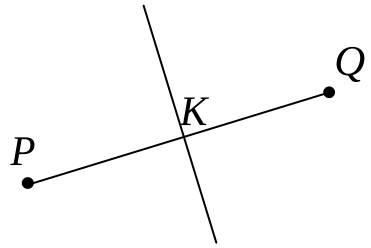
ПРИМЕР 4. Составить уравнение прямой L_2, проходящей через точку $N(4;–2)$ перпендикулярно прямой $L_1: 4x-3y-5=0$.



Решение. Так как прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то нормальный вектор $\vec{n}_1=\{4;-3\}$ прямой L_1 является направляющим для L_2, то есть $\vec{q}_2=\vec{n}_1$. Тогда для L_2 имеем

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{-3} \quad\Rightarrow\quad 3x+4y-4=0.\blacksquare$$

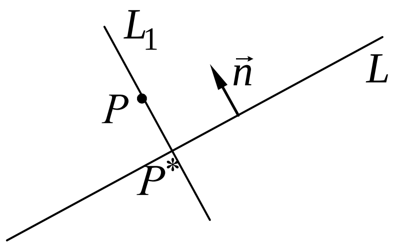
ПРИМЕР 5. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку PQ, где $P(2;5)$, $Q(-4;3)$.



Решение. Точка $K(-1;4)$, которая является серединой отрезка PQ, принадлежит прямой, а в качестве нормального вектора можно взять вектор $\overrightarrow{PQ}=\{-6;-2\}$ или коллинеарный ему вектор $\vec{n}=\{3;1\}$. Тогда уравнение прямой имеет вид

$$3\cdot(x+1)+1\cdot(y-4)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x+y-1=0.\blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Найти проекцию точки $P(2;3)$ на прямую $L: 2x-y+1=0$.



Решение. Составим уравнение прямой L_1, проходящей через точку P перпендикулярно прямой L. Нормальный вектор $\vec{n}=\{2;-1\}$ прямой L является направляющим вектором прямой L_1, следовательно, для прямой L_1 имеем

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1} \quad\Rightarrow\quad x+2y-8=0.$$

Проекцией точки P на прямую L является точка P^*, точка пересечения прямых L и L_1. Чтобы найти ее, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x+2y=8. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x=\dfrac{6}{5}$, $y=\dfrac{17}{5}$. Окончательно, имеем $P^*\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{17}{5}\right).\blacksquare$

Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть на плоскости даны две прямые:

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{A_1, B_1\};$$
$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}.$$

Уравнения прямых можно рассматривать как уравнения системы линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases}$$

Пусть A – матрица этой системы, $\overline{A}$ – расширенная матрица системы, тогда возможны три случая:

1.	$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$	$\Leftrightarrow$	система имеет единственное решение $\left(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2\right)$	$\Leftrightarrow$	L_1 и L_2 пересекаются
2.	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ $\left(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2\right)$	$\Leftrightarrow$	система несовместна и решений не имеет $\left(\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \overline{A}\right)$	$\Leftrightarrow$	L_1 и L_2 параллельны
3.	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ $\left(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2\right)$	$\Leftrightarrow$	у системы бесконечно много решений $\left(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 1\right)$	$\Leftrightarrow$	L_1 и L_2 совпадают

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 – это угол между их нормальными векторами, то есть

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

(чтобы найти острый угол между прямыми, нужно правую часть равенства взять по модулю).

Условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$L_1: \; y = k_1x + b_1, \quad L_2: \; y = k_2x + b_2,$$

то для острого угла φ между этими прямыми справедлива формула

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

В частности,

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2, \qquad L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1k_2 = -1.$$

ПРИМЕР 7. Найти острый угол φ между прямыми: $x - y + 2 = 0$ и $2x + 3y - 37 = 0$.

Решение. Так как $\vec{n}_1 = \{1; -1\}$, $\vec{n}_2 = \{2; 3\}$, то

$$\cos\varphi = \frac{\left|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}.\blacksquare$$

ПРИМЕР 8. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку $P(0;2)$ под углом $\pi/4$ к прямой $L_1: x - 2y + 3 = 0$.

Решение. Угловой коэффициент прямой L_1 равен $k_1 = 0,5$. Подставляя известные величины в формулу $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$, имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \left|\frac{k_2 - 0,5}{1 + 0,5 \cdot k_2}\right| \quad \Rightarrow \quad k_2 = 3 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{3}.$$

Для каждого случая напишем уравнение прямой, проходящей через точку P:

$$y - 2 = 3(x - 0) \quad \Rightarrow \quad 3x - y + 2 = 0,$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad x + 3y - 6 = 0.\blacksquare$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ – нормальное уравнение некоторой прямой, а $M^*(x^*, y^*)$ – произвольная точка. Величина

$$\delta = x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \cos\beta - p$$

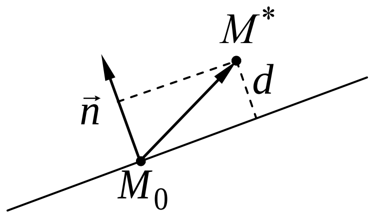
называется ***отклонением точки*** M^* ***от прямой***, причем, если $\delta > 0$, то данная точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от прямой, если $\delta < 0$, то точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от прямой. Для точек, лежащих на прямой, $\delta = 0$.

Расстояние от точки M^* до прямой L можно найти с помощью любой из формул:

$$d = |\delta| = \left|x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta - p\right|;$$

$$d = \left|\frac{Ax^* + By^* + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|;$$

$$d = \left|np_{\vec{n}}\, \overrightarrow{M_0 M^*}\right|.$$



где M_0 – произвольная точка, принадлежащая прямой, а $\vec{n}$ – нормальный вектор этой прямой.

ПРИМЕР 9. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми: $L_1 : x - 2y - 1 = 0$ и $L_2 : 2x - 4y + 3 = 0$.

Решение. Возьмем на прямой L_1 произвольную точку, например, $M(1;0)$, и найдем расстояние от этой точки до прямой L_2. Очевидно, мы получим искомое расстояние. Итак,

$$d = \left|\frac{2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 3}{\sqrt{2^2 + 4^2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{20}}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 10. Доказать, что прямая $2x-y+3=0$ пересекает отрезок *AB*, если $A(1;-2)$, $B(-4;0)$.

Решение. Нормальное уравнение данной прямой имеет вид

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0.$$

Найдем отклонения точек *A* и *B* от прямой:

$$\delta_A=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-2)-\frac{3}{\sqrt{5}}=-\frac{7}{\sqrt{5}},$$

$$\delta_B=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(-4)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0-\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}.$$

Так как $\delta_A<0$, то точка *A* и начало координат лежат по одну сторону от прямой, так как $\delta_B>0$, то точка *B* и начало координат лежат по разные стороны от прямой. Таким образом, точки *A* и *B* лежат по разные стороны от прямой, то есть прямая пересекает отрезок *AB*.■

Задачи

1. Дан треугольник с вершинами $P(2;2)$, $Q(-2;0)$, $R(1;-1)$. Составить

а). уравнение стороны *PQ*;

б). уравнение прямой проходящей через точку *P*, параллельно стороне *QR*;

в). уравнение медианы, проведенной из вершины *R*;

г). уравнение высоты, опущенной из вершины *Q* на сторону *PR*.

2. Найти точку *Q*, симметричную точке $P(1;1)$ относительно прямой $2x-y+1=0$.

3. Выяснить взаимное расположение прямых. Если они параллельны, найти расстояние между ними. Если прямые пересекаются, найти угол между ними.

а). $3x-4y+13=0,\ 2x+y-7=0$;

б). $2x-y+1=0,\ 4x-2y+3=0$.

4. Точка A(2;–5) является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата.

5. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку P(–4;5) под углом $\pi/4$ к прямой $L_1: 7x-y+8=0$.

Ответы: 1. а) $x-2y+2=0$; б). $x+3y-8=0$; в). $2x+y-1=0$; г). $x+3y+2=0$. **2.** (–0,6;1,8). **3.** а). $\varphi=\arccos\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$; б). $d=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. **4.** 5.

5. $4x+3y+1=0$; $3x-4y+32=0$.

