Векторы и действия над ними

Лектор доцент Николай Александрович Веклич

(Кафедра высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва)

http://kvm.gubkin.ru/

Литература

- В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. М., Наука. 1971. Стр. 46 – 65.
- Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука. 1980. Стр.116 – 134.

Вводные замечания, или зачем нужны векторы

- Для постановки и решения различных задач в математике и в других научных дисциплинах, применяющих математические методы, используются величины, называемые векторами. Поскольку математические задачи весьма многообразны, то и используемые в них векторы целесообразно определять тем или иным способом.

К наиболее простым и в то же время важным, фундаментальным задачам математики относятся задачи аналитической геометрии.

Это прежде всего задача о построении (о введении) системы координат в пространстве, задачи об определении расстояний, углов, площадей, объемов, задача о нахождении проекции и задача о делении отрезка в заданном отношении.

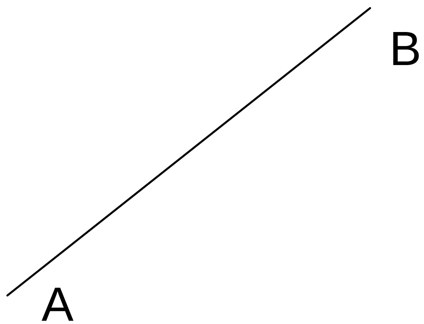
Для их решения в аналитической геометрии эффективно используются векторы.

Дадим определение. В геометрии вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, то есть такой отрезок, обе граничные точки которого поименованы: одна граничная точка отрезка названа началом (по-другому – точкой приложения), а другая граничная точка отрезка названа концом.

Любой ненаправленный отрезок с граничными точками A и B можно сделать направленным отрезком, то есть вектором, причем это можно сделать двумя способами.

Если принять, что точка A является началом, а точка B является концом отрезка, то мы получаем вектор,

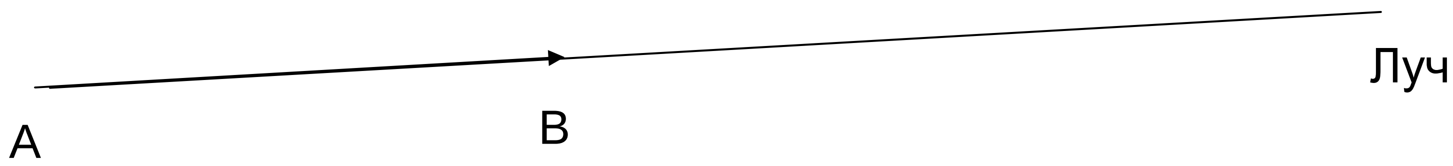
который обозначается символом $\overline{AB}$.



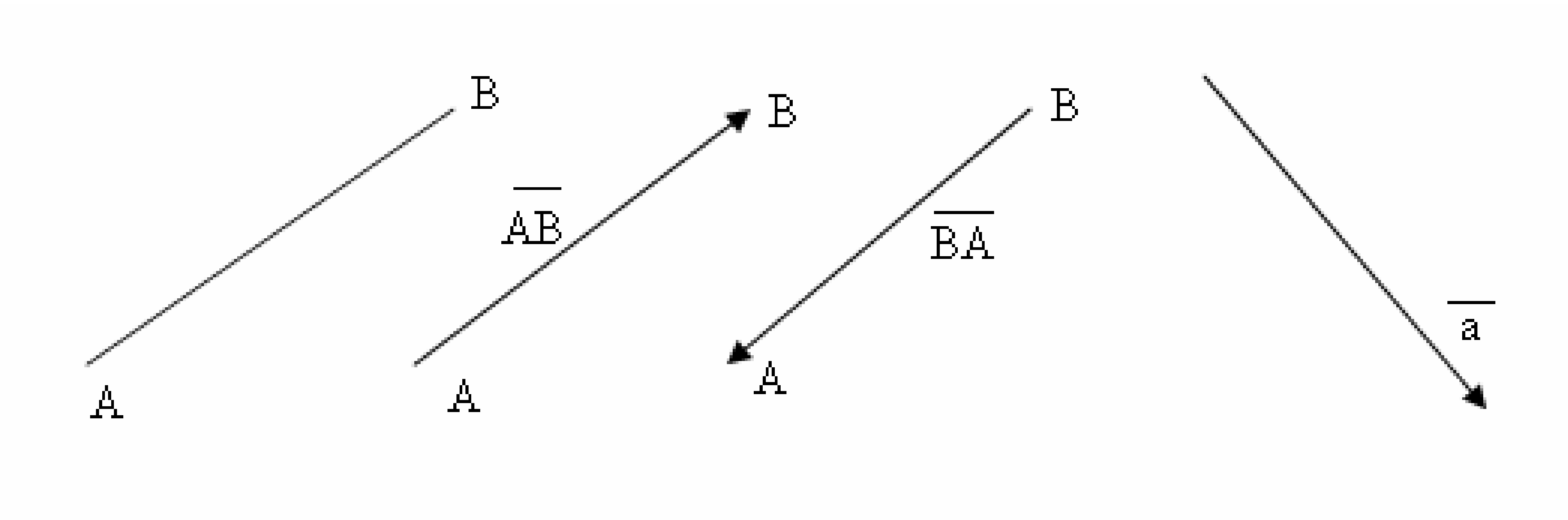
Используя этот же ненаправленный отрезок, можно определить вектор $\overline{BA}$. У этого вектора точка В является началом, а точка А является концом. Принято также обозначать вектор одной буквой, обычно строчной буквой латинского алфавита, также с черточкой над буквой, например $\overline{\boldsymbol{a}}$. Очень удобно векторы изображать геометрически в виде отрезка, конец которого помечается "стрелкой", указывающей, куда направлен вектор.

При этом нелишним будет напомнить, что направление в пространстве задается лучом (полупрямой, выходящей из той или иной точки пространства и уходящей на бесконечность). Так вот, чтобы понять, куда в пространстве направлен вектор $\overline{AB}$, надо построить луч, выходящий из точки А и содержащий точку В. Куда будет направлен такой луч, туда в пространстве и будет направлен лежащий на луче вектор $\overline{AB}$. Обычно при этом говорят кратко, что вектор $\overline{AB}$ направлен "от А к В".

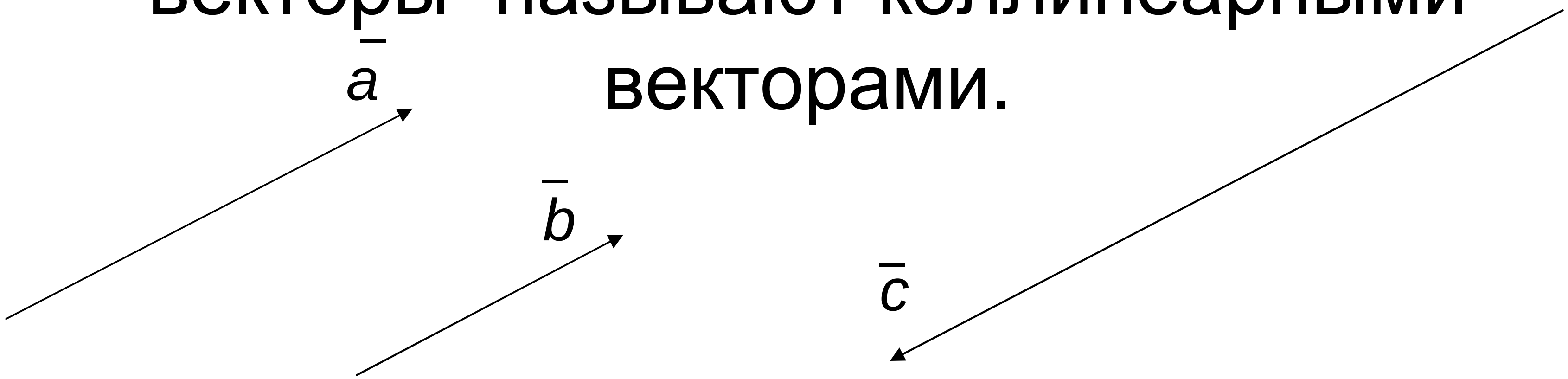
Произвольный вектор $\overline{AB}$ и соответствующий ему луч



Также можно говорить, что направление в пространстве можно (и нужно!) задавать с помощью векторов. Геометрическое изображение векторов:



Можно говорить о сонаправленных векторах ($\bar{a}$ и $\bar{b}$), о противоположно направленных векторах ($\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$). Характерной особенностью сонаправленных и противоположно направленных векторов является то общее, что они либо лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Подчеркивая это общее свойство, такие векторы называют коллинеарными векторами.



Кроме направленности, важной характеристикой любого вектора является его модуль, обозначаемый

привычным символом $|\overline{AB}|$ (или $|\overline{\boldsymbol{a}}|$).

Модулем любого вектора называется длина соответствующего ненаправленного отрезка.
Если модуль вектора равен единице, то вектор называют единичным вектором.
Направление в пространстве наиболее удобно задавать с помощью единичных векторов.

