Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА
имени И.М.ГУБКИНА»

Кафедра «Высшая математика»

А.Н.Филиппов, Т.С.Филиппова

«Определенный и несобственный интегралы и их приложения»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению расчетно-графической работы

МОСКВА 2010

Рецензенты:

Профессор кафедры высшей и прикладной математики МГУПП

д.ф.-м.н **Угрозов В.В.**

Доцент кафедры высшей и прикладной математики МГУПП

к.ф.-м.н. **Иванов В.И.**

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания подготовлены в соответствии с новым образовательным стандартом математических дисциплин, в котором расчетно-графическая работа или типовой расчет рекомендованы в качестве основной формы циклического задания для обучения студентов с целью развития навыков самостоятельной работы с новым материалом. Кроме того, данные указания будут полезны студентам альтернативных форм обучения, в том числе овладевающим знаниями по системе дистанционного образования.

Методические указания посвящены освоению техники вычисления определенных и несобственных интегралов и их приложениям. Задачи в каждом варианте подобраны в основном так, что при их решении требуется приложить некоторые усилия при сохранении доступного уровня слаженности. Перед решением каждого варианта студенту желательно дать ответы на теоретические вопросы, что, в конечном счете, приведет к более глубокому и прочному усвоению темы «определенный и несобственный интеграл».

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

(для всех вариантов РГР)

1. Дать определение понятий «определенный интеграл» и «несобственный интеграл».
2. Что такое интегральная сумма, и какими основными свойствами она обладает?
3. В чем заключается геометрический смысл определенного и несобственного интегралов? Что такое криволинейная трапеция?
4. Какой смысл придается определенному интегралу с физической точки зрения?
5. Чему равен определенный интеграл, если его подынтегральная функция равна единице?
6. Как вычислить среднее «интегральное значение» данной непрерывной на отрезке [a,b] функции $f(x)$

7. Можно ли сравнить два определенных интеграла от двух различных функций, заданных на одном и том же отрезке?
8. Можно ли, не вычисляя интеграла, указать числовые границы, в пределах которых находится его значение?
9. Что общего между определенным и неопределенным интегралом для одной и той же функции $f(x)$, и какое различие между ними?
10. Запишите формулу вычисления определенного интеграла методом замены переменной.
11. В чем сущность формулы интегрирования по частям?
12. Напишите определенный интеграл от любой четной и нечетной функции $f(x)$ и вычислите его. Дайте геометрическую интерпретацию результатов вычисления.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

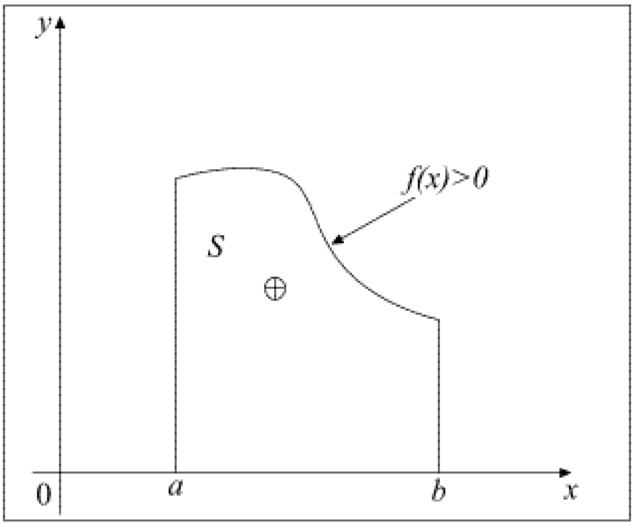
(в каждом отдельном варианте)

1. Вычислить написанные интегралы, один из которых несобственный.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми в декартовой системе координат (предварительно построить эту фигуру).
3. Построить указанную фигуру в полярной системе координат, определить пределы интегрирования и вычислить ее площадь.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде.
5. Вычислить длины дуг кривых, заданных в декартовой системе координат.
6. Вычислить длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат или в параметрическом виде.
7. Вычислить среднее значение функции или интеграла или оценить интеграл неравенством.
8. Построить плоскую фигуру в декартовой системе координат и затем построить соответствующую фигуру вращения, вычислить ее площадь.
9. Решить прикладную задачу.

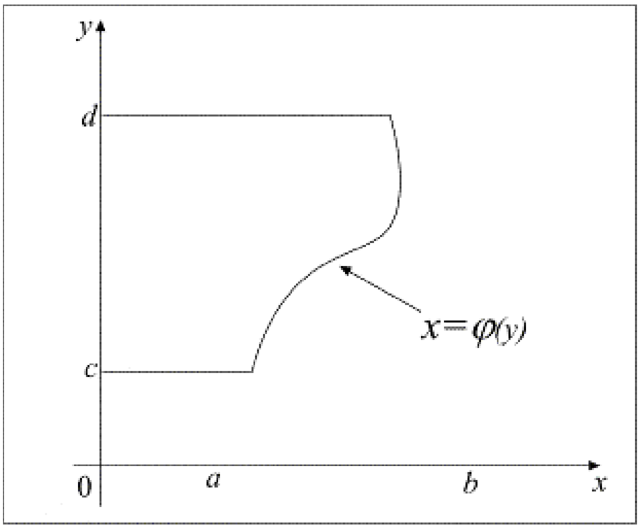
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

Площадь криволинейной трапеции

Если заданная непрерывная функция *f(x)* знакопостоянна, $f(x) \geq 0$ или $f(x) \leq 0$ на некотором отрезке $[a, b]$, то за основную фигуру, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейная трапеция с основанием $[a, b]$ на оси ОХ или с основанием $[c, d]$ на оси ОУ.

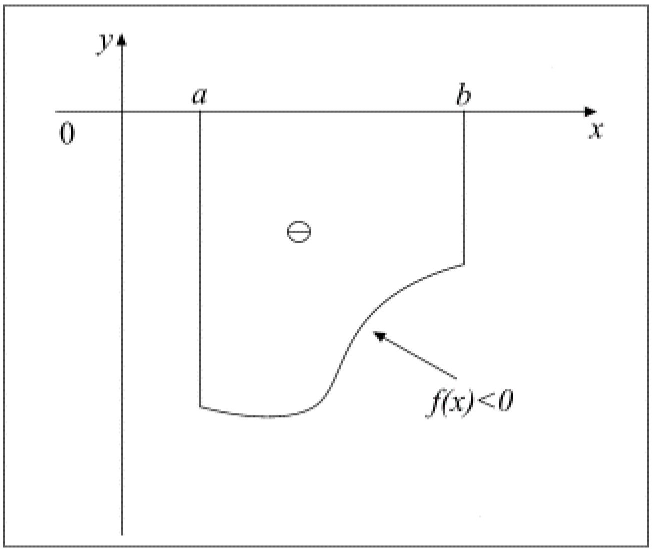


$$S = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) \geq 0.$$



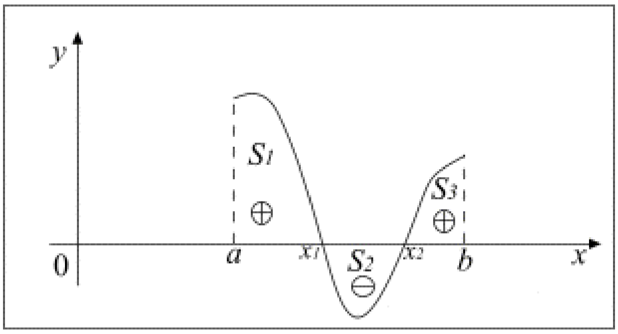
$$S = \int_c^d xdy = \int_c^d \varphi(y)dy$$

Если $f(x) \leq 0$, то $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$.



Если заданная непрерывная функция знакопеременна на отрезке интегрирования *[a, b]*, становясь поочередно то положительной, то отрицательной, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$$



Но $\int_a^{x_1} f(x)dx = S_1$, где S_1 - площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x_1]$;

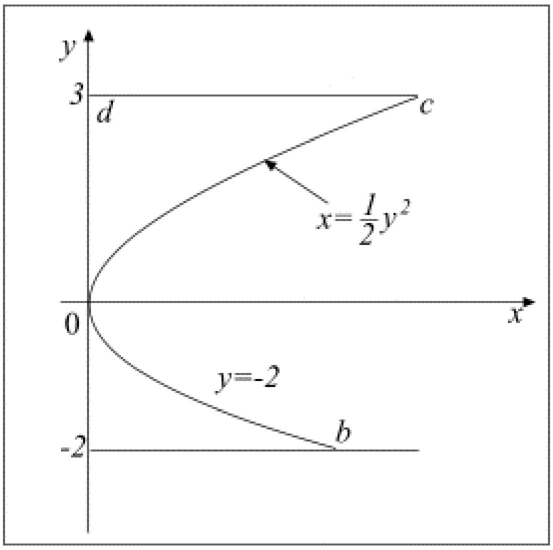
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -S_2$ где S_2 - величина площади криволинейной трапеции с основанием

$[x_1, x_2]$ под осью OX, которая будет отрицательной; аналогично $S_3 = \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$

Рассуждения справедливы и в том случае, когда точек пересечения графика с осью OX будет любое конечное число, большее двух. Поэтому $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$. Таким образом, интеграл по всему отрезку дает алгебраическую разность площадей фигур, расположенных выше и ниже оси OX.