Задания для самостоятельной работы

5.1. Дан треугольник с вершинами K(2;0), M(–2;6), N(4;–2). Написать

а). уравнение стороны KN;

б). уравнение средней линии, пересекающей стороны KM и KN;

в). уравнение медианы, проведенной из вершины K;

г). уравнение высоты, опущенной из вершины K на строну MN.

5.2. Уравнение $4x-3y+5=0$ привести к нормальному виду.

5.3. Найти точку симметричную точке P(–1;0) относительно прямой $3x-5y+1=0$.

5.4. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки A(–1;2) на прямую $3x-5y-21=0$.

5.5. Составить уравнение прямой, если известно, что точка M(4;2) является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

5.6. Выяснить взаимное расположение прямых. Если они параллельны, найти расстояние между ними. Если прямые пересекаются, найти угол между ними.

а). $2x-3y+4=0,\ \ 4x+y-12=0$;

б). $x+3y+14=0,\ \ 2x+6y-7=0$.

5.7. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых $x+2y+3=0$, $2x+4y-1=0$.

5.8. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.

5.9. Найти геометрическое место точек, расстояние от которых до прямой $5x-12y-13=0$ равно 4.

5.10. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x+2y-6=0$ относительно точки $A(4;2)$.

5.11. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух его высот: $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$ и вершину $A(3;–4)$.

5.12. Точка $P(1;–1)$ является центром квадрата, одна сторона которого лежит на прямой $x-2y+12=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.

5.13. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника *KMN* из задачи 5.1.

5.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-3=0$, $2x-3y+1=0$ параллельно (перпендикулярно) прямой $4x+5y-8=0$.

5.15. Доказать, что прямая $x+3y-4=0$ не пересекает отрезок *AB*, где $A(1;4)$, $B(–2;3)$.

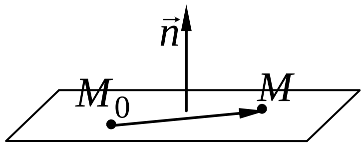
5.16. Даны координаты середин сторон треугольника: $N(1;2)$, $M(7;4)$, $L(3;–4)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

6. ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим различные уравнения плоскости в декартовой прямоугольной системе координат *Oxyz*.

1. ***Уравнение плоскости, проходящей через точку*** $M(x_0, y_0, z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\vec{n} = \{A, B, C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



Это уравнение представляет собой условие ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости.

Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, будем называть ***нормальным вектором*** этой плоскости.

2. ***Общее уравнение плоскости***

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Из общего уравнения плоскости можно найти координаты ее нормального вектора: $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Частные случаи:

$D = 0 \quad \Rightarrow \quad$ плоскость (*П*) проходит через начало координат;

$A = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \{0, B, C\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp Ox \quad \Rightarrow \quad П \parallel Ox;$

$B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \{A, 0, C\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp Oy \quad \Rightarrow \quad П \parallel Oy;$

$C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \{A, B, 0\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp Oz \quad \Rightarrow \quad П \parallel Oz;$

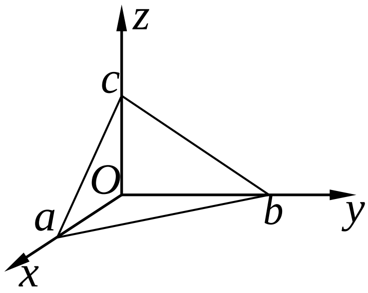
$A = 0, B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \{0, 0, C\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp Oxy \quad \Rightarrow \quad П \parallel Oxy;$

$B = 0, C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \{A, 0, 0\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp Oyz \quad \Rightarrow \quad П \parallel Oyz;$

$A = 0, C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \{0, B, 0\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp Oxz \quad \Rightarrow \quad П \parallel Oxz.$

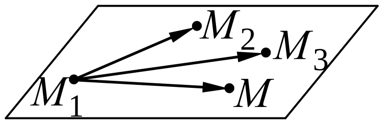
3. ***Уравнение плоскости в отрезках***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$



Числа a, b и c указывают, какие отрезки отсекает плоскость на осях координат.

4. ***Уравнение плоскости, проходящей через три точки*** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$,



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Это уравнение является условием компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости. После разложения определителя по первой строке и простейших преобразований получается общее уравнение плоскости.

5. ***Нормальное уравнение плоскости***

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

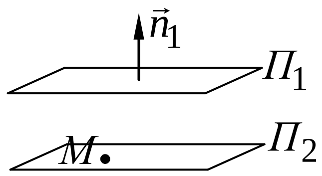
где $p\geq 0$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, α, β и γ – углы, который этот перпендикуляр образует с осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Замечание. Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ можно преобразовать в нормальное, умножив его на нормирующий множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad\begin{pmatrix} "+", \text{ если } D<0; \\ "-", \text{ если } D>0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1. Составить уравнение плоскости Π_2, проходящей через точку M(1;2;3) параллельно плоскости $\Pi_1 : 3x - y + 4z - 2 = 0$.

Решение. Так как плоскости Π_1 и Π_2 параллельны, то нормальный вектор $\vec{n}_1 = \{3; -1; 4\}$ плоскости Π_1 можно взять в качестве нормального вектора плоскости Π_2, то есть $\vec{n}_2 = \{3; -1; 4\}$.



Таким образом, уравнение плоскости Π_2 имеет вид

$$3 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-3) = 0 .$$

Раскрывая скобки, получаем общее уравнение плоскости

$$3x - y + 4z - 13 = 0 .\blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(3;–1;4) перпендикулярно оси Oy.

Решение. Искомая плоскость перпендикулярна оси Oy, следовательно, перпендикулярна вектору $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, который можно взять в качестве ее нормального вектора. Тогда уравнение искомой плоскости имеет вид

$$0 \cdot (x-3) + 1 \cdot (y - (-1)) + 0 \cdot (z-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = 0 .\blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку N(1;–2;2) перпендикулярно ее радиус-вектору.

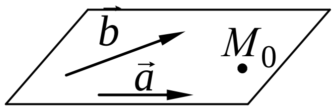
Решение. Радиус-вектор точки N является нормальным вектором плоскости, то есть $\vec{n} = \overrightarrow{ON} = \{1; -2; 2\}$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$1 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y - (-2)) + 2 \cdot (z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y + 2z - 9 = 0 .\blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;0;-2)$ параллельно векторам $\vec{a}=\{-2;1;-1\}$ и $\vec{b}=\{0;3;1\}$.

Решение. Первый способ. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны плоскости (можно считать, что они лежат в плоскости), то в качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, то есть

$$\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}.$$



Запишем уравнение плоскости:

$$4\cdot(x-1)+2\cdot(y-0)-6\cdot(z+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+y-3z-8=0.$$

Второй способ. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}=\left\{x-1;y;z+2\right\}$ лежит в этой плоскости. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю, то есть

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z+2\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Разложив определитель по первой строке и упростив полученное выражение, получим

$$2x+y-3z-8=0.\blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $N(1;2;0)$, $L(-1;1;1)$, $K(-2;3;1)$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{NL}=\{-2;-1;1\}$, $\overrightarrow{NK}=\{-3;1;1\}$ лежат в искомой плоскости, тогда вектор $\left[\overrightarrow{NL},\overrightarrow{NK}\right]$ ей перпендикулярен и, следовательно, является нормальным вектором, то есть

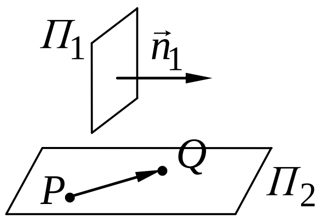
$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NK}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}\,.$$

Уравнение плоскости имеет вид

$$-2\cdot(x-1)-(y-2)-5\cdot(z-0)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+y+5z-4=0.$$

Это же уравнение можно получить, если приравнять нулю смешанное произведение компланарных векторов $\overrightarrow{NL},\ \overrightarrow{NK},\ \overrightarrow{NM}$, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости.■

ПРИМЕР 6. Составить уравнение плоскости Π_2, проходящей через точки P(1;–1;2), Q(–3;0;1) перпендикулярно плоскости $\Pi_1: 3x-4y+z-5=0$.