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор принято обозначать символом **0** (без черточки сверху, как и обычное число нуль). Нулевой вектор не задает определенного направления в пространстве. Но его модуль вполне определен и равен обычному числу нуль,

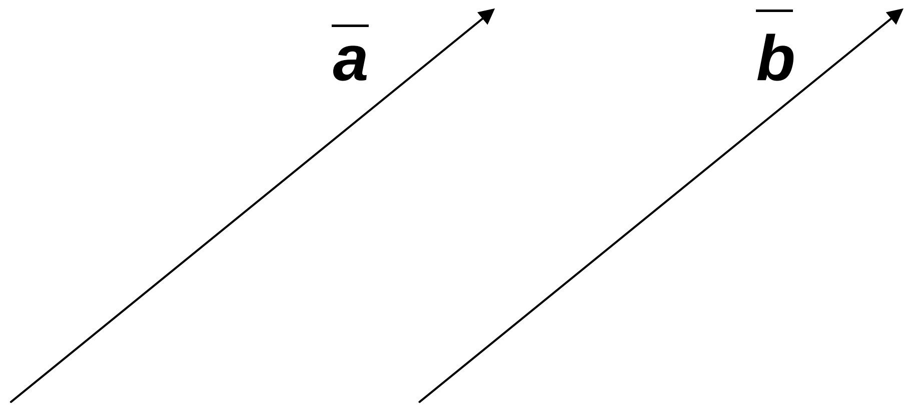
$$|\mathbf{0}| = 0$$

ЧТО МОЖНО ДЕЛАТЬ С ВЕКТОРАМИ:

Равенство двух векторов.

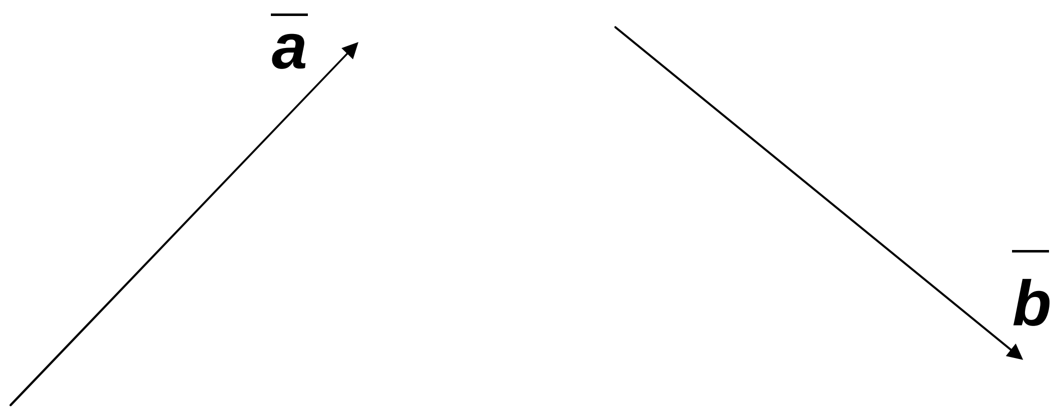
Рассмотрим два вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$. Осуществим параллельный перенос вектора $\bar{\boldsymbol{b}}$ так, чтобы его начало совпало с началом вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$. Если при этом конец (перенесенного) вектора $\bar{\boldsymbol{b}}$ совпадет с концом вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$, то будем говорить, что вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ равен вектору $\bar{\boldsymbol{a}}$ и писать обычное равенство $\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{a}}$.

Можно убедиться, что если $\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{a}}$ то и $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{b}}$
Равные векторы имеют одинаковые модули и одинаковое направление, но могут иметь различные точки приложения в пространстве.
Все нулевые векторы равны друг другу. Ниже изображены два равных вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{b}}$



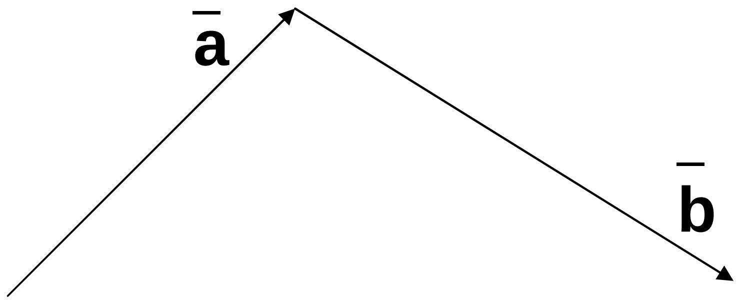
Линейные операции над векторами. Таких операций две. Это операция **сложения векторов** и **операция умножения вектора на действительное число.** Начнем с операции сложения. Рассмотрим два вектора

$\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$.



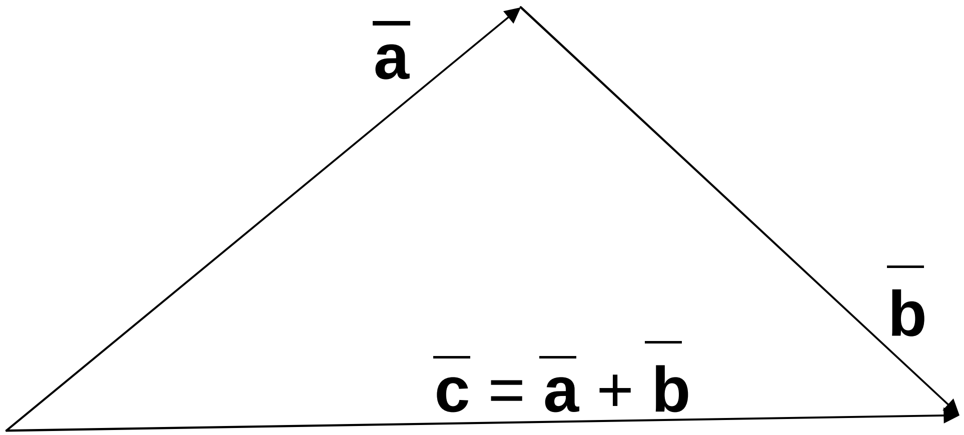
Определим их сумму $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ с помощью правила треугольника. Для этого изобразим векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ так, чтобы начало вектора $\bar{\mathbf{b}}$ совпадало с концом вектора $\bar{\mathbf{a}}$

(т.е. вектор $\bar{\mathbf{b}}$ откладываем от конца вектора $\bar{\mathbf{a}}$).

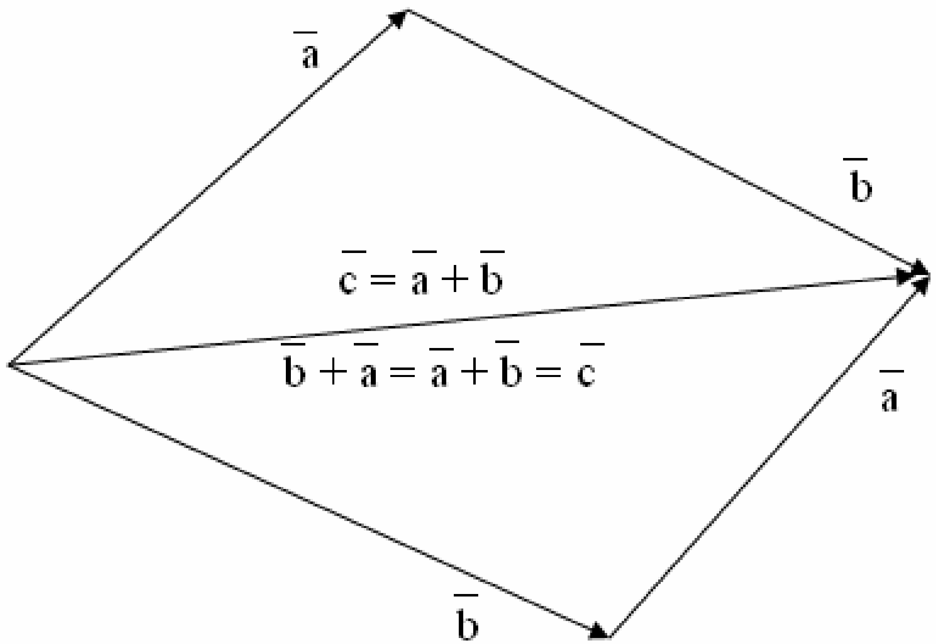


Тогда под суммой двух векторов $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ понимаем такой вектор $\bar{\mathbf{c}}$ (пишем равенство $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}}$), начало которого совпадает с началом вектора $\bar{\mathbf{a}}$, а конец совпадает с концом вектора $\bar{\mathbf{b}}$.

Правило треугольника сложения двух векторов



Далее построим сумму этих же векторов, но в другом порядке, $\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$ =? Можно видеть, что мы приходим к прежнему результату: правило треугольников дает, что сумма $\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ Причем при построении двух соответствующих треугольников мы получаем параллелограмм, который виден на следующем слайде



$\bar{a}$
$\bar{b}$
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$
$\bar{b} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$
$\bar{a}$
$\bar{b}$

Можно говорить, что этот параллелограмм построен на двух векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, имеющих общую начальную точку, причем сумма $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ есть диагональ параллелограмма, выходящая из точки приложения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Правило параллелограмма сложения двух векторов является следствием правила треугольников. Оно весьма наглядное и применяется в ряде случаев (в физике, механике) в качестве независимого определения суммы двух векторов.

Правило сложения векторов обладает теми же четырьмя свойствами, что и правило сложения действительных чисел:

1) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$

2) $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$

3) $\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{0} = \bar{\mathbf{a}}$

4) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}}^{/} = \mathbf{0}$

Здесь $\bar{\mathbf{a}}^{/}$ означает вектор, противоположный вектору $\bar{\mathbf{a}}$ (модуль противоположного к $\bar{\mathbf{a}}$ вектора $\bar{\mathbf{a}}^{/}$ равен модулю вектора $\bar{\mathbf{a}}$, а направление вектора $\bar{\mathbf{a}}^{/}$ противоположно направлению вектора $\bar{\mathbf{a}}$).