Чтобы вычислить площадь всей геометрической фигуры, представленной на рисунке (на отрезке *[a, b]*), нужно вычислить модуль интеграла по отрезку *$[x_1, x_2]$*, т. е. $\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx = |-S_2| = S_2$ и $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$

<u>Пример 1.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

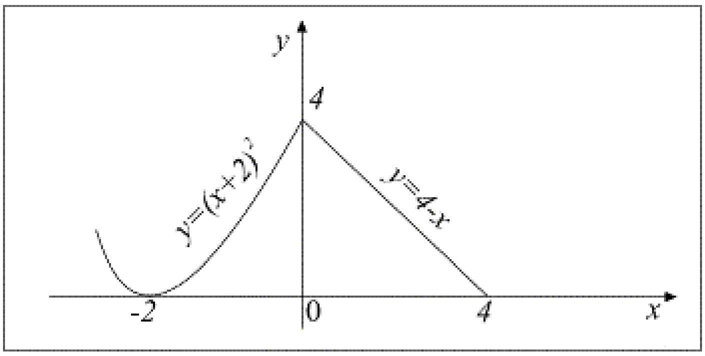


прямыми $y=-2$, $y=3$, параболой $x=\frac{1}{2}y^2$ и осью ординат.

<u>Решение.</u> $S = \int_{-2}^{3} \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{1}{6}(27-(-8)) = \frac{35}{6}$

<u>Пример 2.</u> Вычислить площадь, ограниченную осью ОХ и линиями $y=(x+2)^2$, $y=4-x$.

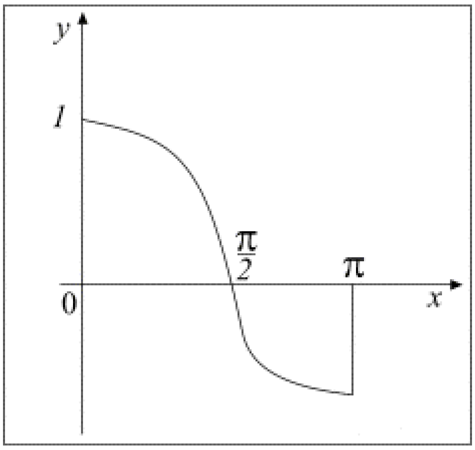
<u>Решение.</u> Сначала построим фигуру, ограниченную параболой и прямой. Из графика ясно, что построенная на отрезке *[-2, 0]* фигура, (криволинейная трапеция) ограничена одной кривой, на отрезке *[0, 4]* – другой, т. е. мы получили другую криволинейную трапецию и поэтому



$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{4}(4-x)dx=10\frac{2}{3}.$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить площадь, ограниченную косинусоидой *f(x)=***cos***x* на отрезке *[0, π]*

<u>Решение.</u> Рассмотрим знак функции **cos***x* на всем отрезке *[0, π]*. На отрезке *[0,* $\frac{\pi}{2}$*]* **cos***x≥0*, а на отрезке [$\frac{\pi}{2}$,π] - **cos***x≤0*. Учитывая это, имеем:



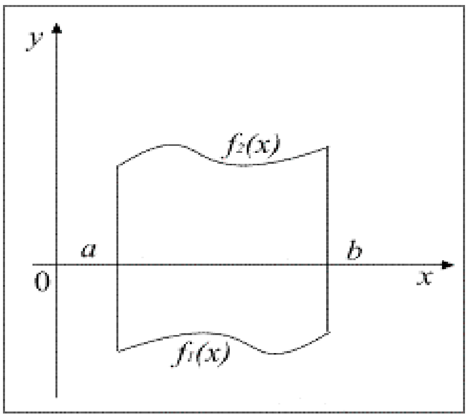
$$S=\int_{0}^{\pi}\cos xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx\right|=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\left|\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|=\sin\pi/2+|\sin\pi-\sin\pi/2|=$$

$$=1+|0-1|=2$$

Заметим, что при этом интеграл $\int_{0}^{\pi}\cos xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=0$.

<u>Площадь фигуры, ограниченной двумя различными кривыми</u>

Предположим что на отрезке *[a, b]* заданы две непрерывные функции

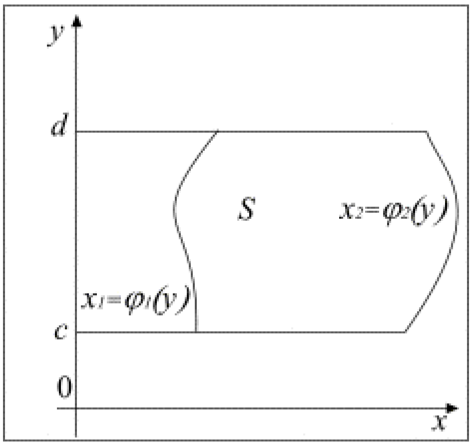


$y_1=f_1(x)$ *и* $y_2=f_2(x)$. Пусть также при всех x из этого отрезка выполняется неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$. Площадь фигуры ограниченной графиками этих функций и прямыми $x=a$ и $x=b$ определяется по формуле

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx. \qquad (1)$$

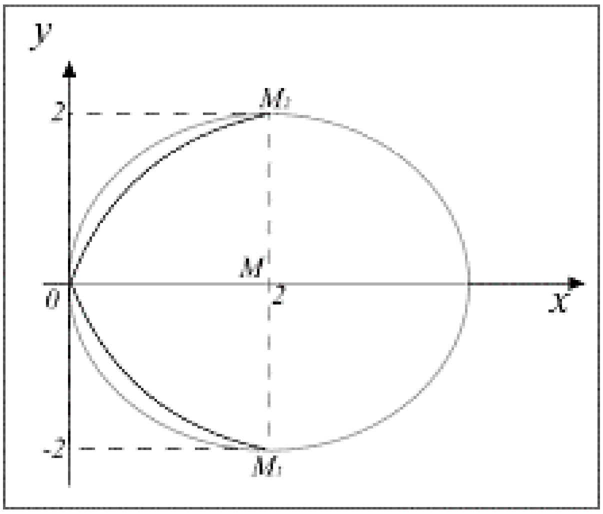
Если же две непрерывные функции относительно у на отрезке *[c, d]* при всех у из этого отрезка удовлетворяют неравенству $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$, то площадь фигуры, ограниченной функциями $x_1=\varphi_1(y)$ *и* $x_2=\varphi_2(y)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$ вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d [\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]dy. \qquad (2)$$



<u>Пример 4.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$ и окружностью $y^2=4x-x^2$

<u>Решение.</u> Сначала схематически изобразим эту площадь. Из рисунка ви-



дим, что заданные кривые ограничивают две различающиеся плоские фигуры (меньшую и большую). Каждая из этих фигур, в свою очередь, состоит из двух симметричных относительно оси OX частей. Поэтому достаточно вычислить площадь верхней части каждой фигуры и затем умножить ее на два. Найдем сначала площадь меньшей фигуры. Преобразуем уравнение окружности и определим координаты ее центра и величину радиуса.

$y^2 = 4x - x^2 = -x^2 + 4x = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = -\left[(x-2)^2 - 4\right] = -(x-2)^2 + 4$; $\quad y^2 = -(x-2)^2 + 4$;

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

Следовательно, центр окружности находится в точке *M(2, 0)* а ее радиус *R=2*. Найдем точки M_1 и M_2 пересечения обеих линий, решая систему двух уравнений $\begin{cases} y^2 = 4x - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases}$. $4x - x^2 = 2x$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = \pm 2$.

$O(0, 0)$; $M_2(2, 2)$; $M_1(2, -2)$.

Найдем уравнение границы OM_2 (части окружности) $|y_2| = \sqrt{4x - x^2}$. Из условия на ординаты точек границы $y_2 \geq 0$ имеем $y_2 = \sqrt{4x - x^2}$; по этой же причине уравнение нижней части границы $y_1 = \sqrt{2x}$, на отрезке [0, 2].

По формуле (1) находим

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x})dx = 2\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx - 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}dx,$$

но $S_{OMM_1} = \int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx$ - это площадь четверти окружности. Площадь всей окружности равна $\pi R^2 = 4\pi$. Второй интеграл легко вычисляется

$\int_0^2 \sqrt{x}dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Теперь найдем искомую площадь

$$S = 2(\pi - \sqrt{2}\,\frac{4\sqrt{2}}{3}) = 2(\pi - \frac{8}{3}).$$

Теперь, чтобы найти площадь большей фигуры, необходимо из площади круга вычесть площадь меньшей фигуры:

$$S_1 = 4\pi - 2(\pi - \frac{8}{3}) = 2(\pi + \frac{8}{3}).$$

Проверим значение первого интеграла.