Решение. Так как плоскости Π_1 и Π_2 перпендикулярны, то нормальный вектор $\vec{n}_1=\{3;-4;1\}$ плоскости Π_1 параллелен плоскости Π_2, а вектор $\overrightarrow{PQ}=\{-4;1;-1\}$ лежит в плоскости Π_2. Тогда вектор $\left[\vec{n}_1,\overrightarrow{PQ}\right]$ перпендикулярен плоскости Π_2 и является ее нормальным вектором, то есть

$$\vec{n}_2 = \left[\vec{n}_1, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} - 13\vec{k}\,.$$

Уравнение плоскости Π_2:

$$3\cdot(x-1)-(y+1)-13\cdot(z-2)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x-y-13z+22=0\,.$$■

Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны две плоскости:

$$\Pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\};$$
$$\Pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Тогда возможны три случая:

1. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2} \;\Leftrightarrow\;$ плоскости Π_1 и Π_2 параллельны.

2. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \;\Leftrightarrow\;$ плоскости Π_1 и Π_2 совпадают.

3. $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не коллинеарны $\Leftrightarrow$ плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются.

Угол φ между плоскостями Π_1 и Π_2 – это угол между их нормальными векторами, то есть

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(для определения острого угла между плоскостями нужно правую часть равенства взять по модулю).

Условие перпендикулярности плоскостей имеет вид

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

ПРИМЕР 7. Найти острый угол φ между плоскостями $x + 2y - 5z - 12 = 0$ и $3x - y + z - 7 = 0$.

Решение. Так как $\vec{n}_1 = \{1; 2; -5\}$ и $\vec{n}_2 = \{3; -1; 1\}$, то

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 3 + 2\cdot(-1) - 5\cdot 1|}{\sqrt{1+4+25}\sqrt{9+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{330}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{4}{\sqrt{330}}$. ■

Расстояние от точки до плоскости

Пусть дано нормальное уравнение некоторой плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ и точка $M^*(x^*, y^*, z^*)$, тогда величина

$$\delta = x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \cos\beta + z^* \cdot \cos\gamma - p$$

называется ***отклонением точки*** M^* ***от плоскости***, причем, если $\delta > 0$, то данная точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, если $\delta < 0$, то точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от плоскости. Для точек, лежащих на плоскости, $\delta = 0$.

Расстояние от точки M^* до плоскости можно найти, используя любую из формул:

$$d = |\delta| = \left| x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \cos\beta + z^* \cdot \cos\gamma - p \right|;$$

$$d = \left| \frac{Ax^* + By^* + Cz^* + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|;$$

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M^*} \right|,$$

где M_0 – произвольная точка, принадлежащая плоскости, а $\vec{n}$ – нормальный вектор этой плоскости.

ПРИМЕР 8. Найти высоту тетраэдра *ABCD*, опущенную из вершины *D* на грань *ABC*, если *A*(2;1;3), *B*(–1;0;2), *C*(1;1;0), *D*(4;1;–3).

Решение. Искомая высота h равна расстоянию от точки *D* до плоскости, проходящей через точки *A*, *B*, *C*. Составим уравнение этой плоскости. Так как

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k},$$

то уравнение плоскости имеет вид

$$3\cdot(x-2)-8\cdot(y-1)-(z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x-8y-z+5=0.$$

Найдем расстояние d от точки D до плоскости:

$$d=\frac{|3\cdot 4-8\cdot 1-1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{9+64+1}}=\frac{12}{\sqrt{74}} \quad\Rightarrow\quad h=\frac{12}{\sqrt{74}}.\blacksquare$$

Задачи

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2;1;0)$ параллельно плоскости $x+3z-100=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$, если $M(3;–1;1)$, $N(1;2;–4)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1;4;7)$ параллельно векторам $\vec{a}=\{3;-1;2\}$ и $\vec{b}=\{-2;1;4\}$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;0;5)$, $N(–1;2;0)$, $K(3;–1;4)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(–2;3;0)$ перпендикулярно плоскостям $2x-3z+2=0$ и $x+2y-z+3=0$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;1;–4)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{0;1;-2\}$ и оси Oz.

7. Найти острый угол между плоскостями

$$2x+y-z=0 \quad\text{и}\quad 3x+2y-5z+2=0.$$

8. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$x+2y-z+2=0 \quad\text{и}\quad 2x+4y-2z+7=0.$$

Ответы: 1. $x+3z-2=0$. **2.** $2x-3y+5z-14=0$.
3. $-6x-16y+z+63=0$. **4.** $7x+8y-z-9=0$. **5.** $6x-y+4z+15=0$.
6. $x-2=0$. **7.** $\arccos\frac{13}{\sqrt{228}}$. **8.** $\frac{3}{\sqrt{24}}$.

Задания для самостоятельной работы

6.1. Составить уравнение плоскости проходящей через точку $K(1;0;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{c} = \{-2;5;4\}$.

6.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $4x - 6y + 3z - 15 = 0$.

6.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(0;2;-3)$ параллельно плоскости Oxy.

6.4. Составить уравнение плоскости проходящей через точку $K(1;2;0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{-3;1;6\}$ и оси Oy.

6.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(0;3;4)$ и $N(-2;1;3)$ параллельно вектору $\vec{b} = \{-2;1;4\}$.

6.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M(-2;1;2)$, $N(2;4;-1)$, $K(0;1;3)$.

6.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $N(-2;1;3)$.

6.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $N(2;0;1)$ перпендикулярно плоскостям $x - 2y - 3z + 2 = 0$ и $2x + z = 0$.

6.9. Найти расстояние от точки $M(5;4;-1)$ до плоскости, проходящей через точки $K(0;4;0)$, $L(0;4;-3)$, $N(3;0;3)$.

6.10. Найти острый угол между плоскостями

$$2x + 4y - 3z + 7 = 0 \quad \text{и} \quad x - 2y = 0.$$

6.11. При каком значении λ плоскости $3x - \lambda y + z - 1 = 0$ и $\lambda x + y + 2z = 0$ перпендикулярны?

6.12 Две грани куба лежат на плоскостях $2x - y + 3z - 4 = 0$ и $2x - y + 3z + 1 = 0$. Найти объем этого куба.

6.13 На оси Oy найти точку, находящуюся на расстоянии $d = 4$ от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

6.14. Доказать, что три плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$, $2x + y - z = 0$ и $x - 3y + 2z - 2 = 0$ имеют одну общую точку.

7. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим различные способы задания прямой в пространстве в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$.

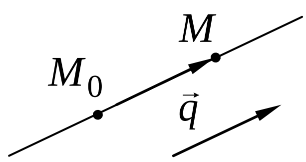
1. ***Общие уравнения прямой***

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

задают прямую в пространстве как линию пересечения двух плоскостей (векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ должны быть не коллинеарны).

2. ***Канонические уравнения прямой***, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному вектору $\vec{q} = \{l, m, n\}$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$



Эти уравнения представляют собой условие коллинеарности векторов $\vec{q}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка прямой.

Любой ненулевой вектор, параллельный прямой, называется ***направляющим вектором*** этой прямой.

От канонических уравнений можно перейти к общим уравнениям, например, следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Если одна или две координаты вектора $\vec{q}$ равны нулю, то это означает, что числители соответствующих дробей тоже равны нулю.

3. ***Параметрические уравнения прямой***

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

можно получить, если ввести параметр: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t$. Любому значению параметра t ($t \in \mathbb{R}$) соответствует единственная точка на прямой, и, наоборот, любой точке на прямой соответствует единственное значение параметра t.

ПРИМЕР 1. Составить канонические, общие и параметрические уравнения оси Oy.

