Задачи на прямую в пространстве и плоскость

Угол между плоскостями

- Рассмотрим плоскости, заданные уравнениями

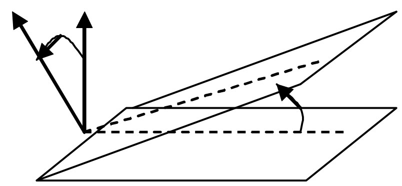
$$\Pi_1 : \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}_1 = 0$$

$$\Pi_2 : \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}_2 = 0$$

- Угол между плоскостями можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\boldsymbol{N}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_2}{\left|\vec{\boldsymbol{N}}_1\right|\left|\vec{\boldsymbol{N}}_2\right|} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2}{\sqrt{\boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{B}_1^2 + \boldsymbol{C}_1^2}\sqrt{\boldsymbol{A}_2^2 + \boldsymbol{B}_2^2 + \boldsymbol{C}_2^2}}$$



Расстояние от точки до плоскости

- Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Доказательство формулы аналогично доказательству формулы расстояния от точки до прямой.

Нормальное уравнение плоскости

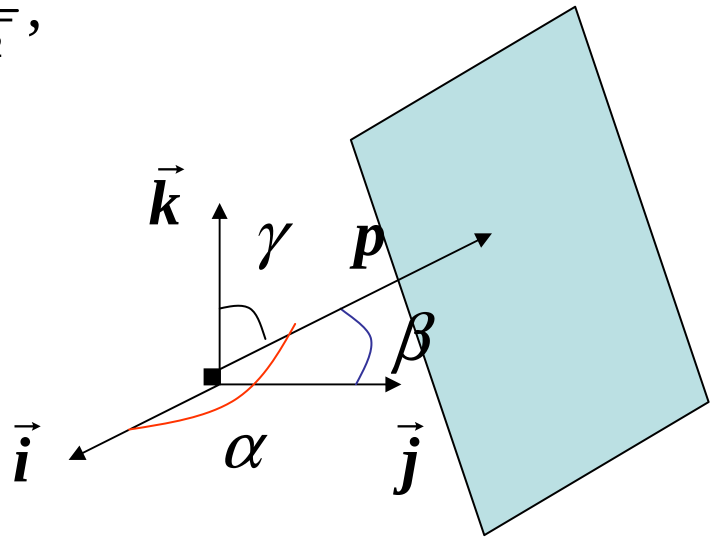
- Нормальное уравнение плоскости получается из общего уравнения умножением на нормирующий множитель

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

- и имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

$$p > 0.$$

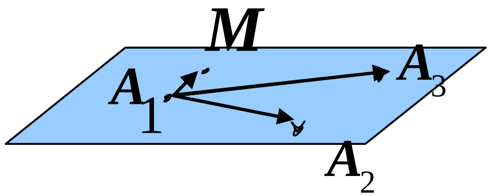


Уравнение плоскости, проходящей через три точки

- Пусть заданы три точки

$$A_1(x_1, y_1, z_1),\ A_2(x_2, y_2, z_2),\ A_3(x_3, y_3, z_3),$$

- не лежащие на одной прямой. Найдём уравнение плоскости Π, проходящей через эти точки.



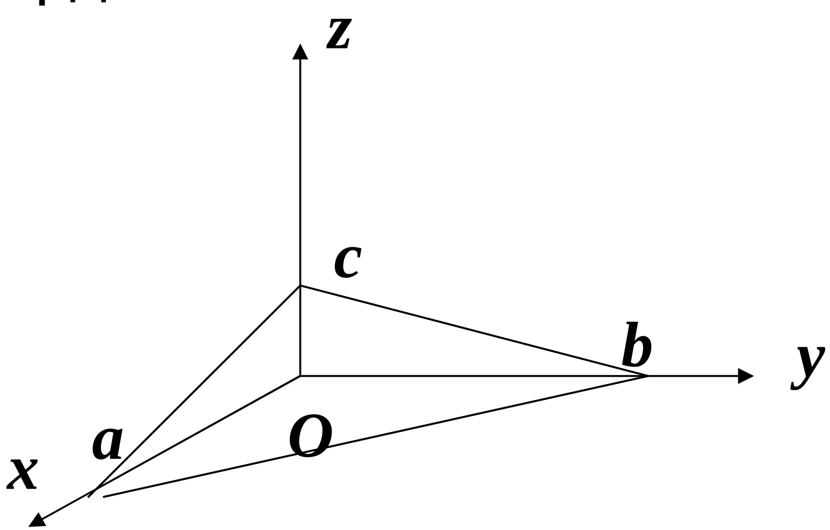
$$\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_1A_2}, \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_3}, \in \Pi \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках

- Уравнение плоскости вида $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
- называется ***уравнением в отрезках***, так как a, b, c - величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях.



Пересечение прямой и плоскости.

- Пусть прямая задана параметрическими уравнениями, а плоскость общим уравнением. Для нахождения токи пересечения прямой и плоскости надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,t \\ y = y_0 + n\,t \\ z = z_0 + p\,t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Условие параллельности прямой и плоскости

- Подставляя в уравнения плоскости уравнения прямых, получаем

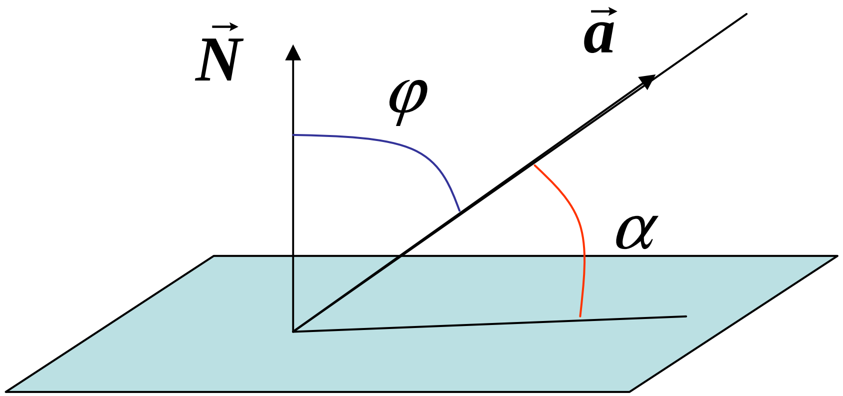
$$A(x_0 + m\,t) + B(y_0 + n\,t) + C(z_0 + p\,t) + D = 0$$

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

- Отсюда, если $Am + Bn + Cp \neq 0$
- то система имеет единственное решение, В противном случае $Am + Bn + Cp = 0$, система либо не имеет решения(прямая и плоскость параллельны), либо имеет бесконечно много решений (прямая лежит на плоскости).

Угол между прямой и плоскостью

- Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, надо найти угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости.



$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) =$$

$$= \cos\varphi = \frac{\vec{N}\cdot\vec{a}}{|\vec{N}||\vec{a}|}.$$

Канонические уравнения и проектирующие плоскости

- Задание прямой каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

- равносильно заданию прямой как линии пересечения плоскостей,

  проектирующих прямую

  на координатные плоскости.

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

Примеры

- 1. Доказать, что прямые

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}; \quad L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

- лежат на одной плоскости и написать уравнение этой плоскости.
- 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$L: \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$$

- перпендикулярно плоскости xOy .