$\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{(-1)(x^2 - 4x)}\,dx = \int_0^2 \sqrt{4 - (x-2)^2}\,dx$. Обозначим $x\text{-}2=2\mathbf{sin}t;$

$dx=2\mathbf{cos}tdt,$ тогда $\sqrt{4-(x-2)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2|\cos t|$; при x=2, t=0; при x=0,

t= - $\frac{\pi}{2}$ (четвертая четверть). Поэтому

$$\int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = -4\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = -4\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = -2\int_0^{-\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$-2\left(t\Big|_0^{-\frac{\pi}{2}} + \sin 2t\Big|_0^{-\frac{\pi}{2}} \right) = -2(-\frac{\pi}{2} - \sin\pi) = \pi$$

<u>Пример 5.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=-2y^2$ и $x=1-3y^2 \geq -2y^2$

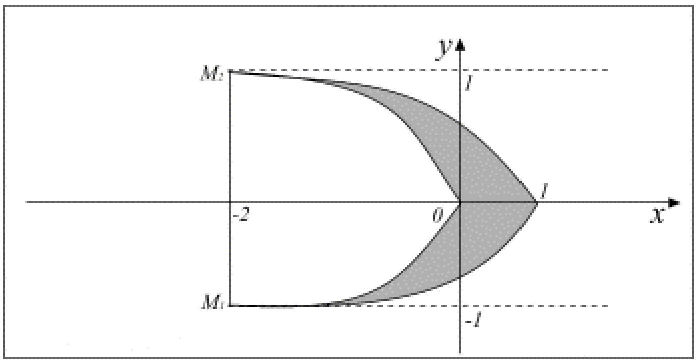
<u>Решение.</u> Второе уравнение запишем так $x-1=-3y^2$, отсюда следует, что $x-1 \leq 0$ и $x \leq 1;$ это означает, что вся фигура (парабола) $x=1-3y^2$ расположена левее точки $x=1;$ она симметрична относительно оси OX, так как при замене y на $(-y)$ уравнение не изменяется. Ветви параболы направлены влево; ее вершина находится в точке (1, 0). Определим точки ее пересечения с осью OY $(x=0);$ $3y^2=1,$ $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ветви второй параболы направлены также влево, а ее вершина совпадает с началом координат.

Определим точки пересечения этих кривых из решения системы

$$\begin{cases} x = -2y^2 \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} -2y^2 = 1 - 3y^2 \\ y^2 = 1;\ y_1 = 1;\ y_2 = -1 \end{array}$$

Одна точка пересечения $M_1(-2, -1)$ вторая – $M_2(-2, 1)$.

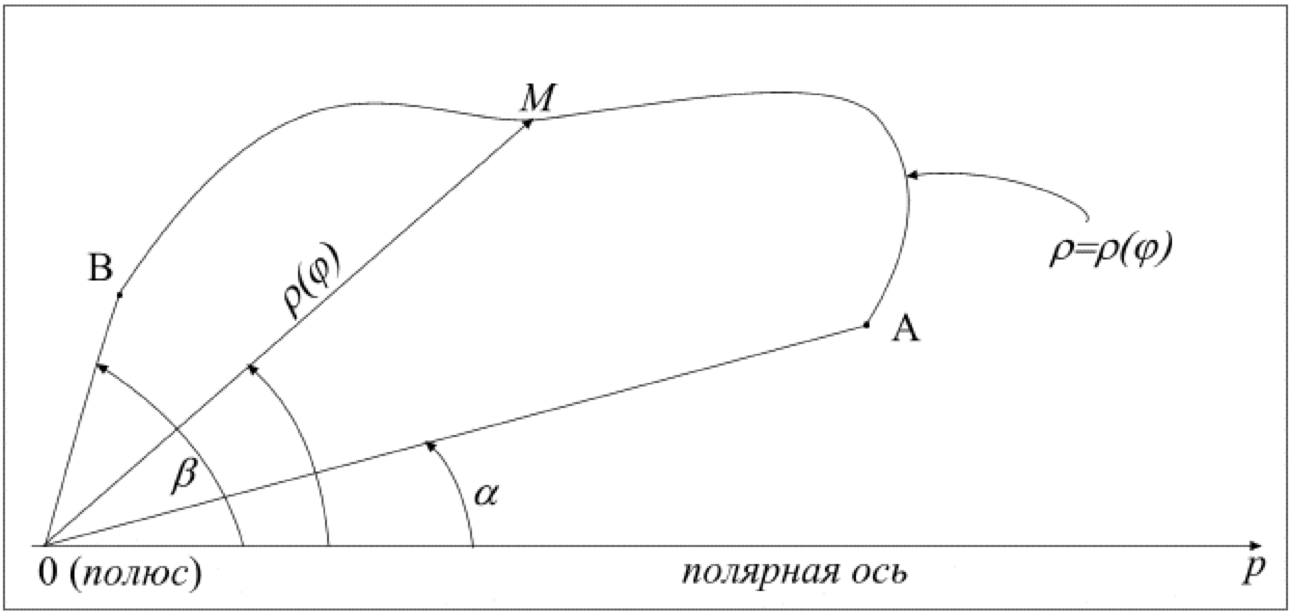
Изобразим эту фигуру на чертеже. Здесь проще вычислить площадь по формуле (2) т. е.



$$S = \int_{-1}^{1} \left[(1-3y^2) - (-2y^2)\right] dy = \int_{-1}^{1} (1-3y^2+2y^2)dy = \int_{-1}^{1} (1-y^2)dy = \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Площадь в полярной системе координат

В качестве основной фигуры в полярной системе координат, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейный сектор (см. рисунок). Этот сектор ограничен полярными радиусами ***OB*** (***φ=β***) и ***OA*** (***φ=α***) точек ***B*** и ***A***, а также участком ***AMB*** самой кривой, уравнение которой в полярной системе координат записывается как $\rho = \rho(\varphi)$.

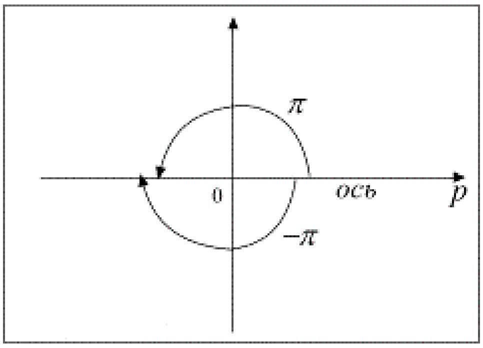


Площадь криволинейного сектора находится по формуле

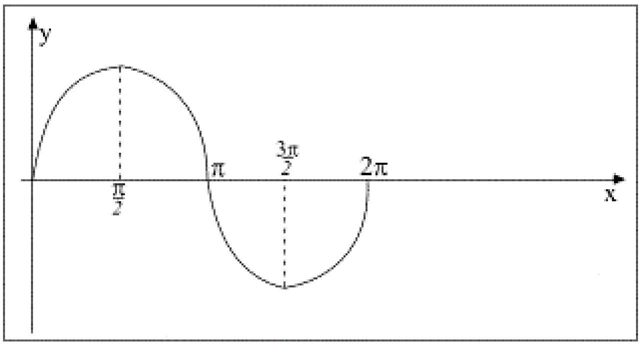
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3)$$

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \sin 2\varphi$

Решение. Сначала построим эту фигуру в полярной системе координат, задавая значения аргумента φ полярного угла из интервала $-\pi < \varphi \le \pi$, учитывая только те из них, которые дают положительные или равные нулю значения полярного радиуса ρ. Эти значения φ находятся из тригонометрического неравенства $\sin 2\varphi \ge 0\,(\rho \ge 0)$. Таким образом, вычисляя значения φ из системы неравенств $\begin{cases} \sin 2\varphi \ge 0 & (4) \\ -\pi < \varphi \le \pi & (5) \end{cases}$, установим и пределы интегрирования по переменной φ.



Решим неравенство (4), используя график функции *y*=**sin**x на одном периоде T=2π.



Из графика ясно, что если $0 \le 2\varphi \le \pi$ (т.е. $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ - первая четверть полярной системы координат), то первая полуволна синусоиды опирается только на неотрицательные ординаты; в силу периодичности функции все такие полуволны определяются из неравенства

$$0 + 2k\pi \le 2\varphi \le \pi + 2k\pi, \quad \pi k \le \varphi \le \frac{\pi}{2} + \pi k\,,\ k \in Z. \qquad (*)$$

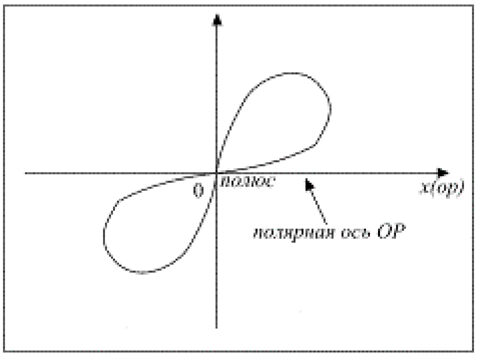
Если же $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (вторая четверть), то получаем противоречие неравенству (4) системы.

Вторая полуволна получится из общего неравенства (*) при k=1 ($\pi < \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ - третья четверть). При этом получаем противоречие уже неравенству (5) системы. Поэтому другие положительные значения полярного угла рассматривать нет смысла. Остается проверить отрицательные значения, например, k=-1. Тогда, $-\pi \le \varphi \le \frac{\pi}{2} - \pi, \quad и \quad -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$. Эти значения φ дадут положительные значения полярного радиуса тоже в третьей четверти, что не противоречит неравенству (5). Отсюда ясно, что другие отрицательные значения k<-1 ничего нового не дадут, так как выведут значения φ за пределы, ограниченные неравенствами (4) и (5).