Решение. Для того чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно иметь какую-нибудь точку, принадлежащую прямой, и какой-нибудь направляющий вектор. Точка $O(0;0;0)$ лежит на оси Oy, а вектор $\vec{j} = \{0;1;0\}$ можно взять в качестве направляющего. Тогда канонические уравнения оси Oy:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}.$$

Поскольку знаменатели первой и третьей дробей равны нулю, то и числители этих дробей также равны нулю. Таким образом, общие уравнения оси Oy имеют вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Получим параметрические уравнения оси Oy:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \blacksquare \\ z = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Составить канонические, общие и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $P(1;2;-5)$ и $Q(-2;2;0)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{PQ}=\{-3;0;5\}$ является направляющим вектором прямой, точка P (можно взять точку Q) принадлежит этой прямой, тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+5}{5}.$$

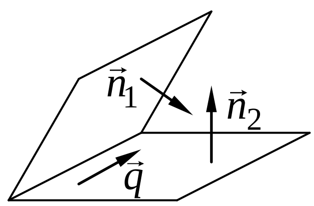
Общие уравнения прямой можно записать, например, так

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{z+5}{5},\\ y=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}5x+3z+10=0,\\ y=2.\end{cases}$$

И, наконец, выпишем параметрические уравнения

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+5}{5}=t\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=-3t+1,\\ y=2,\\ z=5t-5.\end{cases}\quad\blacksquare$$

ПРИМЕР 3. Привести к каноническому виду прямую, заданную общими уравнениями $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\ x+4z+2=0.\end{cases}$



Решение. Первый способ. Так как прямая лежит одновременно в обеих плоскостях, то любой ее направляющий вектор ортогонален нормальным векторам $\vec{n}_1=\{2;-1;3\}$ и $\vec{n}_2=\{1;0;4\}$ обеих плоскостей, тогда вектор

$$\vec{q}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=-4\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$$

можно взять в качестве направляющего.

Найдем какую-нибудь точку, принадлежащую прямой. Координаты этой точки являются частным решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 4z + 2 = 0, \end{cases}$$

состоящей из двух уравнений с тремя неизвестными. Одна из переменных является свободной. Пусть, например, $z = 0$, тогда

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -5. \end{cases}$$

Точка $M_0(-2;-5;0)$ принадлежит прямой, следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z}{1}.$$

Второй способ. Канонические уравнения прямой можно получить, имея любые две точки, принадлежащие этой прямой. Точка M_0 найдена выше, найдем вторую точку M_1. Пусть $z = 1$, тогда

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6, \\ y = -10. \end{cases} \Rightarrow M_1(-6;-10;1).$$

В качестве направляющего возьмем вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{-4;-5;1\}$, тогда имеем

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z}{1}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 4. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $P(2;4;0)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-3}$.

Решение. Поскольку прямые параллельны, то вектор $\vec{q} = \{2;1;-3\}$ является направляющим вектором обеих прямых. Тогда канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{-3}. \blacksquare$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны две прямые в пространстве:

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\ M_1(x_1,y_1,z_1);$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \qquad \vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\},\ M_2(x_2,y_2,z_2).$$

Здесь прямые заданы каноническими уравнениями, но они могут быть заданы общими или параметрическими уравнениями, при этом всегда можно найти направляющие векторы прямых и точки, принадлежащие этим прямым.

1. Прямые L_1 и L_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2$. В частности, прямые могут совпадать. Чтобы проверить, совпадают прямые или нет, достаточно координаты точки, принадлежащей одной прямой, подставить в уравнения другой прямой. Если получатся истинные равенства, то прямые совпадают.

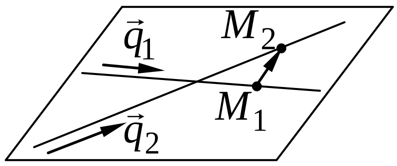
ПРИМЕР 5. Определить взаимное расположение прямых в пространстве, если $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$; $\quad L_2: \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{1}$.

Решение. Так как $\vec{q}_1=\{2;1;-1\}$ и $\vec{q}_2=\{-2;-1;1\}$ коллинеарны, то прямые параллельны. Точка $M_1(1;-1;0)$ принадлежит прямой L_1. Подставив ее координаты в канонические уравнения прямой L_2, имеем

$$\frac{1}{-2}\neq\frac{-1+1}{-1}\neq\frac{0+3}{1}.$$

Следовательно, точка M_1 не принадлежит второй прямой, то есть прямые не совпадают.■

2. Прямые L_1 **и** L_2 **пересекаются**, если они лежат в одной плоскости и не параллельны.



Прямые L_1 и L_2 пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ компланарны, то есть

$$\left\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \right\rangle = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

причем векторы $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ должны быть не коллинеарны.

3. Прямые L_1 **и** L_2 **скрещиваются**, то есть принадлежат разным плоскостям, если $\left\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \right\rangle \neq 0$.

ПРИМЕР 6. Определить взаимное расположение прямых

$$L_1: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x - 2y - z = 0, \end{cases} \quad L_2: \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

Решение. Найдем направляющий вектор прямой L_1:

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{k}.$$

Удобно взять в качестве направляющего вектор $\vec{q}_1 = \{1; 0; 1\}$, который коллинеарен найденному. Так как векторы $\vec{q}_1 = \{1; 0; 1\}$ и $\vec{q}_2 = \{0; 1; 2\}$ не коллинеарны, то прямые не параллельны.

Точка $M_2(-1; 0; 3)$ принадлежит прямой L_2. Найдем точку M_1, принадлежащую прямой L_1. Пусть $z = 0$, тогда

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3} \Rightarrow M_1\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0\right).$$

Так как

$$\left\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2 \right\rangle = \begin{vmatrix} -1/3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то прямые L_1 и L_2 скрещиваются.■

Угол между прямыми

Угол φ между прямыми – это угол между направляющими векторами этих прямых, то есть

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1||\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

(для определения острого угла между прямыми нужно правую часть равенства взять по модулю).

В частности, условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0.$$

ПРИМЕР 7. Найти острый угол φ между прямыми

$$L_1: \begin{cases} 2x - y + 3z + 10 = 0, \\ x - 3y + z = 0, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2t, \\ z = -1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем направляющие векторы прямых L_1 и L_2:

$$\vec{q}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{q}_2 = \{1; 2; 0\},$$

Тогда

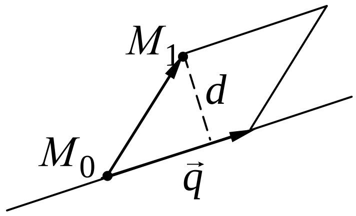
$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{q}_1, \vec{q}_2)|}{|\vec{q}_1||\vec{q}_2|} = \frac{|8 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 0|}{\sqrt{64 + 1 + 25}\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{18}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{18}}.$$■

Расстояние от точки до прямой

Пусть даны канонические уравнения некоторой прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$, не принадлежащая этой прямой.

Расстояние от точки M_1 до прямой – это длина высоты параллелограмма, построенного на векторах $\vec{q}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $\vec{q}=\{l,m,n\}$ – направляющий вектор прямой, а $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, то есть

$$d=\frac{\left|\left[\vec{q},\overrightarrow{M_0M_1}\right]\right|}{|\vec{q}|}.$$



ПРИМЕР 8. Найти расстояние от точки $M_1(3;0;5)$ до прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{0}$.

Решение. Из канонических уравнений прямой находим направляющий вектор $\vec{q}=\{-1;3;0\}$ и точку $M_0(2;-1;4)$, принадлежащую прямой, тогда $\overrightarrow{M_0M_1}=\{1;1;1\}$ и

$$\left[\vec{q},\overrightarrow{M_0M_1}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}.$$

Следовательно, расстояние от точки M_1 до прямой равно

$$d=\frac{\left|\left[\vec{q},\overrightarrow{M_0M_1}\right]\right|}{|\vec{q}|}=\frac{\sqrt{9+1+16}}{\sqrt{1+9+0}}=\sqrt{\frac{13}{5}}.\blacksquare$$

Задачи

1. Составить канонические, общие, параметрические уравнения

а). прямой, проходящей через точку $M(5;2;4)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{2;-3;6\}$;

б). оси Oz;

в). прямой, проходящей через точки $M(2;–2;1)$ и $N(3;1;–2)$;

г). прямой, проходящей через точку $M(2;–11;17)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-y+133=0, \\ 2x+3y-z-22=0. \end{cases}$

2. Привести прямую $\begin{cases} x+3y-2z+3=0, \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ к каноническому виду.

3. Найти величину острого угла между прямыми:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y-z+11=0, \\ x-2y+3z-2=0. \end{cases}$$

4. Выяснить взаимное расположение прямых:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}, \quad \frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-2}.$$

5. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-2}, \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{-2}.$$

6. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;2;–4)$ и образующей с осями Ox, Oy, Oz углы 120°, 60°, 45° соответственно.

