

Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Группа АМ-12-06.

Вопросы к экзамену.

1. Векторная алгебра.

1. Определение вектора. Равенство векторов. Свободные вектора. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейная зависимость векторов. Свойства линейной зависимости. Понятие базиса. Координаты вектора. Проекция вектора на ось. Аффинные координаты точки. Аффинная система координат. Направляющие косинусы.
2. Скалярное произведение. Определение и свойства скалярного произведения. Выражение скалярного произведения в аффинных и декартовых координатах.
3. Векторное произведение. Определение и свойства векторного произведения.
4. Определение и свойства смешанного произведения.
5. Матрицы. Определение. Элементы матрицы. Главная и побочная диагонали. Сложение матриц. Умножение матрицы на число. Свойства линейных операций над матрицами. Умножение матриц. Свойства умножения. Коммутирующие матрицы.
6. Определитель матрицы. Определение. Дополнительный минор элемента матрицы и алгебраическое дополнение. Определители 2 и 3 порядка.
7. Выражение векторного и смешанного произведения через декартовы координаты векторов.
8. Двойное векторное произведение.

2. Линейные пространства.

1. Определение линейного пространства. Примеры.
2. Линейная зависимость векторов линейного пространства. Свойства линейной зависимости.
3. Базис и координаты вектора. Базисы в арифметическом n -мерном пространстве, в пространстве многочленов, в пространстве матриц.
4. Определение обратной матрицы. Способы ее вычисления.
5. Преобразования координат при преобразовании базисов.
6. Размерность линейного пространства. Бесконечномерные пространства. Примеры.

7. Изоморфизм линейных пространств.
8. Подпространства. Линейная оболочка векторов. Сумма и прямая сумма подпространств.
9. Теорема о сумме линейных подпространств. Размерность прямой суммы подпространств.
10. Определяющие свойства прямой суммы подпространств.
11. Проекция на подпространство.

4. Евклидовы пространства.

1. Скалярное произведение в линейном пространстве. Матрица Грама. Евклидово пространство. Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.
2. Ортогональные вектора. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации. Теорема Шмидта об ортогонализации.
3. Теорема о полной ортонормированной системе.
4. Ортогональные дополнения. Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
5. Изоморфизм евклидовых пространств.
6. Аффинное пространство. Аффинные координаты. Неаффинные системы координат. Полярные координаты на плоскости. Цилиндрические и сферические координаты в трехмерном пространстве

5. Аналитическая геометрия.

1. Прямая на плоскости и в пространстве. Параметрическое представление прямой. Каноническое представление прямой.
2. Прямая на плоскости. Различные уравнения прямой на плоскости (общее, в отрезках, с угловым коэффициентом). Вектор нормали к прямой, заданной общим уравнением на плоскости.
3. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Нормальное уравнение прямой.
4. Взаимное расположение прямых на плоскости.
5. Параметрическое представление плоскости в пространстве.
6. Общее уравнение плоскости в пространстве. Нормальный вектор плоскости. Векторное уравнение плоскости.
7. Нормальное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости. Его использование для исследования взаимного расположения двух точек относительно плоскости.
8. Расстояние от точки до плоскости.
9. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.
10. Представление прямой в пространстве как линии пересечения двух плоскостей.
11. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
12. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

6. Определитель и ранг матрицы. Обратная матрица.

1. Свойства определителей (разложение по первому столбцу, определитель транспонированной матрицы, антисимметрия по строкам, разложение определителя матрицы по любой строке или столбцу, изменение определителя при умножении строки или столбца на число, при сложении двух строк (столбцов), следствия из этих свойств, определитель матрицы, строка (столбец) которой является линейной комбинацией остальных строк (столбцов). Теорема об умножении на чужие алгебраические дополнения.
 2. Вычисление определителя с помощью перестановок.
 3. Теорема Лапласа (без доказательства). Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения матрицы. Применение теоремы Лапласа к вычислению определителей.
 4. Методы вычисления определителей: приведение к треугольному виду, применение рекуррентных формул, выделение линейных множителей.
 5. Определитель произведения матриц.
 6. Обратная матрица. Левая и правая обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы для невырожденной матрицы.
 7. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.
 8. Определение ранга матрицы. Базисный минор, базисные строки и столбцы.
 9. Теорема о базисном миноре. Следствия.
- Методы вычисления ранга матрицы (метод элементарных преобразований, метод окаймлений).

7. Системы линейных уравнений.

1. Определение системы линейных уравнений. Коэффициенты и свободные члены. Решение системы. Однородные, неоднородные, определенные, неопределенные, совместные, несовместные, квадратные системы.
2. Матричный вид системы уравнений.
3. Правило Крамера.
4. Решение квадратной системы с помощью обратной матрицы.
5. Теорема Кронекера-Капелли. Следствие из нее.
6. Приведенная система уравнений. Связь общего решения однородной и неоднородной систем.
7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
8. Фундаментальная система решений. Общее решение однородной системы.