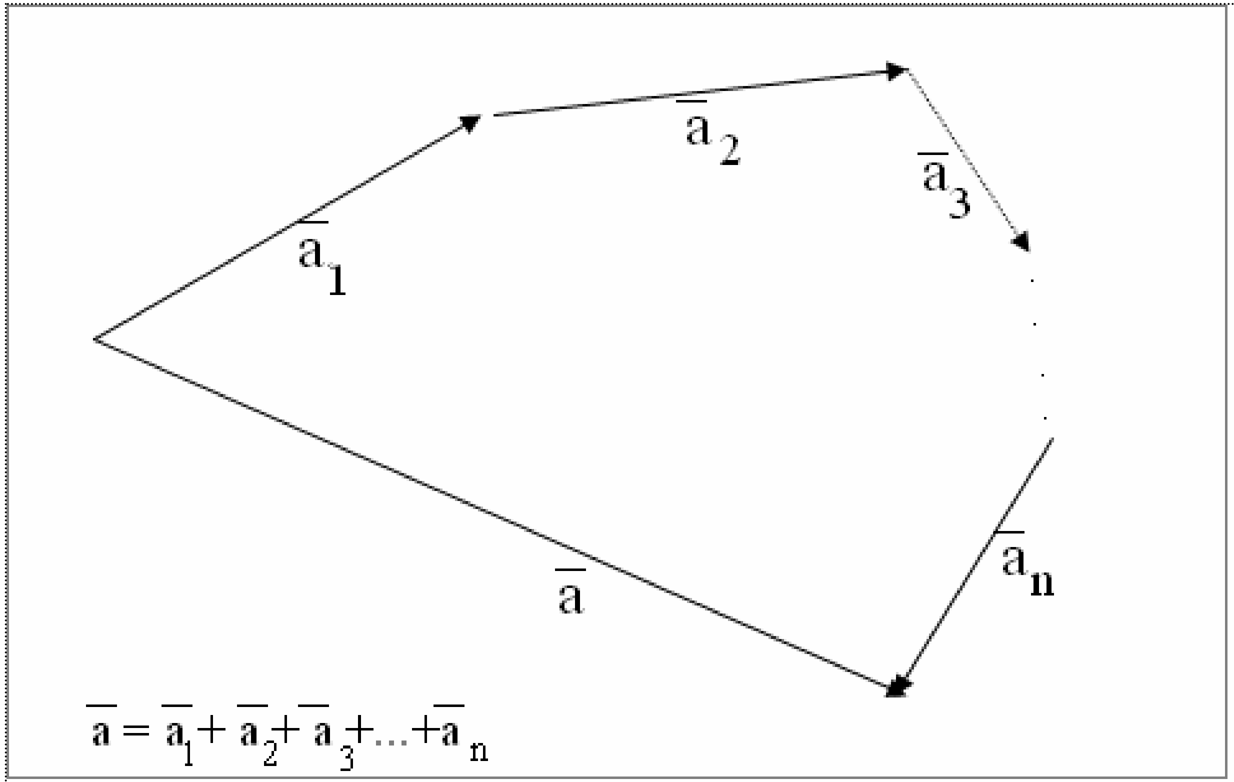
Замечание. Надо отметить и некоторую разницу свойств. Для действительных чисел эти 4 свойства операции сложения принимаются в виде аксиом, в то время как для наших геометрических векторов их надо доказывать, на чем, однако, мы не останавливаемся. Следует сказать и то, что при более общем определении векторной величины приведенные 4 свойства операции сложения векторов все-таки принимаются в виде аксиом.

Далее можно говорить о сумме n произвольных

векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_n$:

$$\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \overline{\mathbf{a}}_n = \overline{\mathbf{a}}$$

Правило замыкания ломаной до многоугольника



Для упрощения математических выкладок, связанных с векторами, полезно ввести разность векторов.

Разностью двух векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, обозначаемой $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$,

называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$ (пишем $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}}$) такой, что в

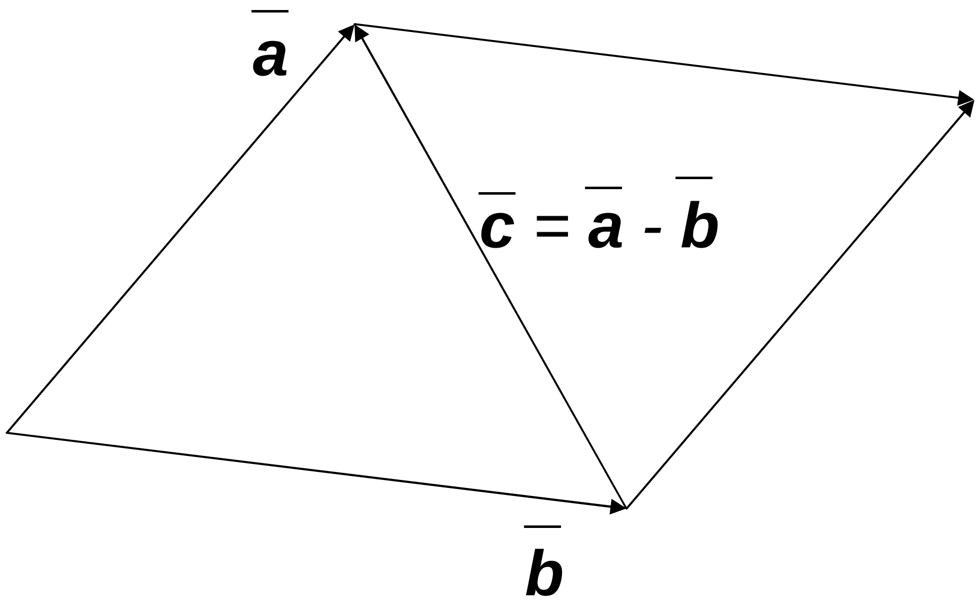
сумме с вектором $\bar{\mathbf{b}}$ он дает $\bar{\mathbf{a}}$:

$$\bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}}$$

Вектор $\bar{\mathbf{c}}$ является другой диагональю

параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Надо отметить, что операция вычитания векторов не является независимой операцией над векторами: она полностью определяется через операцию сложения.

Разность векторов



Умножение вектора на число.

Пусть имеем вектор $\bar{\mathbf{a}}$ и действительное число λ (читается: лямбда). Произведением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ, обозначаемым символом $\lambda\,\bar{\mathbf{a}}$ или $\bar{\mathbf{a}}\,\lambda$ называется вектор $\bar{\mathbf{b}}$ (пишем равенство $\bar{\mathbf{b}} = \lambda\,\bar{\mathbf{a}}$ или $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}}\,\lambda$) такой что он коллинеарен вектору $\bar{\mathbf{a}}$, имеет модуль, равный произведению $\left|\bar{b}\right| = \left|\lambda\right|\left|\bar{a}\right|$ и имеющий направление совпадающее с направлением $\bar{\mathbf{a}}$ если $\lambda > 0$ и противоположное $\bar{\mathbf{a}}$ направление при $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$

или $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ принимаем равенство: $\lambda\,\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$

Из определения модуля вектора $\bar{\mathbf{b}}$ следует, что он в $\left|\lambda\right|$ раз больше модуля вектора $\bar{\mathbf{a}}$. Для придания большей наглядности операции умножения можно условно говорить, что при умножении вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ этот вектор надо растянуть в $\left|\lambda\right|$ раз, сохранив стрелку при $\lambda > 0$ или изменив стрелку на противоположную при $\lambda < 0$. При этом получится искомый результат – вектор $\bar{\mathbf{b}}$

Операция умножения вектора на число имеет следующие свойства:

1) $1\,\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$

2) $\lambda_1(\lambda_2\,\bar{\mathbf{a}}) = (\lambda_1\lambda_2)\,\bar{\mathbf{a}}$

3) $\lambda\,(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \lambda\,\bar{\mathbf{a}} + \lambda\,\bar{\mathbf{b}}$

4) $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\bar{\mathbf{a}} = \lambda_1\,\bar{\mathbf{a}} + \lambda_2\,\bar{\mathbf{a}}$

Учитывая свойства операции сложения и операции умножения вектора на число, можно производить алгебраические действия над векторами , аналогичные действиям над числами (приводить подобные члены, переносить в равенствах слагаемые справа налево и наоборот), что весьма удобно.

Важное свойство коллинеарных векторов:

Если вектор $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарен ненулевому вектору $\bar{\mathbf{a}}$, то существует действительное число λ такое, что

$$\bar{\mathbf{b}} = \lambda\, \bar{\mathbf{a}}$$

Фактически здесь мы имеем уравнение для числа λ , так как векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ известны. Но тогда с учетом уже известных нам определений имеем цепочку равенств для действительных чисел:

$$|\bar{b}| = |\lambda||\bar{a}|, \qquad |\lambda| = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$$

Остается только определить знак искомого числа λ , что предлагается студентам сделать самостоятельно

(Полнее см. в Литература)

Линейная комбинация векторов

Рассмотрим n векторов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$ и n действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые будем называть коэффициентами. Линейной комбинацией этих векторов с указанными коэффициентами называем выражение вида

$$\lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{\mathbf{a}}_n$$

Рассматриваемая линейная комбинация представляет собой вектор, который обозначим символом $\bar{\mathbf{b}}$:

$$\lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{\mathbf{a}}_n = \bar{\mathbf{b}}$$

Запишем получившееся равенство в другом порядке:

$$\bar{\mathbf{b}} = \lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{\mathbf{a}}_n$$

Говорят, что вектор $\bar{\mathbf{b}}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Например, если $\bar{\mathbf{d}} = -2\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + 3\bar{\mathbf{c}}$, то можно говорить, что вектор $\bar{\mathbf{d}}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ с коэффициентами -2, 1 и 3 соответственно.