Ответы: 1. г). $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+11}{1}=\dfrac{z-17}{5}$. **2.** $\dfrac{x-0,2}{1}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1,6}{-7}$.

3. $\arccos\dfrac{6}{\sqrt{98}}$. **4.** скрещиваются. **5.** $d=2$. **6.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+4}{\sqrt{2}}$.

Задания для самостоятельной работы

7.1. Составить канонические, общие, параметрические уравнения

а). прямой, проходящей через точки $M(5;–3;4)$ и $N(3;–4;5)$;

б). оси Ox;

в). прямой, проходящей через точку $M(4;–7;10)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ 3x + y - 2z - 12 = 0. \end{cases}$

7.2. Привести прямую $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ к каноническому виду.

7.3. Найти величину острого угла между прямыми:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2x + y - z - 6 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

7.4. Выяснить взаимное расположение прямых:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2} \text{ и } \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}.$$

7.5. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2} \text{ и } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{-2}$$

7.6. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $N(1;–2;3)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-1}{4}$.

7.7. Даны вершины треугольника $A(1;2;3)$, $B(–3;0;2)$, $C(2;–1;4)$. Составить канонические уравнения медианы, проведенной из вершины A.

7.8. Проверить, лежат ли в одной плоскости прямые:

$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0; \\ y + z - 6 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x + 2z - 3 = 0; \\ x - 5y + 9 = 0. \end{cases}$$

8. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Пусть даны уравнения прямой и плоскости в пространстве:

$$L: \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \quad \vec{q}=\{l,m,n\}, M_0(x_0,y_0,z_0);$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0, \quad \vec{n}=\{A,B,C\}.$$

1. Прямая L и плоскость Π параллельны, если

$$Al+Bm+Cn=0.$$

2. Прямая L и плоскость Π перпендикулярны, если

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

3. Прямая L лежит в плоскости Π, если

$$Al+Bm+Cn=0 \quad \text{и} \quad M_0 \in \Pi.$$

4. Для угла φ между прямой L и плоскостью Π справедливо:

$$\sin\varphi=\frac{|(\vec{n},\vec{q})|}{|\vec{n}||\vec{q}|}=\frac{|A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

ПРИМЕР 1. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{-2}$ и плоскости $2x-3y+5z-11=0$.

Решение. Составим параметрические уравнения прямой:

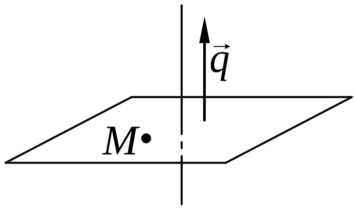
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{-2}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2, \\ z=-2t-1. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдем значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$2\cdot(t+1)-3\cdot(-2)+5\cdot(-2t-1)-11=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1.$$

Подставляя найденное значение $t=-1$ в параметрические уравнения прямой, получаем $x=0$, $y=-2$, $z=1$. Следовательно, точка пересечения прямой и плоскости: $P(0;–2;1)$.■

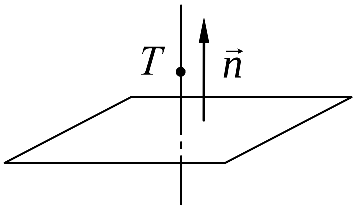
ПРИМЕР 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;4)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{4}$.



Решение. Так как заданная прямая перпендикулярна искомой плоскости, то направляющий вектор $\vec{q}=\{2;-3;4\}$ прямой перпендикулярен этой плоскости и, следовательно, является ее нормальным вектором. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$2\cdot(x-1)-3\cdot(y-2)+4\cdot(z-4)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-3y+4z-12=0.■$$

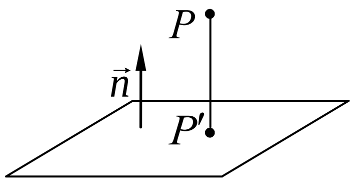
ПРИМЕР 3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $T(–2;3;0)$ перпендикулярно плоскости $x+5y-4z+13=0$.



Решение. Так как плоскость и искомая прямая перпендикулярны, то нормальный вектор $\vec{n}=\{1;5;-4\}$ плоскости параллелен прямой, и является ее направляющим вектором. Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{-4}.■$$

ПРИМЕР 4. Найти координаты проекции точки $P(1;2;–1)$ на плоскость $3x-y+2z-27=0$.



Решение. Проекция P' точки P на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из точки P на эту плоскость.

Чтобы найти координаты точки P', нужно составить уравнения прямой, проходящей через точку P перпендикулярно плоскости и найти точку пересечения этой прямой и плоскости.

В качестве направляющего вектора искомой прямой возьмем нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \{3; -1; 2\}$. Тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

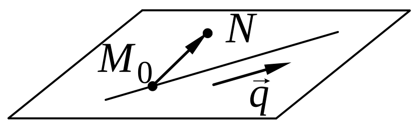
Перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3t+1, \\ y = -t+2, \\ z = 2t-1. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдем t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$3 \cdot (3t+1) - (-t+2) + 2 \cdot (2t-1) - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad P'(7; 0; 3). \blacksquare$$

ПРИМЕР 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ и точку $N(2;3;5)$.



Решение. Так как векторы $\vec{q} = \{1; -1; 3\}$ и $\overrightarrow{M_0N} = \{1; 1; 7\}$ ($M_0(1; 2; -2)$ – точка прямой) лежат в плоскости и не коллинеарны, то вектор

$$\vec{n} = \left[\vec{q}, \overrightarrow{M_0N}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

является нормальным вектором плоскости. Вектор $\vec{n}_1 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, коллинеарный вектору $\vec{n}$, также является нормальным вектором. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$5(x-1) + 2(y-2) - (z+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 2y - z - 11 = 0. \blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;4)$ параллельно прямым $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{0}$, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}$.

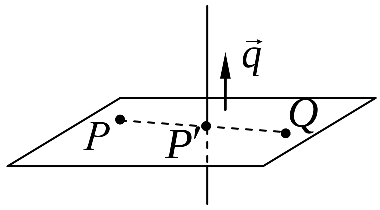
Решение. Так как прямые параллельны плоскости, то их направляющие векторы $\vec{q}_1=\{1;2;0\}$ и $\vec{q}_2=\{3;0;-1\}$ также параллельны плоскости. Тогда вектор

$$\vec{n}=[\vec{q}_1,\vec{q}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$$

является нормальным вектором плоскости. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид:

$$-2(x-2)+(y-3)-6(z-4)=0 \quad\Rightarrow\quad -2x+y-6z+25=0.\blacksquare$$

ПРИМЕР 7. Найти точку Q, симметричную точке $P(2;–2;1)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$.



Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно заданной прямой. В качестве нормального вектора плоскости возьмем направляющий вектор прямой, то есть $\vec{n}=\{1;1;-1\}$, тогда уравнение плоскости

$$1\cdot(x-2)+1\cdot(y+2)-1\cdot(z-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x+y-z+1=0.$$

Найдем точку P' пересечения прямой и плоскости, она же является проекцией точки P на прямую, и она же, очевидно, является серединой отрезка PQ.

Составим параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=t+1,\\ y=t+2,\\ z=-t.\end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдем значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$(t+1)+(t+2)-(-t)+1=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad P'\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right).$$

Так как точка $P'\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ – середина отрезка PQ, то имеем:

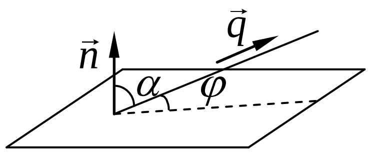
$$\frac{2+x_Q}{2}=-\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_Q=-\frac{8}{3};$$

$$\frac{-2+y_Q}{2}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad y_Q=\frac{10}{3};$$

$$\frac{1+z_Q}{2}=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad z_Q=\frac{5}{3}.$$

Следовательно, $Q\left(-\frac{8}{3},\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ – искомая точка.■

ПРИМЕР 8. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и плоскостью $2x-y+4z+5=0$.