Итак, точки нашей кривой в полярной системе координат будут располагаться только в углах, ограниченных неравенствами: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$. Поэтому для построения «по точкам» кривой при составлении числовой таблицы переменных координат ρ и φ, значения φ надо брать из последних неравенств. Так как функция **sin**2φ нечетная, достаточно построить ветвь кривой в 1-ой четверти значений φ из неравенства $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

φ	0	π/6	π/4	π/3	π/2
$\mathbf{2}\varphi$	0	π/3	π/2	2π/3	π
ρ	0	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0

Из полюса проводим четыре луча под углами 30°, 45°, 60° и 90° по отношению



к полярной оси и в выбранном масштабе откладываем значения ρ из таблицы. Полученные точки соединяем плавной кривой. Вторую ветвь кривой строим путем отражения относительно полюса в силу симметрии. Тогда площадь фигуры в соответствии с формулой (3) равна:

$$S = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)d(4\varphi) = \frac{1}{8}(4\varphi - \sin 4\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}(2\pi - \sin 2\pi) = \frac{\pi}{4}\ \text{кв.ед.}$$

Отметим, что после такого исследования пределы интегрирования α *и* β в данном примере определяются безо всяких трудностей.

Таким образом, для вычисления площади в полярной системе координат рекомендуется поступать так:

1. Составить систему неравенств типа (4) и (5), решить первое неравенство, используя чертежи.
2. Выяснить, в каких четвертях по углу φ, расположена искомая кривая, и построить ее по точкам, используя, где возможно, свойства симметрии. Если окажется, что форма кривой не совсем ясно проявилась или она искажена, то количество точек расчета нужно увеличить и повторить построение, строго соблюдая выбранный масштаб и процесс построения (откладывания) полярных углов φ и полярных радиусов ρ.
3. Убедиться, что построенная фигура представляет собой криволинейный сектор, и определить пределы интегрирования α *и* β. Затем вычислить площадь фигуры по формуле (3). Если же построенная фигура не оказалась криволинейным сектором, то нужно с помощью полярных радиусов разбить ее на части, каждая из которых уже будет криволинейным сектором, выбрать для каждого сектора пределы интегрирования и вычислить их площадь, суммируя результаты вычислений.

Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде

Если кривая $y = \phi(x)$ задана двумя уравнениями так, что

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases},$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрерывные функции параметра t; α и β - известные числа; или их легко найти после построения фигуры.

Площадь фигуры $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$ (6)

или $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (y'_t * x - x'_t * y)dt$ (7)

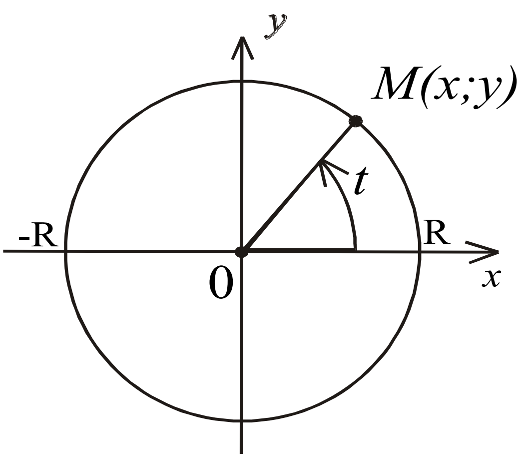
Применение формулы (7) часто приводит к более простым выкладкам.

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = R\cos t \\ y = \psi(t) = R\sin t \end{cases}$$

Решение. Выясним, что эта за линия, определив отношения $(x/R) = \cos t, (y/R) = \sin t$. Возводя их обе части в квадрат и складывая, получим $x^2 + y^2 = R^2$.

Таким образом, данные параметрические уравнения определяют окружность с центром в начале координат радиусом R; параметр t - угол текущей точки окружности, отсчитываемый от оси OX. Из чертежа видно, что когда, x возрастая, изменяется от значения $x = -R$ до $x = R$, точка M пробегает всю верхнюю часть окружности и параметр t изменяется от значения $t = \pi$ до $t = 0$. Поэтому



$S = 2\int_{\pi}^{0} R\sin t(-R\sin t)dt =$

$-2R^2\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt =$

$$= 2R^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = R^2 \int_0^{\pi} dt - 2\frac{R^2}{4} \int_0^{\pi} \cos 2t d(2t) = \pi R^2$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \\ y = 5 (y \geq 5) \end{cases}$$

Решение. Определим вид линии: $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{5\sqrt{2}}\right)^2 = 1$,

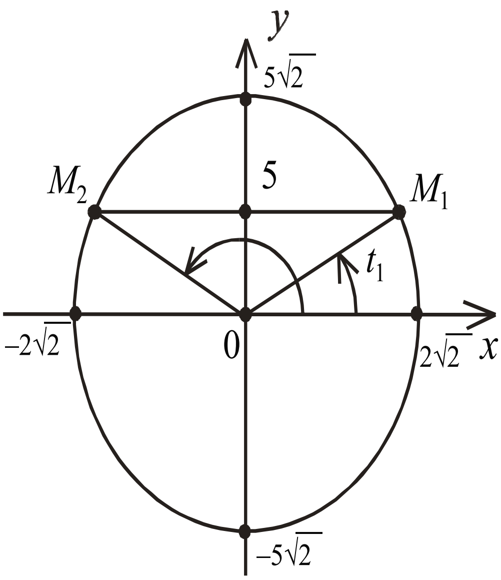
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{50} = 1$$

Это эллипс, вытянутый вдоль оси OY. От начала координат вдоль оси OX отложим отрезки $2\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{2}$, а вдоль оси OY $5\sqrt{2}$ и $-5\sqrt{2}$. Получим прямоугольник размером $2\sqrt{2}$ x $5\sqrt{2}$, внутри которого расположим эллипс. Проводя прямую $y = 5$, отсекаем от него часть, расположенную выше этой прямой:

$\begin{cases} y = 5 \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}, t_1 = \frac{\pi}{4}$ и, в силу симметрии, $t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, рассуждая по аналогии с предыдущим примером, имеем $\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4}$. Кроме того, ординаты точек отсеченной части эллипса определяются уравнением

$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y + 5 = 5\sqrt{2}\sin t \Rightarrow y = 5\sqrt{2}\sin t - 5 \end{cases}$, которое подставляется в формулу (6).



$$S = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (5\sqrt{2}\sin t - 5) 2\sqrt{2}\sin t dt =$$

$$=-20\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 tdt+10\sqrt{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin t==-20\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-10\sqrt{2}\cos t\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=-20*\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-10\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4})=$$

$$=-10(-\frac{\pi}{2}-1)-20=5(\pi+2)-20=5(\pi-10);$$

Длина дуги кривой в декартовой системе координат

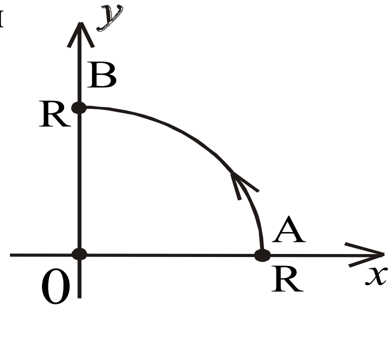
Если уравнение кривой задано в виде функции $y=\phi(x)$ на отрезке $[a;b]$, и она имеет непрерывную производную на $(a;b)$, то длина дуги этой кривой, заключенной между точками с абсциссами $x=a$ и $x=b$ определяется по формуле

$$\ell=\int\limits_a^b\sqrt{1+(\phi'(x))^2}dx \qquad (8)$$

Если же кривая определяется уравнением $x=\varphi(y)$ на отрезке $[c;d]$ относительно оси OY, и функция $\varphi(y)$ имеет непрерывную производную в промежутке $(c;d)$, то

$$\ell=\int\limits_c^d\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dy=\int\limits_c^d\sqrt{1+(x'(y))^2}dy \qquad (9)$$

Пример 9. Вычислить длину дуги окружности $x^2+y^2=R^2$; R – радиус окружности.



Решение. Вычислим производную от выражения $x^2-y^2-R^2=0$, как от неявной функции

$(x^2+y^2-R^2)_x'=0 \qquad 2x+2y*y_x'=0$.

$$y^{/}=-\frac{x}{y};\ (y_x')^2=\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2}{R^2-x^2};$$

$$1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2};$$

По формуле (8) вычислим длину дуги АВ – четверти окружности.

$$\frac{\ell}{4}=\int_0^R \frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R*\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=\frac{\pi R}{2}$$

$\ell=2\pi R$. Отметим, что если бы мы нашли $y^2=R^2-x^2$ и затем $|y|=\sqrt{R^2-x^2}$ и вычислили производную y_x', то затратили больше усилий даже в этой простой задаче.

<u>Пример 10.</u> Вычислить длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ заключенную между точками с ординатами $y=1$ и $y=2$.

<u>Решение.</u> В этой задаче чертеж делать необязательно и за независимую переменную удобнее выбрать y, тогда

$$x_y'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y};\ \sqrt{1+(x_y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}=\left|\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right|$$, но по условию $y>0$,

$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}>0$, $\left|\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right|=\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)$, поэтому $\sqrt{1+(x_y')^2}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}$.