Линейная зависимость векторов

- Векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2,\ldots,\bar{\mathbf{a}}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$, среди которых хотя бы один отличен от нуля, что линейная комбинация $\lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2+\ldots+ \lambda_n \bar{\mathbf{a}}_n = \mathbf{0}$.
- Если же равенство $\lambda_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{a}}_2+\ldots+ \lambda_n \bar{\mathbf{a}}_n = \mathbf{0}$ возможно только при всех $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ равных нулю, то векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2,\ldots,\bar{\mathbf{a}}_n$ называются линейно независимыми.

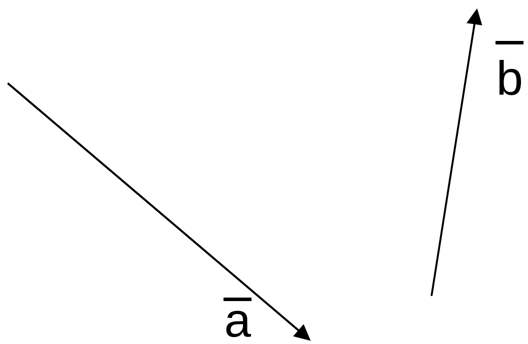
- Студентам предлагается самостоятельно доказать, что 1)если хотя вектор бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2,\ldots,\bar{\mathbf{a}}_n$ нулевой, то такие векторы будут линейно зависимыми 2)если какие-либо (n-1) этих векторов линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы

Линейная зависимость и линейная независимость двух векторов

- Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Проверим справедливость этого утверждения.
- Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы. Тогда $\lambda_1 \bar{\mathbf{a}} + \lambda_2 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$; пусть λ_2 отлично от нуля. $\bar{\mathbf{b}} = (-\lambda_1 / \lambda_2)\, \bar{\mathbf{a}} = \lambda\, \bar{\mathbf{a}}$. Следовательно векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные.
- Пусть векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные. Тогда если $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ то векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы. Если же вектор $\bar{\mathbf{a}}$ отличен от нулевого, то по свойству коллинеарных векторов имеет место равенство $\bar{\mathbf{b}} = \lambda\, \bar{\mathbf{a}}$ или $1\, \bar{\mathbf{b}} + (-\lambda)\, \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, следовательно векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы.

Следствие

Если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ неколлинеарные, то они линейно независимы



Здесь изображены линейно независимые векторы

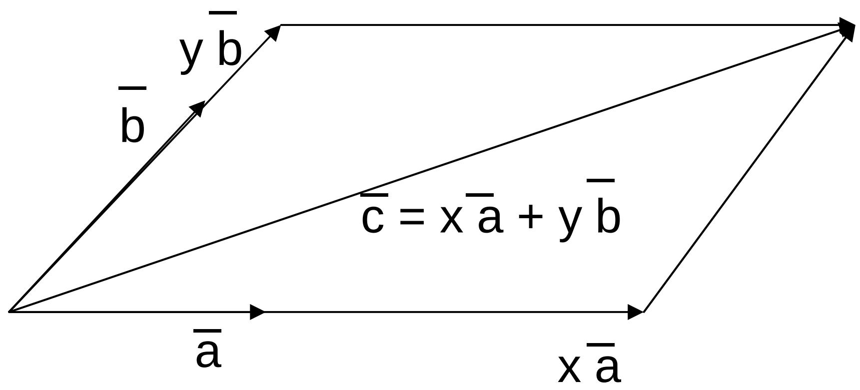
Линейная зависимость и линейная независимость трех векторов

- **Определение.** Векторы называются компланарными, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.
- Три вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. Проверим это утверждение.
- Пусть векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ линейно зависимы. Тогда
- $\lambda_1 \overline{\mathbf{a}} + \lambda_2 \overline{\mathbf{b}} + \lambda_3 \overline{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$. Пусть например λ_3 отлично от нуля. Тогда $\lambda_3 \overline{\mathbf{c}} = -\lambda_1 \overline{\mathbf{a}} - \lambda_2 \overline{\mathbf{b}}$ или $\overline{\mathbf{c}} = x\,\overline{\mathbf{a}} + y\,\overline{\mathbf{b}}$ где

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \qquad y = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

На рисунке показаны три вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, связанные равенством $\bar{\mathbf{c}} = x\,\bar{\mathbf{a}} + y\,\bar{\mathbf{b}}$, для случая, когда векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ неколлинеарны

- векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны



Пусть теперь векторы $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$ компланарны. Докажем, что они и линейно зависимы.
Причем если среди них есть коллинеарные пары, то доказательство линейной зависимости такой тройки векторов студентам предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения.

Мы же ограничимся рассмотрением случая, когда среди рассматриваемых трех векторов нет коллинеарных пар. Обращаясь при этом к рисунку на предыдущем слайде, мы замечаем, что один из этих векторов, например, вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ можно представить в виде линейной комбинации двух других векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$: $\bar{\boldsymbol{c}} = x\,\bar{\boldsymbol{a}} + y\,\bar{\boldsymbol{b}}$. Но тогда справедливо и равенство $(-x)\,\bar{\boldsymbol{a}} + (-y)\,\bar{\boldsymbol{b}} + 1\,\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\mathbf{0}}$, означающее линейную зависимость векторов $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}$.

Два важных следствия из условия линейной зависимости трех векторов

- 1) Три любых некомпланарных вектора линейно независимы (другими словами, линейная независимость трех векторов геометрически означает их некомпланарность).
- 2) Какие бы ни были два неколлинеарных вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, для любого вектора $\bar{\boldsymbol{c}}$, лежащего в одной плоскости с векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ найдутся два числа x и y такие, что справедливо равенство: $\bar{\boldsymbol{c}} = x\,\bar{\boldsymbol{a}} + y\,\bar{\boldsymbol{b}}$.

Линейная зависимость четырех векторов

Любые четыре вектора линейно зависимы.

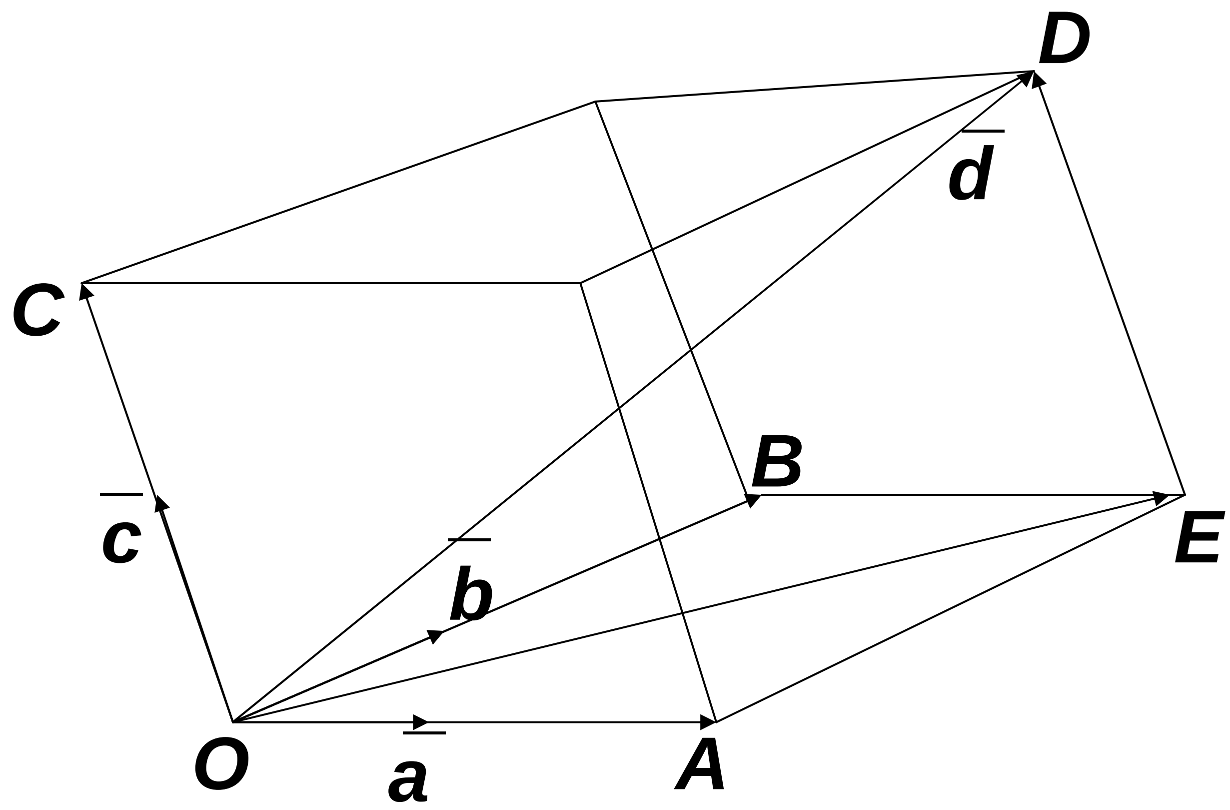
Проверить справедливость этого утверждения для случая, когда среди четырех векторов имеются коллинеарные пары или компланарные тройки векторов, студентам предлагается самостоятельно, в виде упражнения (см. также Литература).

Мы здесь остановимся на случае, когда никакие два вектора из четырех не коллинеарны, никакие три вектора не компланарны.