Решение. Угол φ между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть α – это острый угол между векторами $\vec{n}=\{2;-1;4\}$ и $\vec{q}=\{2;2;-1\}$, тогда, очевидно, $\underline{\varphi+\alpha=\pi/2}$, и для угла φ имеем

$$\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{\left|(\vec{n},\vec{q})\right|}{|\vec{n}||\vec{q}|}=\frac{|2\cdot 2-1\cdot 2+4\cdot(-1)|}{\sqrt{4+1+16}\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3\sqrt{21}},$$

следовательно, $\varphi=\arcsin\frac{2}{3\sqrt{21}}$.■

Задачи

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1;2;4)$ перпендикулярно плоскости $3x-4y+z-11=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1;0;-4)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{5}$.

3. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ и плоскости $x+3y-2z-1=0$.

4. Найти проекцию точки $P(1;0;-1)$ на прямую $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

5. Найти точку Q, симметричную точке $P(0;2;-1)$ относительно плоскости $x-2y+2z+1=0$.

6. При каких значениях параметров C и l прямая $\dfrac{x-3}{l}=\dfrac{y+6}{1}=\dfrac{z+5}{-2}$ и плоскость $5x-2y+Cz+1=0$ перпендикулярны?

7. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{2}$ и плоскостью $x+2y-z+1=0$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-3}.$$

9. Проверить, принадлежит ли прямая $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+1}{3}$ плоскости $3x+4y-2z=0$.

Ответы: **3.** $\left(\dfrac{11}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$. **4.** $\left(1;-\dfrac{2}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$. **5.** $\left(\dfrac{10}{9};-\dfrac{2}{9};\dfrac{11}{9}\right)$.

6. $l=-2,5; C=4$. **7.** $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{84}}$. **8.** $3y+z-1=0$. **9.** да.

Задания для самостоятельной работы

8.1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $N(2;3;–5)$ перпендикулярно плоскости $5x-2z-31=0$.

8.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(6;2;–1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-4}$.

8.3. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ и плоскости $2x+2y-3z-3=0$.

8.4. Найти проекцию точки $P(2;1;–3)$ на плоскость $2x+y-2z-2=0$.

8.5. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;2;0)$ относительно прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{0}$.

8.6. При каких значениях A и m прямая $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+4}{m}=\dfrac{z+2}{6}$ и плоскость $Ax-3y-4z+5=0$ перпендикулярны?

8.7. При каком значении параметра l прямая $\dfrac{x+1}{l}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+5}{1}$ и плоскость $4x-2y-3z+6=0$ параллельны?

8.8. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$ и плоскостью $4x+y-2z+11=0$.

8.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;5;–2)$ и прямую $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$.

8.10. Принадлежит ли прямая $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ плоскости $x+4y-z-13=0$?

9. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кривой второго порядка называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy определяется уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

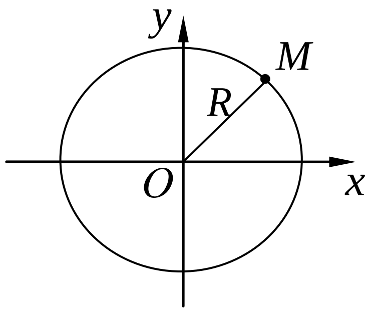
где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Это уравнение может задавать окружность, эллипс, гиперболу, параболу (невырожденные случаи), а также пустое множество, точку, прямую, пару прямых (вырожденные случаи).

Рассмотрим невырожденные случаи.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место всех точек плоскости, удаленных от заданной точки, называемой ***центром***, на одно и то же расстояние R, которое называется ***радиусом*** окружности.



Существует система координат Oxy, в которой уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением окружности***, а система координат, в которой окружность задается каноническим уравнением, называется ***канонической***. Центр окружности находится в начале координат.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

ПРИМЕР 1. Найти координаты центра и радиус окружности, уравнение которой $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты в левой части заданного уравнения

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2 .$$

Центр окружности находится в точке $C(1;-2)$, а радиус равен 5.■

ПРИМЕР 2. Какую линию определяет уравнение $x = -\sqrt{9 - y^2}$?

Решение. Из условия следует, что $x \le 0$. Возведем обе части заданного уравнения в квадрат:

$$x^2 = 9 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9.$$

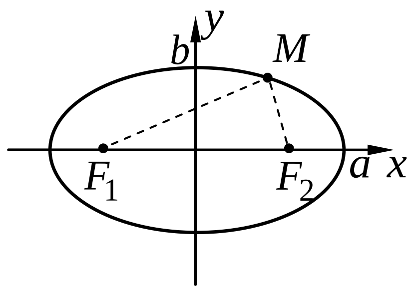
Полученное уравнение определяет окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Искомая линия является частью этой окружности, а именно, это полуокружность, расположенная слева от прямой $x = 0$.■

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная.

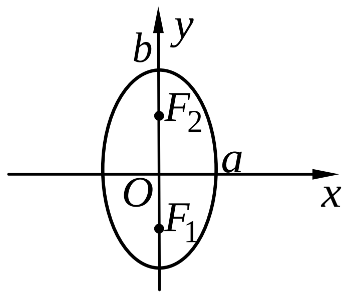
Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



При $a > b$ (a – большая полуось, b – малая полуось), уравнение определяет эллипс, фокусы которого находятся на оси Ox в точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$.

При $a<b$ (b – большая полуось, a – малая полуось) фокусы эллипса находятся на оси Oy в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, где $c^2=b^2-a^2$.



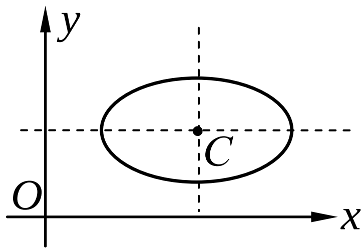
При $a=b$ получается окружность

$$x^2+y^2=a^2.$$

Уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

задает эллипс с центром в точке $C(x_0,y_0)$, оси симметрии эллипса параллельны осям координат.



ПРИМЕР 3. Найти координаты центра и длины полуосей эллипса, уравнение которого $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

Решение. Выделим полные квадраты в левой части уравнения:

$$4(x^2-2x+1)+3(y^2+4y+4)-48=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$

Центр эллипса находится в точке C(1;–2), а полуоси: $a=2\sqrt{3},\ b=4$.

ПРИМЕР 4. Установить, какую линию определяет уравнение $y=2-\dfrac{4}{3}\sqrt{-x^2-6x}$.

Решение. Из условия следует, что $y\le 2$. Перенесем двойку в левую часть уравнения, возведем обе части полученного уравнения в квадрат и выделим полный квадрат по переменной x, тогда

$$(y-2)^2=\frac{16}{9}(-x^2-6x) \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1.$$

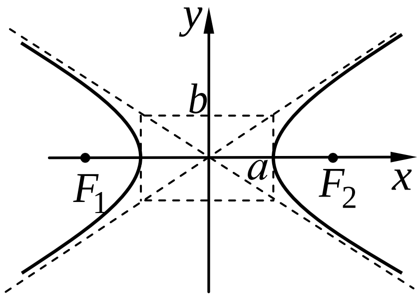
Полученное уравнение задет эллипс с центром в точке C(–3;2) и полуосями $a=3,\ b=4$. Искомая кривая – половина этого эллипса, расположенная под прямой $y=2$.■

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (*)$$

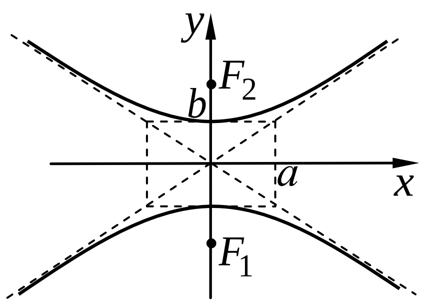


где a – ***действительная полуось***, b – ***мнимая полуось*** гиперболы.

Фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где $c^2=a^2+b^2$. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$



задает гиперболу, которая называется ***сопряженной*** гиперболе (*). Ее фокусы находятся в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$.

Гипербола с центром в точке $C(x_0,y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям, задается одним из уравнений

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1.$$

ПРИМЕР 5. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0$.

Решение. Выделим полные квадраты в левой части уравнения:

$$9(x^2-4x+4)-16(y^2+2y+1)-144=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Полученное уравнение задает гиперболу, центр которой находится в точке $C(2;–1)$, а полуоси: $a=4$, $b=3$.■

ПРИМЕР 6. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение $y=-1-\frac{3}{5}\sqrt{x^2-2x+26}$.