Список литературы.

Основная литература.

1. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Линейная алгебра. М., Наука, 1980
2. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Аналитическая геометрия. М., Наука, 2005.
3. В.Т.Харин, Ю.И.Сухарев. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, М., ГАНГ им.Губкина, 1994.
4. И.В.Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., Наука, 1970.
5. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 2004.

Дополнительная литература.

6. И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М., Наука, 1997.
7. П.С.Александров. Курс аналитической геометрии. М., Наука, 2004.

Экзаменационный билет №0.

1. Векторное произведение. Определение и свойства.
Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1,2,3)$, $B(2,1,3)$, $C(1,-1,4)$.
2. Теорема о связи размерности линейного пространства с количеством базисных векторов.
Найти размерность и базис подпространства пространства всех многочленов степени не выше n , состоящего из многочленов, удовлетворяющих свойствам: $2p'(t)-p''(t)=0$, $p'(1)=0$.
3. Теорема Шмидта об ортогонализации.
Найти ортогональные проекцию и составляющие вектора $y(1,2,3,4)$ относительно линейной оболочки векторов $a(1,0,1,2)$, $b(1,1,3,0)$, $c(2,1,4,2)$.
4. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.
Найти расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 и уравнение общего перпендикуляра:

$$\ell_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}, \quad \ell_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-7}{4}.$$

5. Доказать теорему об умножении определителя на чужие алгебраические дополнения.

Найти определитель :

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

6. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z - t - u + v = 6 \\ 2x - 2y + v = 4 \\ 3u - 4t = 5. \end{cases}$$

методом Гаусса. Проверить совместность системы. Определить главные и свободные неизвестные, ФСР, общее решение приведенной системы, размерность пространства решений однородной системы, общее решение неоднородной системы.

В зависимости от сложности задачи оцениваются от 6 до 8 баллов. В сумме получается 40 баллов. Задачи аналогичны задачам из контрольной.

На предварительном экзамене теории не будет – только задачи такого типа, как на контрольных.

Дополнительные задачи для тех, у кого от 26 до 30 баллов.

1. Показать, что следующая система векторов образует базис в пространстве R^5 и найти координаты векторов x и y в этом базисе:

$$e_1 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 1, 1, 1), \quad e_3 = (0, 0, 1, 1, 1), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1, 1), \quad e_5 = (0, 0, 0, 0, 1), \quad x = (1, 0, 1, 0, 1), \quad y = (5, 4, 3, 2, 1).$$

2. Показать, что следующая система векторов образует базис в пространстве R^3 , найти координаты векторов x и y в этом базисе и найти матрицу перехода $T_{i,j,k \rightarrow e_1, e_2, e_3}$ к этому базису от стандартного базиса i, j, k :

$$e_1 = i + j, \quad e_2 = i - j, \quad e_3 = -i + 2j - k, \quad x = i - 2j + 2k, \quad y = i - 2j + k.$$

3. Показать, что следующая система многочленов образует базис в пространстве $P_{\leq 2}$, найти координаты многочлена x в этом базисе и найти матрицу перехода $T_{1,t,t^2 \rightarrow e_1, e_2, e_3}$ к этому базису от стандартного базиса $1, t, t^2$:

$$e_1 = t^2 + 1, \quad e_2 = -t^2 + 2t, \quad e_3 = t^2 - t, \quad x = -2t^2 + t - 1.$$

4. Доказать, что следующие множества являются (или не являются) линейными пространствами.

Для множеств, которые являются линейными пространствами, найти размерность и базис.

1. Множество X строчек $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n})$ длины $2n$, для элементов которых справедливы равенства:

$$x_2 = x_4 = \dots = x_{2n}.$$

2. Множество X строчек $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ длины $n > 7$, для элементов которых справедливы равенства:

$$x_1 + 2x_2 = x_5, \quad x_1 - 2x_4 = x_7.$$

3. Множество X строчек $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n})$ длины n с целыми элементами: $x_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

4. Множество X многочленов $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ степени не выше n , для которых справедливо равенство: $p'(1) = 0$ (производная многочлена $p(t)$ в точке $t=1$).

5. Множество X многочленов $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ степени не выше n , для которых справедливо равенство: $p(0) = 1$.

6. Множество X многочленов $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ степени не выше n , для которых справедливы равенства: $p(1) = p'(1) = 0$.

7. Множество X матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ размера 2×3 , для элементов которых справедливо равенство:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0.$$

8. Множество X матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ размера 2×3 , для элементов которых справедливы равенства:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = a_{21}.$$