На следующем слайде показаны четыре таких вектора

$\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$, $\overline{\boldsymbol{c}}$, $\overline{\boldsymbol{d}}$

Все четыре вектора отложены из общего начала и по ни можно построить наклонный параллелепипед:



$$\bar{d} = \overline{OE} + \overline{ED} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = x\,\bar{a} + y\,\bar{b} + z\,\bar{c}$$

Перепишем полученное на предыдущем слайде выражение в следующем виде:

$$(-x)\,\bar{\boldsymbol{a}} + (-y)\,\bar{\boldsymbol{b}} + (-z)\,\bar{\boldsymbol{c}} + 1\bar{\boldsymbol{d}} = \mathbf{0}$$

Это равенство нулю линейной комбинации четырех векторов показывает, что четыре вектора линейно зависимы.

Следствие

Какими бы ни были три некомпланарных вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$, любой вектор $\boldsymbol{d}$ можно выразить через них в виде линейной комбинации.

Определение базиса на плоскости и в пространстве

- Базисом на плоскости называются два таких линейно независимых вектора ($\overline{\boldsymbol{e}}_1$, $\overline{\boldsymbol{e}}_2$) плоскости , через которые любой вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ этой плоскости выражается в виде линейной комбинации $\overline{\boldsymbol{a}} = x\,\overline{\boldsymbol{e}}_1 + y\,\overline{\boldsymbol{e}}_2$

- Базисом в пространстве называются три таких линейно независимых вектора ($\overline{\boldsymbol{e}}_1$, $\overline{\boldsymbol{e}}_2$, $\overline{\boldsymbol{e}}_3$) пространства , через которые любой вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ пространства выражается в виде линейной комбинации $\overline{\boldsymbol{a}} = x\,\overline{\boldsymbol{e}}_1 + y\,\overline{\boldsymbol{e}}_2 + z\,\overline{\boldsymbol{e}}_3$

Чтобы убедиться в существовании базисов, заметим, что в качестве базиса на плоскости можно взять два любых неколлинеанарных вектора плоскости. В качестве базиса в пространстве можно взять три любых некомпланарных вектора пространства.

Представление вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в виде суммы $\bar{\boldsymbol{a}} = x\,\bar{\boldsymbol{e}}_1 + y\,\bar{\boldsymbol{e}}_2$ или в виде суммы $\bar{\boldsymbol{a}} = x\,\bar{\boldsymbol{e}}_1 + y\,\bar{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{z}\,\bar{\boldsymbol{e}}_3$ называется разложением вектора по (соответствующему) базису.

Пара действительных чисел (x, y) в первом случае или тройка чисел (x, y, z) во втором случае называются координатами вектора в соответствующем базисе.

Число базисных векторов называется размерностью пространства

Единственность координат вектора в базисе

Проверим это утверждение для случая пространства, применяя базис из трех произвольно заданных некомпланарных векторов ($\bar{\boldsymbol{e}}_1$, $\bar{\boldsymbol{e}}_2$, $\bar{\boldsymbol{e}}_3$)

Пусть для некоторого вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в рассматриваемом базисе имеются два разложения с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2 ,y_2, z_2) . Это позволяет написать следующие равенства: $\bar{\boldsymbol{a}} = x_1 \bar{\boldsymbol{e}}_1 + y_1 \bar{\boldsymbol{e}}_2 + z_1 \bar{\boldsymbol{e}}_3 = x_2 \bar{\boldsymbol{e}}_1 + y_2 \bar{\boldsymbol{e}}_2 + z_2 \bar{\boldsymbol{e}}_3$.

Но тогда верно и равенство

$$(x_1 - x_2) \bar{\boldsymbol{e}}_1 + (y_1 - y_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2 +(z_1 - z_2)\bar{\boldsymbol{e}}_3 = \mathbf{0}$$

Учитывая линейную независимость базисных векторов $\bar{\boldsymbol{e}}_1$, $\bar{\boldsymbol{e}}_2$, $\bar{\boldsymbol{e}}_3$, получаем три равенства

$$x_1 - x_2 = 0,\ y_1 - y_2 = 0,\ z_1 - z_2 = 0$$

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 ,\ z_1 = z_2$$

что и требовалось проверить

Координаты вектора и операция сложения векторов

- Если имеем базис $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ и два вектора $\overline{a} = x_a\overline{e}_1 + y_a\overline{e}_2 + z_a\overline{e}_3$ и $\overline{b} = x_b\overline{e}_1 + y_b\overline{e}_2 + z_b\overline{e}_3$ то тогда $\overline{a} + \overline{b} = (x_a\overline{e}_1 + y_a\overline{e}_2 + z_a\overline{e}_3) + (x_b\overline{e}_1 + y_b\overline{e}_2 + z_b\overline{e}_3) = (x_a + x_b)\overline{e}_1 + (y_a + y_b)\overline{e}_2 + (z_a + z_b)\overline{e}_3$
- **вывод:**
- $\overline{a} + \overline{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b)$ сумме векторов соответствует сумма их координат (при сложении векторов, их координаты также складываются)

Координаты вектора и умножение вектора на число

- Если имеем базис $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ и вектор $\overline{a} = x\,\overline{e}_1 + y\,\overline{e}_2 + z\,\overline{e}_3$ то тогда $\lambda\,\overline{a} = \lambda\,(x\,\overline{e}_1 + y\,\overline{e}_2 + z\,\overline{e}_3) = (\lambda\,x)\,\overline{e}_1 + (\lambda\,y)\overline{e}_2 + (\lambda\,z)\overline{e}_3$
- **вывод:**
- $\lambda\,\overline{a} = (\lambda\,x, \lambda\,y, \lambda z)$ при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число

Подведем **некоторый итог** рассмотрения вопроса о разложении произвольного вектора по заданному базису. Как было отмечено на предыдущих слайдах, по заданному вектору его координаты определяются в заданном базисе однозначно. Верным будет и обратное утверждение, что если задан базис и заданы координаты вектора, то этот вектор определяется (строится на плоскости или в пространстве) также однозначно. Учитывая еще, что при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это же число, вектор можно отождествить с набором координат

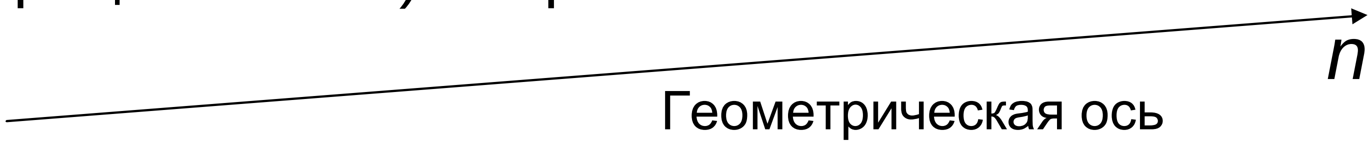
и в ряде случаев применять еще один способ задания вектора, если указан базис:

- Вместо разложения (равенства) $\overline{\boldsymbol{a}} = x\,\overline{\boldsymbol{e}}_1 + y\,\overline{\boldsymbol{e}}_2$ в дальнейшем будем писать равносильное равенство $\overline{\boldsymbol{a}} = (x\,,\,y)$ вектора упорядоченной паре его координат

- Вместо разложения (равенства) $\overline{\boldsymbol{a}} = x\,\overline{\boldsymbol{e}}_1 + y\,\overline{\boldsymbol{e}}_2 + z\,\overline{\boldsymbol{e}}_3$ в дальнейшем будем писать равносильное равенство $\overline{\boldsymbol{a}} = (x\,,\,y,\,z)$ вектора упорядоченной тройке его координат

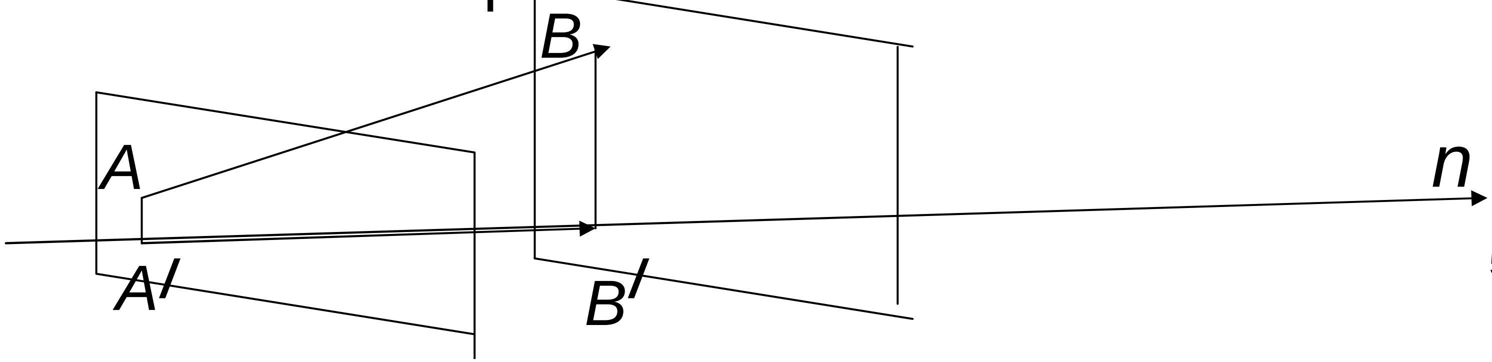
Геометрическая ось. Проекция вектора на геометрическую ось

- Геометрической осью называется прямая, на которой указано положительное и отрицательное направления. Положительное направление на оси указывается при помощи стрелки. У стрелки оси ставится название оси. Противоположное (отрицательное) направление на оси не отмечается.