Решение. Перенесем -1 в левую часть, возведем обе части уравнения в квадрат и, выделяя полный квадрат по переменной *x*, получим:

$$\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y+1)}{9}=-1.$$

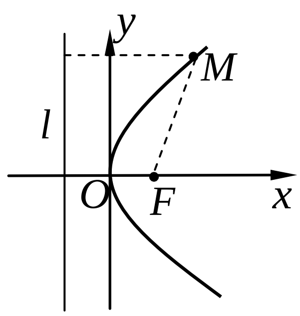
Это уравнение описывает гиперболу с центром в точке $C(1;-1)$, фокусами на оси *Oy* и полуосями $a=5$, $b=3$. Искомая кривая – часть гиперболы, расположенная ниже прямой $y=-1$.■

Парабола

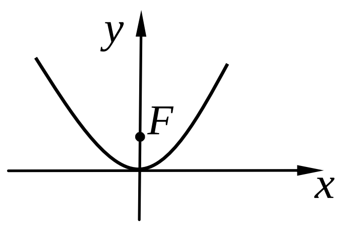
Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки этой плоскости, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***.

Каноническое уравнение параболы:

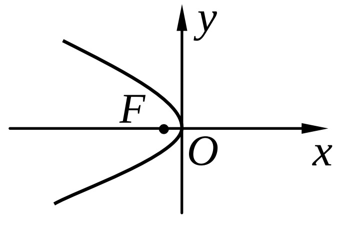
$$y^2=2px,$$



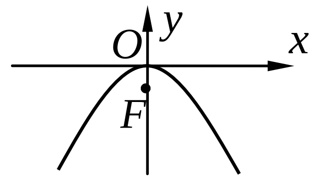
где p $(p>0)$ – ***параметр*** параболы, равный расстоянию от фокуса $F(p/2,0)$ до директрисы *l* (уравнение директрисы $x=-p/2$). Точка $O(0;0)$ – вершина параболы, а ось *Ox* – ось симметрии. Ветви параболы направлены вправо.



Уравнение $x^2=2py$ задает параболу, симметричную относительно оси *Oy*, с вершиной в точке $O(0;0)$ и фокусом в точке $F(0,p/2)$. Ветви параболы направлены вверх.



Уравнение $y^2=-2px$ задает параболу, симметричную относительно оси *Ox*, с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F\left(-p/2,0\right)$. Ветви параболы направлены влево.



Уравнение $x^2=-2py$ задает параболу, симметричную относительно оси *Oy*, с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F\left(0,-p/2\right)$. Ветви параболы направлены вниз.

Если вершина параболы находится в точке $C(x_0,y_0)$, а ось симметрии параллельна одной из координатных осей, то парабола задается одним из следующих уравнений

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0),\qquad (x-x_0)^2=2p(y-y_0),$$
$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0),\quad (x-x_0)^2=-2p(y-y_0).$$

ПРИМЕР 7. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение $2x+y^2-6y+13=0$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной *y*, имеем

$$2x+y^2-6y+13=0 \quad\Rightarrow\quad (y-3)^2=-2(x+2).$$

Полученное уравнение описывает параболу с вершиной в точке *C*(–2;3), $p=1$ (ветви параболы направлены влево).■

ПРИМЕР 8. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение $x=-3+\sqrt{-6y+12}$.

Решение. Перенесем –3 в левую часть, возведем обе части уравнения в квадрат, тогда получим:

$$x=-3+\sqrt{-6y+12} \quad\Rightarrow\quad (x+3)^2=-6(y-2).$$

Это уравнение описывает параболу с вершиной в точке *C*(–3;2), $p=3$, ветви направлены вниз. Искомая кривая – часть параболы, расположенная справа от прямой $x=-3$.■

Задачи

1. Выяснить какую линию на плоскости описывает уравнение, указать центр (вершину), полуоси (радиус, параметр):

а). $3x^2-6x+2y^2+8y+5=0$; б). $x=-1+\dfrac{2}{3}\sqrt{-y^2+4y+5}$;

в). $4x^2+16x-5y^2-10y+31=0$; г). $x=-3-\dfrac{1}{2}\sqrt{4+y^2}$;

д). $x^2+4x-4y-16=0$; е). $y=-3-\sqrt{x-2}$.

Ответы: **1. а).** эллипс, $C(1;–2)$, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$; **б).** часть эллипса ($C(–1;2)$, $a=2$, $b=3$), находящаяся правее прямой $x=-1$;

в). гипербола (сопряженная), $C(–2;–1)$, $a=\sqrt{5}$, $b=2$; **г).** часть гиперболы ($C(–3;0)$, $a=1$, $b=2$), находящаяся левее прямой $x=-3$;

д). парабола $C(–2;–5)$, $p=2$; **е).** часть параболы ($C(2;–3)$, $p=0,5$), находящаяся ниже прямой $y=-3$.

Задания для самостоятельной работы

9.1. Выяснить какую линию на плоскости описывает уравнение, указать центр (вершину), полуоси (радиус, параметр):

а). $x^2+2x-2y^2+8y-11=0$; б). $25x^2-100x+4y^2+24y+36=0$;

в). $x^2+2x+8y+25=0$; г). $x^2+4x+y^2-6y-12=0$;

д). $y=-2-\sqrt{3-x^2-2x}$; е). $x=-4+\sqrt{6y-18}$;

ж). $y=3+\dfrac{2}{3}\sqrt{6x-x^2}$; з). $y=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+4x+1}$.

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Тема: Векторы

Вариант 1

1. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;-3;1)$, $B(0;2;-4)$, $C(1;2;0)$. Найти площадь этого треугольника.

2. Дано: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$. Найти $\left(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

3. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\left(\vec{x},\vec{b}\right)=3$.

4. Лежат ли точки $A(2;3;-1)$, $B(-1;0;3)$, $C(4;2;-2)$, $D(1;0;4)$ в одной плоскости?

5. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он образует угол $60°$ с осью *Oy,* угол $135°$ с осью *Oz* и $|\vec{a}|=4$.

Вариант 2

1. Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен вектору $\vec{c}=\{1;-3;5\}$ и оси *Oy*, составляет острый угол с осью *Oz*, и $|\vec{x}|=5$.

2. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=3\pi/4$. Найти $\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|$.

3. Дано: $A(2;2;-1)$, $B(-3;1;0)$, $C(-1;2;3)$, $D(1;1;2)$. Найти $np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{DB}$.

4. При значении λ векторы $\vec{a}=\{1;-3;0\}$, $\vec{b}=\{2;\lambda;-3\}$ и $\vec{c}=\{-2;1;0\}$ компланарны?

5. Найти вектор $\vec{a}$, образующий одинаковые острые углы с осями координат, если $|\vec{a}|=2$.

Вариант 3

1. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$.

2. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$ на направление вектора $\vec{b}$, составляющего углы 60°, 135° с осями *Ox*, *Oy* соответственно и острый угол с осью *Oz*.

3. Дан треугольник с вершинами в точках *A*(2;–3;1), *B*(–2;0;2), *C*(1;2;3). Найти величину внешнего угла при вершине *A*.

4. Существует ли тетраэдр с вершинами в точках *A*(2;0;–3), *B*(1;3;–3), *C*(1;2;–2), *D*(1;–2;4)?

5. Найти единичный вектор $\vec{a}$, ортогональный векторам $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$ и $\vec{c} = \{2; -4; 1\}$.

Тема: Аналитическая геометрия

Вариант 1

1. Дан треугольник с вершинами в точках *A*(2;–3), *B*(0;2), *C*(1;2). Составить уравнение прямой, содержащей медиану, проведенную из вершины *B*. Найти точку пересечения медиан.

2. При каком значении параметра *C* прямая $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z}{-3}$ параллельна плоскости $3x - y + Cz - 2 = 0$? Найти расстояние между прямой и плоскостью.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *T*(2;0;3) и прямую $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z}{-3}$.

4. Привести прямую $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0; \\ 2x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$ к каноническому виду.

5. Какую кривую задает уравнение $3x^2 - 12x - 4y^2 - 8y - 4 = 0$?

Вариант 2

1. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;–3)$, $B(0;2)$, $C(1;2)$. Составить уравнение прямой, содержащей высоту, опущенную из вершины C на сторону AB. Найти длину указанной высоты.

2. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z}{-3}$ и плоскостью $2x-3y+z=0$. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

3. Выяснить взаимное расположение прямой $\begin{cases} 2x-y+z-1=0; \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$ и плоскости $x+2y-4z-3=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;3;1)$, $B(–1;3;0)$, $C(3;1;2)$.

5. Определить, какую кривую задает уравнение $y=2-\sqrt{24-6x}$.

Вариант 3

1. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;–3)$, $B(0;2)$, $C(1;2)$. Найти центр описанной окружности.

2. При каком значении λ пересекаются прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z}{-3} \text{ и } \frac{x}{1}=\frac{y-2}{\lambda}=\frac{z+1}{-3}?$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;–4)$ перпендикулярно плоскостям $2x-y+2z-1=0$ и Oxz.

4. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;3;1)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-2y+3z-1=0; \\ x+3y-4z+11=0. \end{cases}$

5. Какую кривую определяет уравнение $x=1+\frac{2}{3}\sqrt{8-y^2+2y}$?

Ответы

1.2. нет. **1.3.** $\vec{a}^0=\left\{\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};0\right\}$; $\vec{d}=\{7;9;-3\}$; $\vec{f}=4\vec{i}-7\vec{j}+4\vec{k}$;

$np_{\vec{j}}\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=10$. **1.4.** $\{2;-2;\pm2\sqrt{2}\}$. **1.5.** $\left\{\pm\frac{7}{\sqrt{3}};\pm\frac{7}{\sqrt{3}};\pm\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$.

1.6. $M(0;1;0)$. **1.7.** $\left\{-\frac{3}{\sqrt{35}};-\frac{9}{\sqrt{35}};\frac{15}{\sqrt{35}}\right\}$.**1.8.** 7; (1;1/3;1).

1.9. $\left\{\frac{5}{3};-\frac{35}{3};\frac{10}{3}\right\}$. **1.10.** $\vec{c}=2\vec{a}-4\vec{b}$. **1.11.** $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$.

2.1. –1; $\sqrt{61}$. **2.2.** $\arccos\frac{20}{\sqrt{1390}}$. **2.4.** $\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$**,** $\arccos 0{,}8$. **2.5.** –3.

2.6. –2. **2.7.** $\pi/3$. **2.8.** ± 3/2. **2.9.** нет. **2.10.** $\{2;-3;0\}$. **2.11.** –3/2.

3.1. 7. **3.2.** $\{12;3;6\}$. **3.3.** $\frac{\sqrt{245}}{2}$. **3.4.** $\frac{\sqrt{83}}{2};\sqrt{\frac{83}{14}}$. **3.5.** $\left\{\frac{52}{\sqrt{17}};0;-\frac{13}{\sqrt{17}}\right\}$.

3.6. $\{7;5;1\}$. **3.7.** 1. **3.8.** $\{19;-4;-8\}$. **3.9.** $\sqrt{0{,}6}$.

4.1. ±18. **4.2.** –6. **4.3.** 30; 45/7.**4.4.** (0;8;0); (0;–7;0). **4.5.** –25/3. **4.7.** 0.

5.1. а). $x+y-2=0$; б). $4x+3y-9=0$; в). $2x+y-4=0$;

г). $3x-4y-6=0$. **5.2.** $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-1=0$. **5.3.** $\left(-\frac{11}{17};-\frac{10}{17}\right)$. **5.4.** (2;–3).

5.5. $x+2y-8=0$. **5.6.** а). $\arccos\frac{5}{\sqrt{221}}$; б). $\frac{35}{\sqrt{40}}$. **5.7.** $4x+8y+5=0$.

5.8. 49. **5.9.** $5x-12y-65=0;\ \ 5x-12y+39=0$. **5.10.** $x+2y-10=0$.

5.11. $2x+7y+22=0;\ \ 7x+2y-13=0;\ \ x-5y+14=0$.

5.12. $2x+y-16=0;\ \ 2x+y+14=0;\ \ x-2y-18=0$. **5.13.** (21;17).

5.14. $4x+5y-9=0;\ \ 5x-4y-1=0$.

5.16. $y=2x;\ \ x-3y-15=0;\ \ 3x+y-25=0$.

6.1. $-2x+5y+4z-10=0$. **6.2.** $4x-6y+3z=0$. **6.3.** $z+3=0$.

6.4. $2x+z-2=0$. **6.5.** $-7x+10y-6z-6=0$.

6.6. $3x-10y-6z+28=0$. **6.7.** $3x+2z=0$. **6.8.** $-2x-7y+4z=0$. **6.9.** 4.

6.10. $\frac{6}{\sqrt{145}}$. **6.11.** -1. **6.12.** $\frac{125}{14\sqrt{14}}$. **6.13.** (0;7;0), (0;–5;0).

7.1. а). $\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{1}$; $\begin{cases} x-2y-11=0; \\ y+z-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2t+5; \\ y=-t-3; \\ z=t+4. \end{cases}$

б). $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$; $\begin{cases} y=0; \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=t; \\ y=0; \\ z=0. \end{cases}$

в). $\frac{x-4}{1}=\frac{y+7}{7}=\frac{z-10}{5}$; $\begin{cases} 7x-y-35=0; \\ 5y-7z+105=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=t+4; \\ y=7t-7; \\ z=5t+10. \end{cases}$

7.2. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. **7.3.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{66}}$. **7.4.** скрещиваются. **7.5.** $\sqrt{27}$.

7.6. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{16}=\frac{z-3}{17}$. **7.7.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{0}$. **7.8.** нет.

8.1. $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+5}{-2}$. **8.2.** $5x+2y-4z-38=0$. **8.3.** $\left(-1;\frac{25}{7};\frac{5}{7}\right)$.

8.4. (0;0;–1). **8.5.** (1,4;1,2;–2). **8.6.** $A=2/3; m=4{,}5$. **8.7.** 2,25.

8.8. $\arcsin(3/\sqrt{294})$. **8.9.** $8x-12y+z+30=0$. **8.10.** да.

9.1. а). гипербола, $C(-1;2)$, $a=2$, $b=\sqrt{2}$; б). эллипс, $C(2;-3)$, $a=2$, $b=5$; в). парабола, $C(-1;-3)$, $p=4$; г). окружность, $C(-2;3)$, $R=5$; д). часть окружности ($C(-1;-2)$, $R=2$), расположенная ниже прямой $y=-2$; е). часть параболы ($C(-4;3)$, $p=3$), расположенная правее прямой $x=-4$; ж). часть эллипса ($C(3;3)$, $a=3$, $b=2$), расположенная выше прямой $y=3$; з). часть гиперболы ($C(-2;1)$, $a=\sqrt{3}$, $b=2$), расположенная выше прямой $y=1$.

Список рекомендуемой литературы

1. Мельникова И.Н., Соболева Т.С., Фастовец Н.О. Методические рекомендации к практическим занятиям по высшей математике. Часть 1. Элементы линейной алгебры. – М.: Издательский центр РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2013. – 66с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Т.1. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 253с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – СПб.: Лань, 2006. – 240с.
5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.
6. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Под редакцией Ефимова А.В. Ч.1. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 288с.
7. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика. (Решебник). – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 368с.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: «Профессия», 2006. – 200с.

УДК 514
М27

Мельникова И.Н., Соболева Т.С., Фастовец Н.О.
М27 Методические рекомендации к практическим занятиям по высшей математике. Часть 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия (Для факультета АиВТ) – М.: РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2014. – 77с.

Пособие предназначено для студентов, изучающих векторную алгебру и аналитическую геометрию в курсе высшей математики. В пособии содержится необходимый теоретический материал, примеры и задачи по темам: векторы, операции над векторами, прямая на плоскости, плоскость, прямая в пространстве, кривые второго порядка.

Пособие может использоваться студентами всех специальностей, изучающими векторную алгебру и аналитическую геометрию, а также магистрантами и аспирантами, которые занимаются исследованиями, связанными с применением математических методов. Издание подготовлено на кафедре высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина.

Рецензенты:
Профессор военной академии РВСН имени Петра Великого,
д.ф.-м.н. А.В. Чечкин
Доцент кафедры высшей математики РГУ нефти и газа
имени И.М. Губкина, к.ф.-м.н. А.К. Тюлина