Итак: $\ell=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

<u>Длина дуги кривой, заданной в параметрическом виде</u>

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $(y=\psi(t))$ и $(x=\varphi(t))$; причем производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле

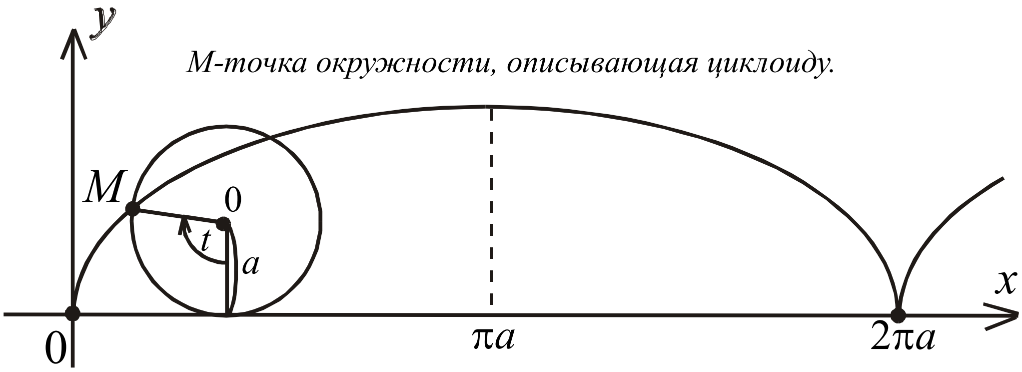
$$\ell=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (10)$$

Здесь α и β - значения параметра t, соответствующие концам рассматривае-мое дуги, так, что $\alpha<\beta$.

<u>Пример 11.</u> Вычислить длину дуги одной арки циклоиды.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Решение. Пусть в начальном положении круг радиуса $R = a$ касается оси ОХ в начале координат так, что его диаметр и центр совпадают с осью OY. Из этого положения он начинает катиться без скольжения по неподвижной прямой – оси ОХ. Совершив при таком движении полный оборот вокруг своей оси (центра), точка М опишет некоторую кривую, которая и называется аркой циклоиды. Тогда x пробегает отрезок $2\pi a$ равный всей длине окружности, так как за один оборот точка М займет исходное положение на оси ОХ. При дальнейшем движении круга получится вся циклоида.



Величина центрального угла t между диаметрами ОМ изменится от значения $t = 0$(когда эти диаметры совпадали) до значения $t = 2\pi$ (точка М окружности совершила полный оборот). Длина одной арки циклоиды находится при этом следующим образом.

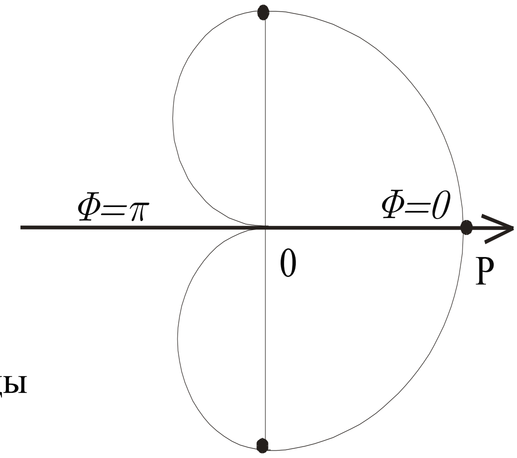
Вычислим: $x_t' = a(1-\cos t) = 2a\sin^2\dfrac{t}{2}$, $y_t' = a\sin t = 2a\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$;

$(x_t')^2 + (y_t')^2 = 4a^2\sin^2\dfrac{t}{2}$. Но, так как, $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$, $0 < t < 2\pi$, а

$\sin\dfrac{t}{2}$ в 1-ой и 2-ой четвертях положителен, т.е. $\sin\dfrac{t}{2} \ge 0$ и $\left|\sin\dfrac{t}{2}\right| = \sin\dfrac{t}{2}$, поэтому $\ell = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\dfrac{t}{2}dt = 4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\dfrac{t}{2}d\left(\dfrac{t}{2}\right) = -4a\cos\dfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a$

Длина дуги кривой в полярной системе координат

В случае задания линии уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат (рисунок на странице 13), длина участка ***AMB*** кривой, ограниченного полярными радиусами ***OB*** (***φ=β***) и ***OA*** (***φ=α***) точек ***B*** и ***A*** находится по формуле:



$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi. \qquad (11)$$

Пример 12. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Построим кривую, как показано на рисунке. Поскольку она симметрична относительно полярной оси, то можно найти лишь длину верхней половины кривой от точки, лежащей на луче $\varphi = 0$ до точки на луче $\varphi = \pi$ и затем удвоить результат. Так как $\rho' = -a\sin\varphi$ и $0 \le \varphi \le \pi$, то

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos\varphi)} == a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, длина кардиоиды равна $\ell = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$

Среднее интегральное значение функции

Средним значением непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (12)$$

Пример 13. Определить среднее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. $$f_{cp} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Оценка интеграла

На практике часто не требуется знать точное значение интеграла, а нужно знать лишь числа, между которыми находится его величина. Для этой цели используется свойство оценки значения определенного интеграла:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \tag{13}$$

где m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а M – наибольшее её значение на этом отрезке; $(b-a)$ - длина отрезка.

Пример 14. Оценить интеграл $\int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$, не вычисляя его.

Решение. Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x) = \sqrt{3+x^3}$ на отрезке $[1;3]$. Вычислим её производную, получим, что

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}} > 0 \text{ на } [1;3].$$

Из неравенства следует, что сама функция на данном отрезке монотонно возрастает. Следовательно, свое наибольшее и наименьшее значение она принимает на концах отрезка $[1;3]$, т.е. $m = f(1) = \sqrt{4} = 2$; $M = f(3) = \sqrt{30}$

Поэтому, $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \le 2\sqrt{30}$.

Объем тела вращения

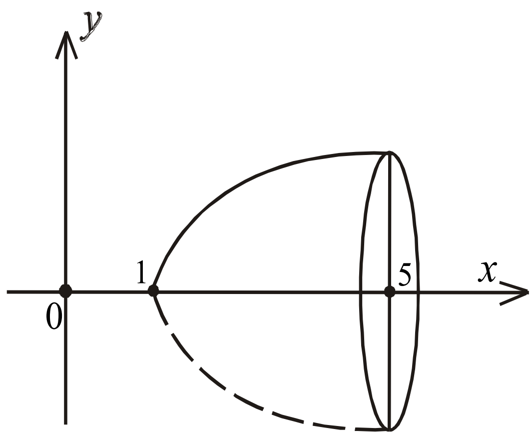
Объем тела вращения находится по формулам:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (\phi(x))^2 dx, \tag{14}$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OX и

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy\,, \qquad (15)$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OY.



Пример 15. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \phi(x) = \sqrt{x-1}, x = 5; y = 0$.

Решение. Построим сначала фигуру, исходя из условия задачи. Из чертежа ясно, что это криволинейный треугольник, поэтому

$$V_x = \pi\int_1^5 y^2 dx = \pi\int_1^5 (x-1)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^5 =$$

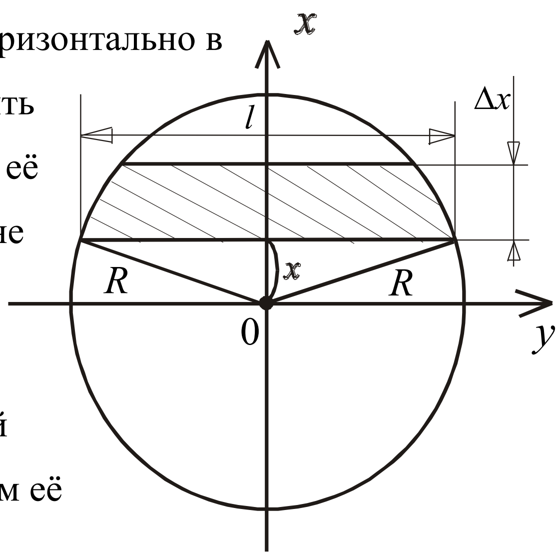
$$= \pi\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \pi\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 8\pi$$

Приложения определенного интеграла в физике

Задача 1. Скорость движения точки $\upsilon = 0{,}5t^3$. Найти путь s, пройденный точкой за время $t = 8$ сек после начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки?

Решение. Так как $\dfrac{ds}{dt} = \upsilon(t)$ или $\dfrac{ds}{dt} = 0{,}5t^3 \Rightarrow ds = 0{,}5t^3 dt$ причем $0 \le t \le 8$. Поэтому $s = \int_0^8 0{,}5t^3 dt = 0{,}5\frac{t^4}{4}\Big|_0^8 = 512\text{м};\ \upsilon_{ср} = \frac{s}{t} = \frac{512}{8} = 64\,{}^{м}\!/\!_{с}$.

Задача 2. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, может закрываться заслонкой. Определить давление, испытываемое этой заслонкой, если её диаметр D=60 см, а центр находится на глубине 15 м под водой.



Решение. Заслонка представляет собой круг. Выберем вертикальную полоску высотой Δx на расстоянии x от центра круга, обозначим её длину буквой ℓ. Тогда площадь этой полоски равна

$$\Delta s = \ell * \Delta x,$$

считая приближенно полоску прямоугольной. Это предположение тем точнее, чем меньше высота полоски Δx. По теореме Пифагора имеем: $x^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = R^2$.