Геометрическая ось

- Пусть имеется вектор $\overline{AB}$ и ось *n.*



Проведем через начало и конец вектора $\overline{AB}$ две плоскости, перпендикулярные оси *n.* В результате на оси получим две точки A' и B'.

Они определяют новый вектор $\overline{A'B'}$.

Проекция вектора $\overline{AB}$ *на ось n* , обозначаемая символом

$$пр_n \overline{AB},$$

равна длине отрезка $A'B'$, если вектор $\overline{A'B'}$ сонаправлен с осью *n* , и равна длине отрезка $A'B'$, умноженной на -1, если вектор $\overline{A'B'}$ направлен противоположно оси *n.*

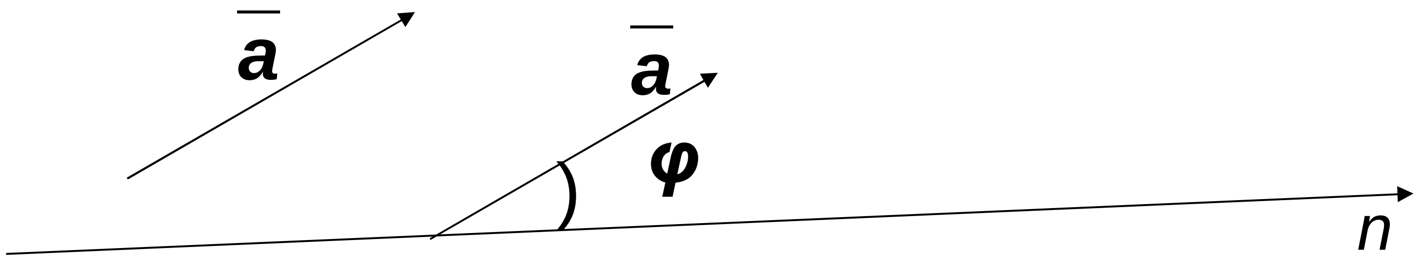
Можно писать и такие равенства:

1) $пр_n \overline{AB} = \pm$ (Длина отрезка $A'B'$)

2) Длина отрезка $A'B' = |\, пр_n \overline{AB}\, |$

Расчетная формула для вычисления проекции вектора на геометрическую ось

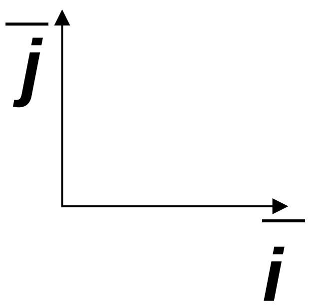
- Если есть геометрическая ось *n* и вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$, то можно определить угол φ между ними, $0 \le \varphi \le \pi$

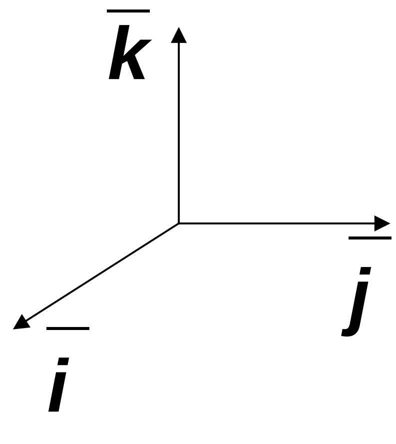


- В этом случае имеем
- $\text{пр}_n\, \bar{\boldsymbol{a}} = |\, \bar{\boldsymbol{a}}\, | \cos \varphi$
- **Сформулируем линейное и однородное свойства проекции вектора на ось:**
- $\text{пр}_n\, (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}) = \text{пр}_n\, (\bar{\boldsymbol{a}}) + \text{пр}_n\, (\bar{\boldsymbol{b}})$
- $\text{пр}_n\, (\lambda\, \bar{\boldsymbol{a}}) = \lambda\, \text{пр}_n\, (\bar{\boldsymbol{a}})$

Декартов базис на плоскости и в пространстве

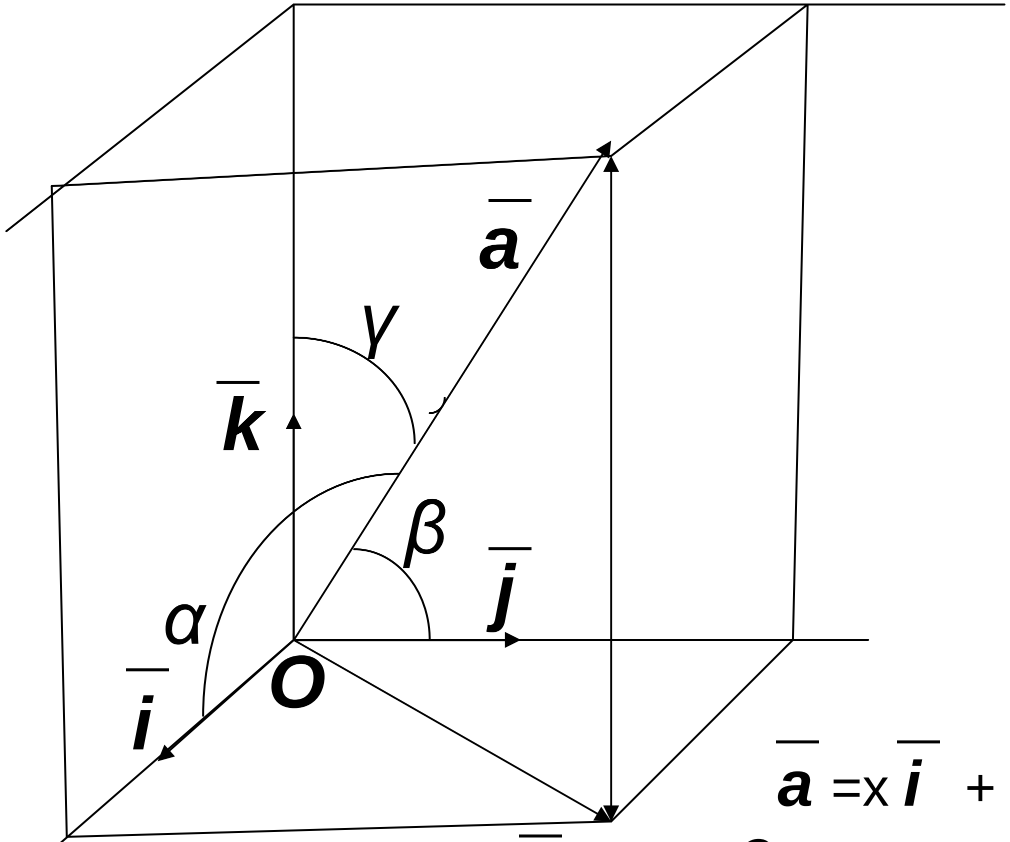
- Декартов базис на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными векторами единичной длины $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$: $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$, $|\,\boldsymbol{i}\,| = |\,\boldsymbol{j}\,| = 1$
- Декартов базис в пространстве задается тремя взаимно перпендикулярными векторами единичной длины $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$: $\bar{\boldsymbol{i}} \perp \bar{\boldsymbol{j}}$, $\bar{\boldsymbol{i}} \perp \bar{\boldsymbol{k}}$, $\bar{\boldsymbol{j}} \perp \bar{\boldsymbol{k}}$
- $|\,\bar{\boldsymbol{i}}\,| = |\,\bar{\boldsymbol{j}}\,| = |\,\bar{\boldsymbol{k}}\,| = 1$





Геометрический смысл декартовых координат вектора

- Ограничимся случаем трехмерного пространства, в котором зададим декартов базис $\bar{\boldsymbol{i}}$, $\bar{\boldsymbol{j}}$, $\bar{\boldsymbol{k}}$. Для произвольно взятого вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ разложение по декартову базису $\bar{\boldsymbol{a}} = x\,\bar{\boldsymbol{i}} + y\,\bar{\boldsymbol{j}} + z\,\bar{\boldsymbol{k}}$ обладает важным свойством, что декартовы координаты x, y, z вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ равны проекциям этого вектора на оси, задаваемые базисными векторами $\bar{\boldsymbol{i}}$, $\bar{\boldsymbol{j}}$, $\bar{\boldsymbol{k}}$:
- $x =$ пр$_{\mathbf{i}}\bar{\boldsymbol{a}}$, $y =$ пр$_{\mathbf{j}}\bar{\boldsymbol{a}}$, $z =$ пр$_{\mathbf{k}}\bar{\boldsymbol{a}}$ или
- $x = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cos\alpha$, $y = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cos\beta$, $z = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cos\gamma$



- $\bar{\boldsymbol{a}} = x\,\bar{\boldsymbol{i}} + y\,\bar{\boldsymbol{j}} + z\,\bar{\boldsymbol{k}}$
- $x = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cos \alpha$ $\quad y = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cos \beta$ $\quad z = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cos \gamma$

Выражение модуля вектора и направляющих косинусов через декартовы координаты

- Если_вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ имеет декартовы координаты $\bar{\boldsymbol{a}} = x\,\bar{\boldsymbol{i}} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$,

- то тогда модуль вектора $|\bar{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} =$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Направляющие косинусы вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ **:**

