Министерство образования
Российской Федерации

Российский государственный университет
нефти и газа имени И.М. Губкина

А.Н. Филиппов В.И. Иванов

Методические указания к изучению темы

«Определенный интеграл»

(для студентов всех специальностей)

Москва 2013

Определение определенного интеграла

Поставим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции $aABb$ – фигуры, ограниченной двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$ (Рис.1). Для определенности будем считать, что функция $y = f(x)$ неотрицательна. Данное предположение не является необходимым при введении понятия определенного интеграла.

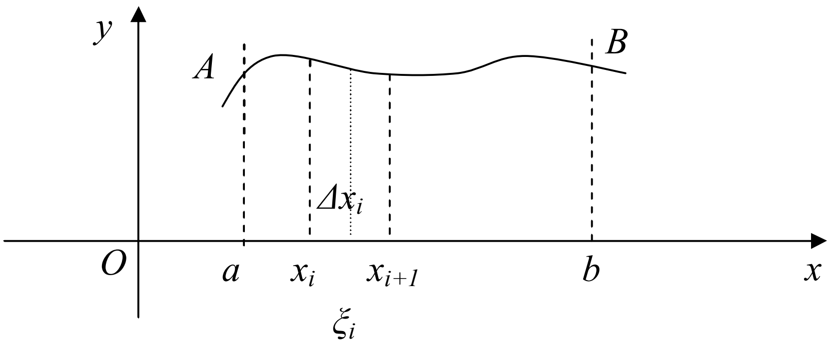


Рис. 1.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей с помощью точек $a = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_i < x_{i+1} < x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ -элементарный отрезок. Выберем на каждом элементарном отрезке Δx_i произвольную точку ξ_i. Криволинейная трапеция $aABb$ разобьется на n элементарных полос шириной Δx_i, площадь каждой приближенно равна $\Delta s_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Просуммировав по всем полоскам, получим приближенное значение площади криволинейной трапеции

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \ . \qquad (1)$$

Выражение (1) называется интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Интегральная сумма, конечно же, зависит от разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i. Введем понятие диаметра разбиения: $diam\,\Delta x = \max\limits_{i=1,\dots,n}(\Delta x_i)$.

Определение: Говорят, что функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ (или существует определенный интеграл от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$), если существует конечный предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к 0, и этот предел не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек ξ_i. Предельное значение называется определенным интегралом и обозначается:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{diam\,\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \,.$$

Здесь, как и в случае неопределенного интеграла, $\int$ - знак интеграла, *f(x)* – подынтегральная функция, *dx* - дифференциал аргумента, по которому производится интегрирование, *f(x)dx* – подынтегральное выражение, *a* и *b* – нижний и верхний пределы интегрирования. Определенный интеграл читается следующим образом: «Интеграл от a до b от функции $f(x)$ по *dx*».

Встает вопрос: «Какими свойствами должна обладать функция на отрезке $[a, b]$, чтобы существовал определенный интеграл от этой функции на данном отрезке»? Без доказательства примем следующую теорему.

Теорема: Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

В дальнейшем будем считать, что определенный интеграл существует только для непрерывной на отрезке функции. В противном случае интегралы, формально построенные по такому же признаку, будем называть по-другому, например, несобственными, - их мы изучим попозже.

Свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла.

1. Интеграл на отрезке нулевой длины равен 0.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

2. При перемене пределов интегрирования интеграл изменит знак.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

3. *Свойство аддитивности интеграла.* Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, содержащем точки *a, b, c*. Тогда верно следующее равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

5. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

6. Пусть функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда, если интеграл от этой функции на данном отрезке существует, то верно неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

7. Пусть $f(x) \geq g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда, если интегралы от этих функций на данном отрезке существуют, то верно неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $y = |f(x)|$ тоже интегрируема на отрезке $[a, b]$, и верно неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

9. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и ограничена сверху и снизу: $m \le f(x) \le M$. Тогда интеграл ограничен следующими величинами $(a \le b)$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

10. *Теорема о среднем значении интеграла.* Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и ограничена сверху и снизу: $m \le f(x) \le M$. Тогда интеграл можно представить в следующем виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \text{ причем } m \le \mu \le M.$$

μ называется средним интегральным значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

11. *Обобщенная теорема о среднем значении интеграла.* Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а функция $y = f(x)$ ограничена сверху и снизу: $m \le f(x) \le M$. Тогда интеграл от произведения данных функций можно представить в следующем виде

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \mu\cdot\int_a^b g(x)\,dx, \text{ причем } m \le \mu \le M.$$

μ называется средним интегральным значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, $y = g(x)$ - весовой функцией.

12. Переменную интегрирования под знаком интеграла можно заменить на любую другую:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(\Gamma)d\Gamma.$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда она будет интегрируема на любом отрезке, содержащемся в отрезке $[a,b]$, например, $[a,x]$. Рассмотрим определенный интеграл на этом отрезке.

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt\,.$$

Мы получаем функцию, зависящую от переменной x. Эта функция называется интегралом с переменным верхним пределом.

Свойства интеграла с переменным верхним интегралом

Рассмотрим свойства этого интеграла.

1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ непрерывна на этом же отрезке.

2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ дифференцируема на интервале (a,b), и его производная равна подынтегральной функции.