Длина хорды, отстоящей на расстоянии x от центра круга равна:
$\ell = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{30^2 - x^2}$. Полоска такой длины находится на глубине $(1500 - x)$ $(x > 0$ для верхней части круга, $x < 0$ для нижней части круга). Поэтому элементарная площадь полоски: $\Delta s = 2\sqrt{30^2 - x^2} * \Delta x$.

Элементарное давление воды на эту полоску на глубине $(1500 - x)$ равно

$$\Delta p = \rho g * (1500 - x) * \Delta s = \rho g * (1500 - x) * 2\sqrt{30^2 - x^2} * \Delta x$$

Сила давления на весь круг

$$P = \rho g \int_{-30}^{+30} (1500 - x) * 2\sqrt{30^2 - x^2}\, dx = 1350000\pi\rho g \approx 4{,}16 * 10^{12} \frac{г}{см\, сек^2} = 41{,}6 атм.$$

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

<u>Вариант 1</u>

1. $\int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{2 - x^2}}$; $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1 + \sqrt{x}}$; $\int_{0}^{1} xe^{-x} dx$; $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = e^{2x}$; $y = \log_2 x$; $x = 1$; $x = 2$

3.Найти площадь фигуры в полярной системе координат
$\rho = a \sin 2\varphi; a = const$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $y = 2\ (y \geq 2)$.

5.Найти длину кривой $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

6.Найти длину дуги кривой в полярной системе координат $\rho = 6(1 + \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$.

7.Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin x}dx$.

8.Вычислить объем тела, получающегося при вращении параболы $y^2 = 4x$ вокруг своей оси, ограниченного перпендикулярной к ней плоскостью и отстоящей от вершины параболы на расстоянии, равном единице.

9.Скорость движения точки $\upsilon = e^{-0,01t}$ $м/с$. Вычислить путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

Вариант 2

1.$\int\limits_{2}^{8} \sqrt{x-1}dx$; $\int\limits_{4}^{0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$; $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x+1$; $x-y-1=0$.

3.Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярной системе координат $r=\cos\varphi$; $r=2\cos\varphi$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в параметрическом виде $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $y=4$ $(y \geq 4)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln(x^2-1)$, $2 \leq x \leq 3$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$$

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$.

8.Вычислить объем тела вращения вокруг оси X криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, прямыми $x=2$, $x=6$ и осью OX.

9.Тело движется со скоростью $\upsilon = e^{-0,01t}\ {}^{м}\!/_{с}$. Определить закон движения тела, если за 5 секунд оно прошло 105 м.

Вариант 3

1. $\int\limits_{1}^{3} x\sqrt{x^2+7}dx$; $\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$; $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y = x^2 + 4x - 3$ и касательной к ней в точках (0;-3) и (3;0).

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярной системе координат $r = 2\cos\varphi$; $r = 4\cos\varphi$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой, заданной в параметрическом виде $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, (в первом квадрате $\frac{\pi}{2} \le t \le 0$).

5.Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/4$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$,

$0 \le t \le \pi$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx$.

8.Вычислить объем тела, полученного вращением около оси OX, плоской фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямой $2y - 3x - 5 = 0$.

9.Скорость движения точки изменяется по закону $\upsilon(t) = (3t^2 + 2t + 1)\ {}^{м}\!/_{с}$. Вычислить путь, пройденный точкой за 10 секунд от начала движения.

Вариант 4

1. $\int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{9}} \sin^2 3xdx$; $\int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt{2+x}}{x}dx$; $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

3.Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля в полярной системе координат $r = 2a(2 + \cos\varphi)$, a=*const*.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

5.Найти длину дуги кривой $y = e^x + 6$, $\quad (\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15})$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{6}.$$

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\quad \int\limits_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 4}dx$.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ плоской фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 1$ и $y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)x$.

9.Мгновенная скорость движения определяется в зависимости от времени формулой $\upsilon = \sqrt{1+t}\ ^{м}\!/_{c}$. Определить среднюю скорость движения за 10 секунд от начала движения.

<u>**Вариант 5**</u>

1.$\int\limits_2^3 \frac{xdx}{(2+x)(x^2+3)}$; $\quad \int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$; $\quad \int\limits_0^3 \ln(x+3)dx$; $\quad \int\limits_0^{\infty} x\sin xdx$.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, осью ОХ и прямой $x = 6$.

3.Найти площадь, ограниченной кривой $r = 4\cos\varphi$ в полярной системе координат.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $y = 4 \ \ (y \ge 4)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x + 2, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + \sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi .$$

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 2\cos x}$.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной осями координат и параболой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. Предварительно найти отрезок интегрирования путем вычисления точек пересечения кривой с осями координат.

9.Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении вдоль прямой. Первое тело движется со скоростью $\upsilon(t) = (6t^2 + 2t)\,{}^{м}\!/_{c}$, второе – со скоростью $\upsilon(t) = (4t + 5)\,{}^{м}\!/_{c}$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 сек?

<u>Вариант 6</u>

1. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{x^3 - 1}dx$; $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx$; $\int\limits_0^3 x arctg x dx$; $\qquad \int\limits_1^{\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{x}}dx$

2.Вычислить площадь сегмента, отсекаемого от кривой $y^2 = x^3 - x^2$ хордой $x = 2$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 1 + \cos\varphi$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ и $y = 6$ $(y \ge 6)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x, \ \pi/6 \le x \le \pi/3$.

6.Найти длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t). \\ \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

7.Найти средние значение функции $f(x) = \cos^2 x$ на отрезке $0 \le x \le \pi$.

8.Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = b, y = -b$.

9.Скорость движения точки $\upsilon(t) = (12t^2 - 3t)\ {}^{м}\!/_{c}$. Вычислить путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки. Найти закон ускорения движения точки в зависимости от времени t.

<u>Вариант 7</u>

1. $\int\limits_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin^2 x dx$; $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$; $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $7x^2 - 9y + 9 = 0$ и $5x^2 - 9y + 27 = 0$.

3.Найти площадь фигуры в полярной системе координат $r = 2\sin 4\varphi$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ и $y = 4 \quad (y \ge 4)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $\quad 0 \le x \le \frac{15}{16}$.

6.Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $\quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.

7.Вычислить среднее значение функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на отрезке $0 \le x \le 1$.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = 2, x = 0$.

9.Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку с основанием b и высотой h, погруженную в воду так, что её вершина лежит на поверхности воды. Произвести расчет для $h=9$ и $b=4$ м, удельный вес жидкости γ.

Вариант 8

1. $\int\limits_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$; $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x dx$; $\int\limits_0^2 e^{2x} x dx$; $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

2.Найти площадь, заключенную между параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке М (3;5) и осью ординат.

3.Найти площадь области, ограниченной кривой $r=a(1+\cos\varphi)$ и лежащей вне кривой $r=3a\cos\varphi$.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$, $y=2$ $(y\ge 2)$.

5.Найти длину дуги кривой $y=\ln\sqrt{x}$, $\sqrt{5}\le x\le\sqrt{15}$.

6.Найти длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t) \\ y=6(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $0\le t\le\pi$.

7.Найти среднюю температуру стержня длины $\ell=2\sqrt{2}$, если распределение температуры вдоль стержня имеет вид $\mathrm{T}(x)=x^2\sin 5x$, $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

8.Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y=e^x-1$, $y=2, x=0$ вокруг оси OY.

9.Вычислить величину давления на полукруг радиуса R, вертикально погруженный в жидкость, если его диаметр лежит на свободной поверхности жидкости. Принять удельный вес жидкости равным γ.

Вариант 9

1. $\int\limits_{-5}^{4} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+5}}$; $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos^2 t}$; $\int\limits_1^2 x\, arcctg\frac{x}{2} dx$; $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$

2.Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x^2$, $y = x^{\frac{2}{9}}$ и $y = 4$.

3.Найти площадь фигуры $r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$ в полярной системе координат.

4.Найти площадь, ограниченную линиями $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ и $y = 5$ $(y \geq 5)$.

5.Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x + 2$, $\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

6.Найти длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t) \\ y = 2{,}5(1 - \cos t) \end{cases}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

Оценить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$, пользуясь теоремой о среднем значении.

8.Вычислить объем тела, полученный от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \arcsin x$ с основанием $[0;1]$ вокруг оси ОХ.

9.Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли со скоростью $\upsilon(t) = (39{,}2 - 9{,}8t)\,{}^{м}\!/\!_{c}$. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Вариант 10

1. $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{2 - x^2}\,dx$, $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x}$, $\int\limits_0^{\pi/3} x \cdot arctg(x)dx$, $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = \sqrt{4 - x^2}$ и осью ОХ.

3. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линиями, предварительно построив эти линии в полярной системе координат:
$r = 3 + \cos 4\varphi$, $r = 2 - \cos 4\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $y = 4$ $(y \geq 4)$.

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln\frac{5}{2x}$, $\left(\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}\right)$.

6. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3\left(2\cos t - \cos 2t\right) \\ y = 3\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$, используя теорему о среднем значении.

8. Построить линию $y^2=x(x-3)$. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс трапеции, лежащей над осью ОХ и ограниченной этой линией.

9. Два тела движутся по прямой из одной и той же точки. Первое тело движется со скоростью $v(t)=(3t^2-6t)$ м/с, второе - со скоростью $v(t)=(10t+20)$ *м/с*. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?