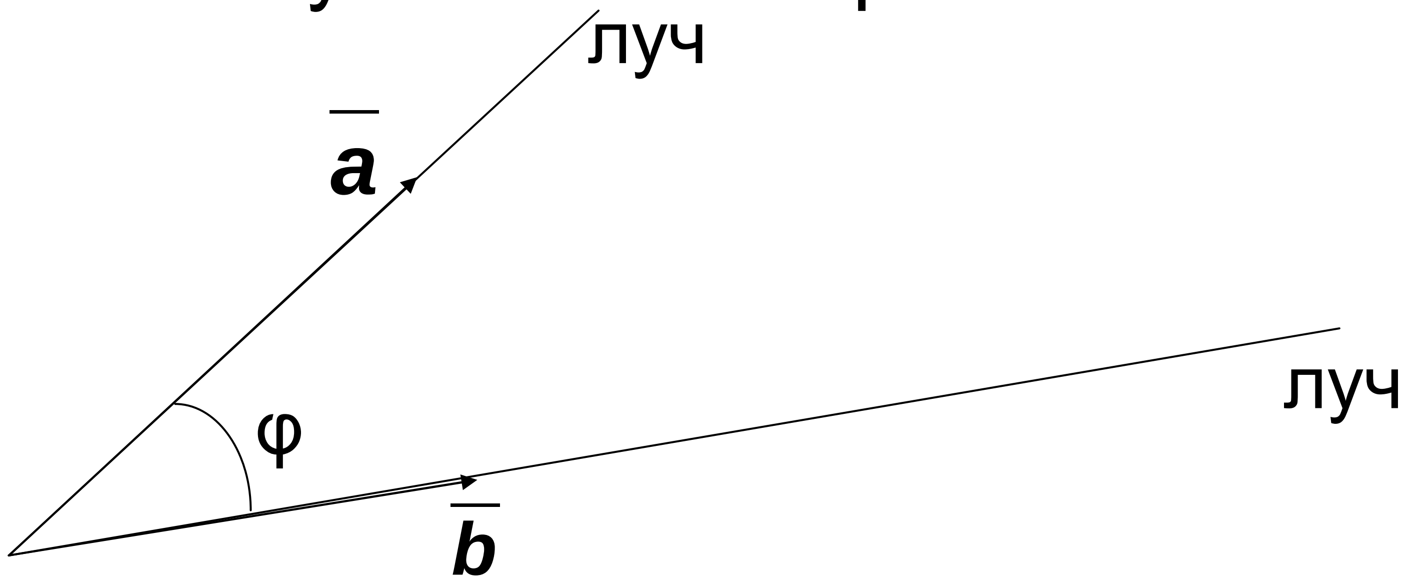
$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Скалярное произведение двух векторов

Рассмотрим два вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$.

Определим угол φ между ними как угол между лучами, идущими соответственно вдоль $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$. Для любых векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ берем тот угол φ, который удовлетворяет условию $0 \le \varphi \le \pi$



Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Для произвольных векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ скалярное произведение обозначаем символом $(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})$. Итак

$$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cdot |\bar{\boldsymbol{b}}| \cos \varphi$$

Введем в рассмотрение две геометрические оси, порождаемые векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$. Оси будем обозначать соответственно буквами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Учитывая при этом, что произведения
$|\bar{\boldsymbol{b}}| \cos \varphi = \text{пр}_a \bar{\boldsymbol{b}}$ и $|\bar{\mathbf{a}}| \cos \varphi = \text{пр}_b \bar{\boldsymbol{a}}$
выражаются через проекцию одного из этих векторов на направление (на ось), задаваемое другим вектором, можем переписать определение скалярного произведения в таком виде:

$$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}| \cdot \text{пр}_a \bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{b}}|\, \text{пр}_b \bar{\boldsymbol{a}}$$

Каждое из этих двух равенств может быть принято в качестве нового определения скалярного произведения двух векторов, эквивалентного предыдущему определению.

Отметим геометрические свойства скалярного произведения

1)Скалярное произведение векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны ($\varphi = \frac{1}{2}\pi$)

2)Если угол φ между векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ острый ($0 \le \varphi < \frac{1}{2}\pi$) , то их скалярное произведение положительное.

3)Если угол φ между векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ тупой ($\frac{1}{2}\pi < \varphi \le \pi$) , то их скалярное произведение отрицательное.

По знаку скалярного произведения двух векторов можно судить о том, острый или тупой угол φ между ними.

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$

2) $(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b})$

3) $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$

4) $(\bar{a}, \bar{a}) > 0$ если $\bar{a}$ ненулевой вектор и $(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ если $\bar{a}$ нулевой вектор.

Свойство 1) вытекает непосредственно из определения скалярного произведения. Свойства 2) и 3) доказываются с учетом выражения скалярного произведения через проекцию одного из векторов на ось (направление), задаваемое другим вектором, и с учетом сформулированных выше свойств проекции вектора на геометрическую ось. Например, для проверки свойства 3) запишем цепочку равенств:

$(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}}) = |\overline{\boldsymbol{c}}|\ \text{пр}_c(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}) = |\overline{\boldsymbol{c}}|\ (\text{пр}_c(\overline{\boldsymbol{a}}) + \text{пр}_c(\overline{\boldsymbol{b}})) = |\overline{\boldsymbol{c}}|\ \text{пр}_c(\overline{\boldsymbol{a}}) + |\overline{\boldsymbol{c}}|\ \text{пр}_c(\overline{\boldsymbol{b}}) =$
$= (\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{c}}) + (\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}})$, что и требовалось.

Свойство 4) вытекает из равенства

$$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}) = |\overline{\boldsymbol{a}}|^2 \cos 0 = |\overline{\boldsymbol{a}}|^2$$

Это равенство позволяет находить модуль вектора $|\overline{\boldsymbol{a}}|$ через скалярное произведение $\left|\overline{a}\right| = +\sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$

Выражение скалярного произведения через декартовы координаты векторов

Зададим в пространстве декартов базис $\bar{\boldsymbol{i}}$, $\bar{\boldsymbol{j}}$, $\bar{\boldsymbol{k}}$ и разложим векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ по этому базису. Пусть имеем разложения

$\bar{\boldsymbol{a}} = (x_a, y_a, z_a)$, $\bar{\boldsymbol{b}} = (x_b, y_b, z_b)$. Тогда

$$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Проверим правильность этой формулы:

$$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = (x_a \bar{\boldsymbol{i}} + y_a \bar{\boldsymbol{j}} + z_a \bar{\boldsymbol{k}},\ x_b \bar{\boldsymbol{i}} + y_b \bar{\boldsymbol{j}} + z_b \bar{\boldsymbol{k}}) =$$

$$x_a x_b(\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{i}}) + x_a y_b(\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{j}}) + x_a z_b(\bar{\boldsymbol{i}}, \bar{\boldsymbol{k}}) + y_a x_b(\bar{\boldsymbol{j}}, \bar{\boldsymbol{i}}) + y_a y_b(\bar{\boldsymbol{j}}, \bar{\boldsymbol{j}}) + y_a z_b(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) + z_a x_b(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) + z_a y_b(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) + z_a z_b(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = x_a x_b \cdot 1 + x_a y_b \cdot 0 + x_a z_b \cdot 0 + y_a x_b \cdot 0 + y_a y_b \cdot 1 + y_a z_b \cdot 0 + z_a x_b \cdot 0 + z_a y_b \cdot 0 + z_a z_b \cdot 1 = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Получили простое правило вычисления скалярного произведения двух векторов через их декартовы координаты: Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных декартовых координат этих векторов.

Условие ортогональности векторов, выраженное через декартовы координаты

Два вектора $\bar{\boldsymbol{a}} = (x_a, y_a, z_a)$, $\bar{\boldsymbol{b}} = (x_b, y_b, z_b)$ ортогональны, если имеет место равенство

$$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$$

Угол φ между векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ можно определить через декартовы координаты с помощью уравнения

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2}\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2}}$$

Простейшие приложения векторного исчисления

1) Построение декартовой системы координат на плоскости

Это наиболее востребованная система координат на плоскости

На плоскости система координат строится так.

Задается произвольная точка O плоскости, которая объявляется началом системы координат. Задается декартов базис из двух единичных векторов i, j .

Декартова система координат на плоскости построена.

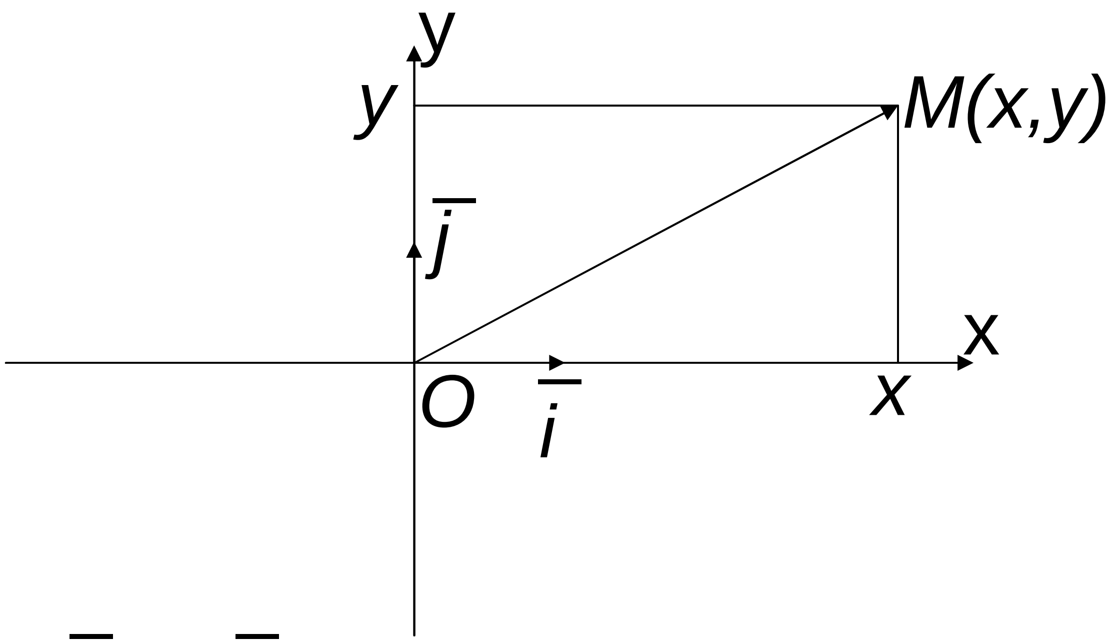
По определению, координатами произвольной точки M плоскости в данной системе координат называются координаты вектора $O\,M$ в базисе i, j .