Вариант 11

1. $\int\limits_2^{10} \frac{xdx}{\sqrt[4]{2x^2-1}}$, $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$, $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

2. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2+y^2=8$ разделен параболой $y^2=2x$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$\begin{cases} x = 2\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = 2\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

5. Вычислить длину дуги цепной линии, заданной уравнением

$y = 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)$ от точки $x=0$ до точки $x=4$.

6. Найти длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7. Вычислить среднее значение функции $y=\mathbf{cos}(2x)$ на отрезке $[0;\pi/2]$.

8. Вычислить объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $5x - y - 4 = 0$, $x = 0$ вокруг оси ОУ.

9. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического котла с радиусом основания R=10 м.

Вариант 12

1. $\int\limits_{0}^{\pi/4} e^{\cos 3x}\sin 3x dx,\ \int\limits_{5}^{8}\frac{3x-4}{x^2-4}dx,\ \int\limits_{\pi}^{\pi/2} x\sin 2x dx,\ \int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[5]{(x-4)^3}}.$

2. Вычислить площадь каждой из фигур, ограниченных окружностью $x^2+y^2+6x+2y+8=0$ и параболой $y=x^2+6x+9$.

3. Вычислить общую часть площади, заключенную между линиями $r=2$ и $r=2(1+\cos\varphi)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$, и $y=2$ $(y\geq 2)$.

5. Найти длину дуги кривой $y=x^2/4-1/2\ln x$ $(1\leq x\leq 2)$.

6. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$, $\pi/2\leq t\leq 2\pi/3$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0,$ вокруг оси OX.

8. Вычислить среднее значение функции $f(x)=10+2\sin^2 x+3\cos^2 x$ на отрезке $[0,2\pi]$.

9. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания равен R, а глубина котла равна H. Котел наполнен жидкостью с удельным весом γ. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из котла.

Вариант 13

1. Вычислить $\int\limits_{1}^{10}\sqrt{x-1}dx,\ \int\limits_{0}^{1}(x-3)e^{-x}dx,\ \int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+5}}dx,\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6x+10,\ \ y=6x-x^2$.

3. Найти площадь, ограниченную кривой $r=\sin 3\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

5. Вычислить длину дуги кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$y = \ln\cos\ x + 2,\ (0 \le x \le \pi/6).$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX одного из криволинейных треугольников, образованных линиями

$y = 0,\ y = \sin x,\ y = \cos x.$

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 - \cos x}dx$.

8. Материальная точка движется со скоростью $\upsilon(t) = t\Big/\sqrt{2 + 5t^2}$ м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 10с.

Вариант 14

1. $\int\limits_2^0 x\sqrt{4 - x^2}dx,\ \int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}},\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},\ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2, y = 0{,}5x^2, y = 2x.$

3. Вычислить площадь, ограниченную линией $r = a\cos 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

5. Вычислить длину дуги $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le 15/16.$

6. Определить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 3\pi/2$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx.$

8. Найти объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y=x^2$.

9. Материальная точка движется со скоростью $\upsilon(t)=t\sqrt{4+t^2}$ м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 20с.

Вариант 15

1. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx,\ \int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}},\ \int\limits_{2}^{3}x\sqrt{x^2-4}dx,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^3+1}{x^4}dx$

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$xy=20,\ x^2+y^2=41$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\frac{1}{2}+\cos\varphi$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t),\ y=6,(y\geq 6). \\ 0\leq x\leq 8\pi \end{cases}$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=1-\ln(x^2-1),\ 3\leq x\leq 4$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=2.5(t-\sin t) \\ y=2.5(1-\cos t) \end{cases},\ \frac{\pi}{2}\leq t\leq\pi$.

7.Оценить интеграл $\int_0^1\sqrt[3]{4-3x^3}dx$, не вычисляя его.

8.Вычислить объем тела вращения, возникающего при вращении фигуры

$y=2x-x^2,\ y=-x+2, x=0$ вокруг оси ОХ.

9.Цилиндр диаметром 1 м и длиной 3 м заполнен паром под давлением 10кГ/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в 3 раза, считая, что температура пара остается постоянной?

Вариант 16

1. $\int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx,\ \int\limits_2^3 \frac{x^2dx}{(2+x)(x^2-3)},\ \int\limits_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx,\ \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2+2x}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=(y-2)^3,\ x=4y-8$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases},\ y=3,\ (0<x<4\pi,\ y\geq 3).$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\operatorname{ch}x+3,\ 0\leq x\leq 1$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t) \\ y=4(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}\ 0\leq t\leq \pi$.

7.Оценить интеграл $\int\limits_0^{5/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$, не вычисляя его.

8.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2,\ x=0,\ x=\sqrt{y+1},\ x=1$ вокруг оси OX.

9.Вычислить среднюю температуру стержня длины L=2, если распределение температуры вдоль стержня подчиняется закону $T(x)=x^2\cos 4x,\ -1\leq x\leq 1$.

Вариант 17

1. $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx,\ \int\limits_1^2 \frac{2xdx}{(2+x)(x+3)},\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\cos x}dx,\ \int\limits_2^6 \frac{1}{(x-2)^2}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=(y-2)^3,\ x=4y-8$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \end{cases},\ y=3 (y\geq 3)$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=10\cos^3 t \\ y=10\sin^3 t \end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

7.Доказать, что $\frac{\pi}{6}<\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

8.Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1$.

9.Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания R, высота конуса H и удельный вес материала стержня γ.

Примечание: Относительное удлинение ε стержня пропорционально напряжению σ в соответствующем поперечном сечении $\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$, где E-модуль Юнга.

Вариант 18

1.$\int\limits_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx,\ \int\limits_0^1\frac{xdx}{(2+x)(9-x^2)},\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin x}{5+3\sin x}dx,\ \int\limits_0^2\frac{1}{x^2+2x+1}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$x=4-(y-1)^2,\ x=y^2-4y+3$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$r=\cos\varphi,\ r=\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/2$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \\ y=5\sqrt{2}\sin t \end{cases},\ y=5,(y\ge 5)$.

5.Вычислить длину дуги кривой $y=2+\operatorname{ch}x,\ 0\le x\le 1$

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=8(\cos t+t\sin t) \\ y=8(\sin t-t\cos t) \end{cases},\ 0\le t\le\pi/4$.

7.Вычислить среднее значение функции $f(x)=\frac{1}{x^5+x}$ на отрезке [1;1,5]

8.Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y^3=x-2,\ y=0,\ y=1,\ x=0$ вокруг оси OY.

9.Вычислить работу, затраченную на выкачивание воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания r и высота h.

Вариант 19

1.$\int\limits_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}},\ \int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}},\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}xe^{2x}dx,\ \int\limits_1^2\frac{1-x}{(x^2+x+1)x}dx$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$ и $x^2+y^2=5$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=\sin^2\frac{\varphi}{2}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

4.Вычислить площадь, ограниченную кривыми $\begin{cases}x=6(t-\sin t)\\ y=6(1-\cos t)\end{cases},\ y=9,(y\ge 9)$.

5.Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases}x=8\cos^3 t\\ y=8\sin^3 t\end{cases},\ 0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{10+3\cos x}}$.

8.Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y=2x-x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

9.Вычислить массу стержня длины 100 см, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta=(20x+0{,}15x^2)$ г/см, где x-расстояние от одного из концов стержня.

Вариант 20

1. $\int\limits_0^{\pi/12} \frac{dx}{ctg3x}$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$, $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$, $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+x}dx}{x+5}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2-6x+10$, $y=6x-x^2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=3+2\cos 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \ y = 2 \ (y \geq 2).$$

5. Вычислить длину дуги кривой $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \left(\frac{1}{4} \leq x \leq 1\right)$.

6. Найти длину дуги кривой $r=2(1-\cos\varphi)$, $0\leq\varphi\leq\pi$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}dx$, не вычисляя его.

8. Найти объем тела вращения, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x-1}$, $y=0$, $y=1$, $x=0,5$ около оси OX.

9. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 5 см., если сила 0.05 кГ. сжимает ее на 1см.

Вариант 21

1. $\int\limits_0^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$, $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx$, $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $4y=x^2$, $y=4$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=3\sin 2\varphi$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \ y = 2 \ (y \geq 2).$$

5.Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \pi/6$.

6.Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin\ t - \sin\ 2t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

7.Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{4-3x^2}\,dx$, не вычисляя его.

8.Определить объем тела вращения фигуры, образованной линиями $2x\text{-}x^2\text{-}y=0$, $2x^2\text{-}4x+y=0$ вокруг оси OX.

9.Скорость движения тела пропорциональна кубу времени. В конце 8-й секунды скорость тела равна 5 м/с. Чему равен путь, пройденный телом за 15с.?

Вариант 22

1. $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx,\ \int\limits_1^e \ln^2 x\,dx,\ \int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}},\ \int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx.$

2. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=1$, $x=y$, $y=4$.

3. Вычислить общую часть площади, ограниченную линиями в полярной системе координат $r=2(1+\cos\varphi)$, $r=2$.

4. Вычислить площадь фигуры $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $\pi/2 \le t \le 2\pi/3$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}, \left(0 \le x \le \frac{25}{9}\right).$

6. Вычислить длину дуги кривой $r=7(1\text{-}\sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le \pi/6$.