Если имеем $\overline{OM} = x\ \bar{i} + y\ \bar{j}$, то пишем координаты точки рядом с обозначением точки: $M(x, y)$

Вектор $\overline{OM}$ называется радиусом-вектором точки M

Проведем через точку O две геометрические оси, сонаправленные с базисными векторами i и j. Эти оси называем координатными осями: ось Ox (по-другому ось абсцисс) и ось Oy (по-другому ось ординат). Плоскость с введенной на ней декартовой системой координат называем координатной плоскостью. Координатные оси Ox и Oy разбивают координатную плоскость на четыре квадранта

Декартова система координат на плоскости



$$\overline{OM} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j}; \quad M(x,\, y)$$

Декартова система координат в пространстве

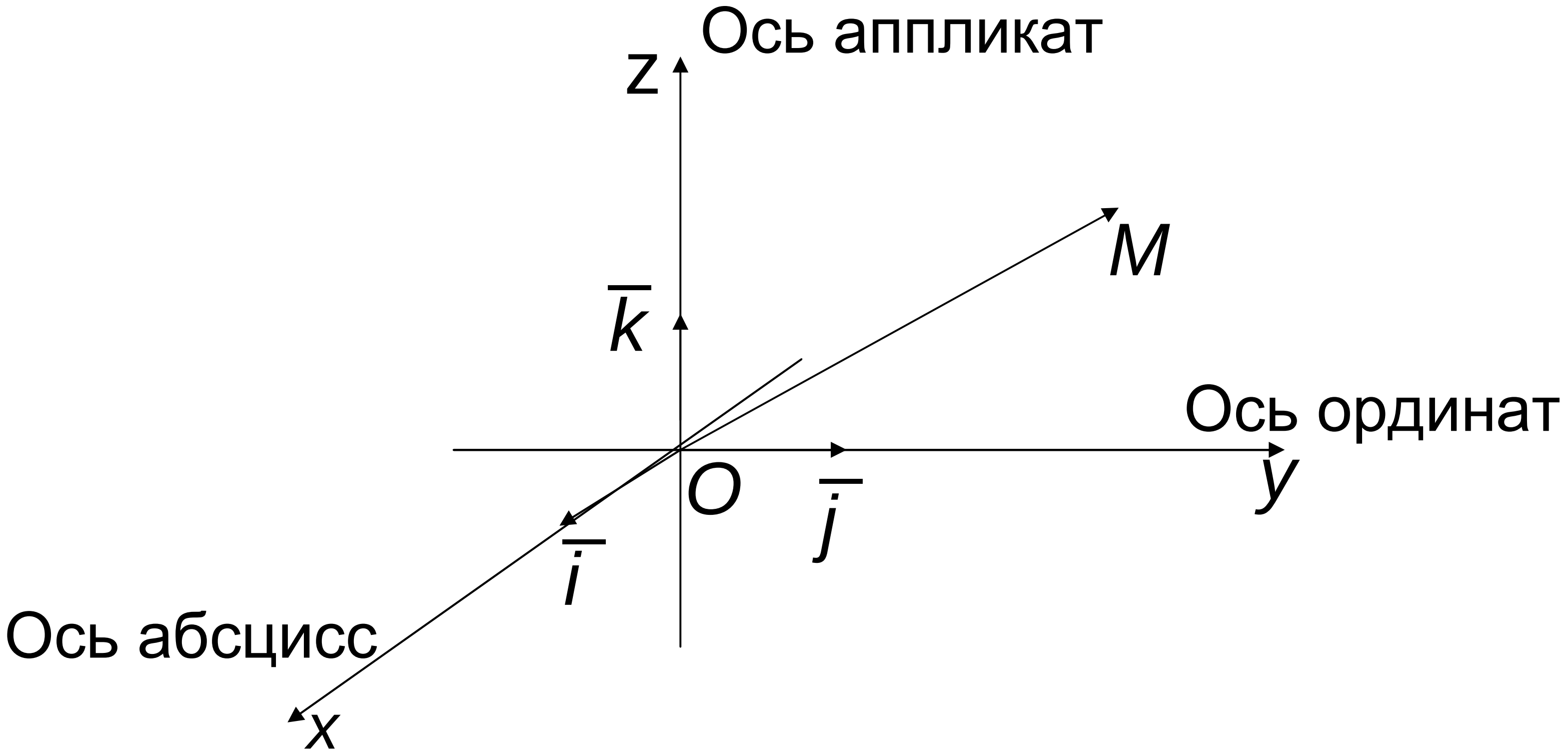
Это наиболее востребованная система координат в пространстве

В пространстве
система координат строится так. Задается произвольная точка O пространстве, которая объявляется началом системы координат. Задается декартов базис из трех единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.
Декартова система координат $Oxyz$ в пространстве построена.
По определению, координатами произвольной точки M пространства
в данной системе координат называются координаты вектора OM в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Если имеем $\overline{OM} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$, то пишем координаты точки рядом с обозначением точки:

$M(x, y, z)$

Вектор OM называется радиусом-вектором точки M



2) **Определение координат вектора через координаты его начала и конца**

Введем в пространстве декартову систему координат *Oxyz* и зададим две точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ их декартовыми координатами . Примем эти точки за начало и конец вектора *AB.* Определим декартовы координаты этого вектора *AB*. По определению, для радиусов - векторов *OA* и *OB* этих точек имеем координаты

$$\overline{OA} = (x_a, y_a, z_a), \quad \overline{OB} = (x_b, y_b, z_b)$$

Имеем векторное тождество

$$OA + AB = OB$$

Откуда получаем

$$AB = OB - OA$$

Искомые координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = (x_b, y_b, z_b) - (x_a, y_a, z_a)$$

Или

$$\overline{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

Координаты вектора равны разностям координат его начала и конца соответственно.

3) **Определение расстояния между точками**

Введем в пространстве декартову систему координат *Oxyz* и зададим две точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ их декартовыми координатами . Примем за расстояние *r* между этими точками длину отрезка *AB*, или (как теперь уже нам известно), равный этой длине модуль вектора $\overline{AB}$:

$$r = |\overline{AB}|$$

Окончательно

$$r = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

4) **Деление отрезка в данном отношении**

Введем в пространстве декартову систему координат *Oxyz* и зададим две различные точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ их декартовыми координатами . Зададим также действительное число λ (полагаем при этом λ ≠ -1).

Будем говорить, что некоторая точка $M(x, y, z)$ этого отрезка делит отрезок *AB* в заданном отношении λ, если имеет место векторное равенство

$$\overline{AM} = \lambda\, \overline{MB}$$

Это равенство позволяет однозначно найти координаты точки $M(x, y, z)$. Перепишем векторное равенство в координатном виде:

$$(x - x_a,\ y - y_a,\ z - z_a) = \lambda\,(x_b - x,\ y_b - y,\ z_b - z)$$

Имеем одно векторное уравнение для определения трех величин *x*, *y*, *z.* Это уравнение эквивалентно следующей системе трех расцепленных алгебраических уравнений :

$$x - x_a = \lambda\,(x_b - x)$$
$$y - y_a = \lambda\,(y_b - y)$$
$$z - z_a = \lambda\,(z_b - z)$$

Из этой системы получаем достаточно очевидные решения для *x*, *y*, *z*:

$$x = \frac{x_a + \lambda x_b}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_a + \lambda y_b}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_a + \lambda z_b}{1+\lambda}$$

Если $\lambda > 0$, то точка *M* находится между точками *A* и *B* и делит отрезок *AB* в отношении λ внутренним образом. При $\lambda < 0$ (но $\lambda \neq -1$) точка *M* делит отрезок *AB* в отношении λ внешним образом и лежит вне отрезка *AB*.

Отметим важный случай деления отрезка в отношении $\lambda = 1$. Искомая точка *M* является серединой отрезка *AB.* Вот ее координаты

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}, \frac{z_a + z_b}{2}\right)$$

Конец лекции

«Векторы и действия над ними»

Благодарю за внимание!
Желаю успехов в изучении и освоении курса высшей математики!
Н.А. Веклич

Задача 1.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно независимы. Будут ли линейно независимыми векторы $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$:

$$\overline{u} = \overline{a} + 2\,\overline{b} + 3\,\overline{c}$$

$$\overline{v} = 5\overline{a} - 3\,\overline{b} + 2\,\overline{c}$$

$$\overline{w} = 10\overline{a} - 5\,\overline{b} + 5\,\overline{c}$$

Задача 2.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ заданы в некотором базисе координатами:

$\overline{a} = (1,\ 3)$, $\overline{e}_1 = (0,\ -1)$, $\overline{e}_2 = (1,\ 1)$

Доказать, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ можно взять в качестве нового базиса. Разложить вектор $\overline{a}$ по базису, составленному из векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$