7. Доказать, что $\frac{2}{5} \le \int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2=4\text{-}x$ и $x=0$ вокруг оси OY.

9. Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина лежит на глубине 4 м.

Вариант 23

1. $\int\limits_0^{\pi/8} tg2x\,dx,\ \int\limits_{\sqrt{2}}^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{2-x^2}},\ \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x - e^{-x}}},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x$, $y=x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат $r=3\sin 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi .$$

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \arcsin e^{-x}, \ 0 \le x \le 1$.

6. Вычислить длину дуги кривой $r=2e^{3/4\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.

7. Доказать, что $\dfrac{\pi}{4} \le \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}dx \le \dfrac{\pi\sqrt{6}}{8}$.

8. Найти объем тела вращения, если вокруг оси OY вращается фигура, ограниченная линиями $y=(x-1)^2$, $y=1$.

9. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой a=10 м, верхнее b=6 м и высота h=5 м, если уровень погружения нижнего основания s=20 м.

<u>Вариант 24</u>

1. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{7-x^2}}, \ \int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx, \ \int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx, \ \int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{3+2\sqrt{x}}.$

2.Найти площадь фигуры между линией $y=xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a(1+\sin\varphi)$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $y=3$ $(y\ge 3)$.

5. Вычислить длину дуги линии $y=0,5x^2$, отсеченной прямой $y=2$.

6.Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$.

7.Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{4-3x^2}dx$, не вычисляя его.

8.Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, образованной кривыми $y=x^2$ и $y^2=x$ около оси OX.

9.Какую работу надо затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности земли на высоту h ? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено в бесконечность?

Вариант 25

1. $\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx,\ \int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^2},\ \int_0^1\frac{\sqrt{x+1}dx}{x+5},\ \int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x$ и $y=x.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной систем координат $r=4+\cos 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$,

$y=2,(y\geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y^2=4/9(2-x)^3$, отсеченной прямой $x= -1$.

6. Вычислить длину дуги параметрической кривой $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t) \\ y=3(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$.

7. Оценить интеграл $\int_0^1\sqrt[3]{5-4x^2}dx$, не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной дугой кривой $x^{\frac{2}{3}}=y$, линиями $x=0$, $x=3$ и $y=0$.

9. Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр, перпендикулярно к его плоскости.

Вариант 26

1. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx,\ \int_0^{\infty}x^2e^{-x^3}dx,\ \int_0^2\frac{x^2dx}{1+x^3},\ \int_0^1\frac{x^2dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4+x$, $x+3y=0$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\cos 2\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$,

$y = 12, (y \geq 12), (0 \leq x \leq 16\pi).$

5. Вычислить длину дуги параболы $y=x^2/2-1$, отсеченной осью OX.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}.$

7. Оценить интеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{x} dx$, не вычисляя его.

8. Найти объем тела, образующегося при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x-4}$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 2$..

9. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра?

Вариант 27

1. $\int\limits_0^1 xe^{2x^2} dx$, $\int\limits_0^{\pi} x\cos\dfrac{x}{3} dx$, $\int\limits_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$, $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = \sin\varphi$, $r = 2\sin\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$,

$y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}).$

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$ от точки $x = -\dfrac{1}{2}$ до $x = \dfrac{1}{2}$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $\pi \leq t \leq 2\pi$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$, не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линями $y=2x-x^2$, $y=2-x$, $x=0$ вокруг оси OX.

9. Пружина имеет длину 20 см. Сила в 10 кГ растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 до 35 см.

Вариант 28

1. $\int\limits_{-1}^{-6}\sqrt{3-x}\ dx,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2\ (x+1)},\ \int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\ dx,\ \int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{e^x}\ dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\arccos x,\ x=0,\ \ y=0.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=\cos\varphi+\sin\varphi.$

4. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases}x=6(t-\sin t)\\ y=6(1-\cos t)\end{cases},$

$y=9,\ (y\geq 9),\ 0\leq x\leq 12.$

5. Найти длину дуги кривой $y=-\ln\cos x,\ 0\ \leq\ x\ \leq\ \frac{\pi}{4}.$

6. Определить длину дуги кривой $\begin{cases}x=4(t-\sin t)\\ y=4(1-\cos t)\end{cases},\quad \frac{\pi}{2}\leq\ t\ \leq\ \frac{2\pi}{3}.$

7. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, не вычисляя его.

8. Определить объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4,\ y=\pm 1$ около оси OY.

9. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность воды 1000 Кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из 4 –х его вертикальных стенок, размеры которой 0,4м **x** 0,7м.

Вариант 29

1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^4},\ \int\limits_{2}^{8}\frac{dx}{\sqrt{x}},\ \int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx,\ \int\limits_{0}^{\infty}x^2e^{-x/2}dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=5(1-\sin\varphi).$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от x=π/3 до x=π/2.

6. Вычислить длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$.

7. Доказать, что $9 \le \int\limits_8^{18} \frac{x+1}{x+2}dx \le 9{,}5$, не вычисляя интеграла.

8. Найдите объем тела, образованного вращением параболы $y^2=4ax$ вокруг оси OX от ее вершины до точки $x=3a$.

9. Материальная точка движется со скоростью $\upsilon(t) = \operatorname{arctg} t$ м/с. Вычислить путь, пройденный за 20 секунд с момента начала движения.

Вариант 30

1. $\int\limits_1^3 x\sqrt{x^2-1}dx,\ \int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx,\ \int\limits_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(1/4)x^2$, $y=3x-x^2/2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\cos\varphi - \sin\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$,

$y=12$, $(y\geq 12)$, $0<x<16\pi$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln 7 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$, $\pi/6 \le t \le \pi/4$.

7. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+2x^3}dx$, не вычисляя его

8. Найти объем тела вращения, если вокруг оси OY вращается фигура, ограниченная линиями $y=(x-1)^2$, $y=1$.

7. Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиной в 5 м, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром в 1 м, а удельный вес железобетона 2500 кг/м^3.

Вариант 31

1. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx,\ \int\limits_2^4 x^2 \sqrt[3]{x^3-8}dx,\ \int\limits_1^2 x\ln(x+1)dx,\ \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=16/x^2$, $y=17-x^2$, ($x\geq 0$, $y\geq 0$).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=1/2+\sin\varphi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=10(t-\sin t) \\ y=10(1-\cos t) \end{cases}$,

$y=15$, $(y\geq 15)$, $0\leq x\leq 20\pi$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(x^2-1)$, $2\leq x\leq 3$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$, $\pi\leq t\leq 2\pi$.

7. Доказать, что $\frac{2}{5}\leq \int\limits_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5x-6$, $y=0$ вокруг оси OX.

9. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см., один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

Вариант 32

1. $\int\limits_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}},\ \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx,\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2},\ \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2+2y$, $x=(y+2)^2$, $x=-y$, $(-1\le x\le 1)$.

3.Вычислить общую часть фигуры, образованную линиями $r^2=4\cos 2\varphi$, $r=\sqrt{2}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$, $y=2$, $(y\ge 2)$.

5.Вычислить длину дуги кривой $y=5+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 1$.

6.Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=3{,}5\left(2\cos t-\cos 2t\right) \\ y=3{,}5\left(2\sin t-\sin 2t\right) \end{cases}$, $0\le t\le \pi/2$.

7.Оценить интеграл, не вычисляя его $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$.

8.Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $x=1$ вокруг оси OY.

9.Цилиндр диаметром 50 см. длиной 200 см. заполнен паром под давлением 20 кг/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в 4 раза, считая, что температура пара остается постоянной?

*Несобственный интеграл и его вычисление

Если подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней или граничной точке отрезка интегрирования ***[a;b],*** или же сам интервал интегрирования является бесконечным, то мы имеем дело уже не с определенным, а с ***несобственным интегралом.*** В этом случае значение интеграла определяется с помощью понятия предела.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(x-a\right)^p}$, $\left(b>a\right)$.

Решение:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left.\dfrac{1}{(p-1)(x-a)^{p-1}}\right|_{a+\varepsilon}^{b}, \text{ при } p>1 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left.\dfrac{(x-a)^{1-p}}{(1-p)}\right|_{a+\varepsilon}^{b}, \text{ при } p<1 \\ \qquad\qquad\varepsilon\to0+ \\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^{b}, \text{ при } p=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{1}{(p-1)(\varepsilon)^{p-1}} - \dfrac{1}{(p-1)(b-a)^{p-1}}, \text{ при } p>1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)} - \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{(\varepsilon)^{1-p}}{(1-p)}, \text{ при } p<1 \\ \Big|\ln|b-a| - \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln|\varepsilon|, \text{ при } p=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty\,(\text{расходится}) \text{ при } p\ge1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)}(\text{сходится}) \text{ при } p<1 \end{cases}.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx.$

Решение: $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 xe^{-x^2}\,dx + \lim\limits_{B\to+\infty}\int_0^B xe^{-x^2}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^{-x^2}d(-x^2) - \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty} e^{-x^2}\Big|_A^0 -$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty} e^{-A^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty} e^{-B^2} = 0.$$

Таким образом, указанный интеграл сходится и равен нулю.

Содержание

Анатолий Николаевич Филиппов

Тамара Сергеевна Филиппова

Кафедра

“Высшая математика”

Считка авторская