Докажем эти два свойства.

Возьмем значение переменной x, и зададим приращение Δx так, чтобы $x,\,x+\Delta x\in(a,b)$. Вычислим приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\cdot\Delta x,\text{ где } m_{\Delta x}\le\mu\le M_{\Delta x}.$$

Здесь мы воспользовались свойством определенных интегралов под № 10. $m_{\Delta x},\,M_{\Delta x}$ - наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на элементарном отрезке Δx. По определению производная функции есть предел от отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0.

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mu = f(x).$$

Последний переход верен, т.к. при $\Delta x \to 0$ наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $y = f(x)$ будут стремиться друг к другу, и совместно к значению функции в точке x.

Таким образом, мы доказали справедливость свойства № 2. Но тогда верно и первое свойство (вспомним теорему о непрерывности дифференцируемой функции, рассмотренной в разделе «Дифференциальное исчисление»).

Аналогично можно ввести интеграл с переменным нижним пределом, или же определить его с помощью интеграла с переменным верхним пределом:

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt.$$

Свойства интеграла с переменным нижним пределом идентичны свойствам интеграла с переменным верхним пределом.

Формула Ньютона - Лейбница

Из свойства интеграла с переменным верхним пределом следует, что функция $y = \Phi(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, причем является конкретной первообразной. Выразим функцию $y = \Phi(x)$ через произвольную первообразную $y = F(x)$. Зная, что любые две первообразные отличаются друг от друга только на постоянную величину, получим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Вычислим значение $\Phi(x)$ при $x = a$.

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0; \; C = -F(a).$$

Тогда при $x = b$ будем иметь

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Мы получили основную формулу для вычисления определенных интегралов – формулу ***Ньютона – Лейбница.***

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{1}^{2}\left(3x^{2}+4x-5\right)dx$.

Решение:

$$\int_{1}^{2}\left(3x^{2}+4x-5\right)dx=\left(x^{3}+2x^{2}-5x\right)\Big|_{1}^{2}=\left(2^{3}+2\cdot2^{2}-5\cdot2\right)-\left(1^{3}+2\cdot1^{2}-5\cdot1\right)=$$

$$=\left(8+8-10\right)-\left(1+2-5\right)=6+2=8.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{5}{7-3x}dx$.

Решение:

$$\int_{-1}^{1}\frac{5}{7-3x}dx=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{5}{7-3x}d\left(7-3x\right)=-\frac{5}{3}\ln\left|7-3x\right|\Big|_{-1}^{1}=-\frac{5}{3}\ln\left|7-3\right|+\frac{5}{3}\ln\left|7+3\right|=$$

$$=\frac{5}{3}\ln\frac{10}{4}=\frac{5}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

Способы вычисления определенных интегралов

Для нахождения первообразных можно использовать все способы вычисления неопределенных интегралов. Но, в некоторых случаях удобнее использовать способы, относящиеся именно к определенным интегралам.

Замена переменной в определенном интеграле

Как и в случае вычисления неопределенного интеграла в определенном интеграле можно проводить замену переменной.

Теорема: Если в интеграле $\int_{a}^{b}f(x)dx$ функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$, а функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $\left[t_1,\ t_2\right]$, где $a=\varphi(t_1);\ \ b=\varphi(t_2)$, и для любого $t\in\left[t_1;\ t_2\right]$ $\varphi(t)\in\left[a;\ b\right]$, то верна формула

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2}f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

ℰ𝒮 **Пример 3.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{5}{3+\sqrt{4x+1}}dx$.

Решение: Как мы помним, в случае неопределенного интеграла мы делаем замену корня на новую переменную. Здесь тоже проведем подобную замену.

$$\int\limits_0^2 \frac{5}{3+\sqrt{4x+1}}dx = \left| \sqrt{4x+1} = t;\ x = \frac{t^2-1}{4};\ dx = \frac{1}{2}t\cdot dt;\ \alpha = \sqrt{4\cdot 0+1} = 1;\ \beta = \sqrt{4\cdot 2+1} = 3 \right| =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_1^3 \frac{t}{3+t}dt = \frac{5}{2}\int\limits_1^3 \frac{t+3-3}{3+t}dt = \frac{5}{2}\left(\int\limits_1^3 dt - \int\limits_1^3 \frac{3}{3+t}dt\right) = \frac{5}{2}\left(t - \ln|t+3|\right)\Big|_1^3 = \frac{5}{2}\left(3-\ln 6 - 1 + \ln 4\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(2 - \ln 3/2\right)$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Формула интегрирования по частям в случае определенного интеграла следующая:

$$\boxed{\int\limits_a^b u dv = \left(u\cdot v\right)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du}$$

Здесь $u = u(x),\ v = v(x)$ - некоторые непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$. Случаи применения формулы интегрирования по частям такие же как и неопределенном интеграле.

ℰ𝒮 **Пример 4.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$.

Решение: Как и в случае неопределенного интеграла, подобные примеры решаются с помощью интегрирования по частям.

$$\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx = \left| u = \arcsin x;\ du = \left(\arcsin x\right)'\cdot dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dv = dx;\ v = x \right| =$$

$$= \left(x\cdot\arcsin x\right)\Big|_0^{1/2} - \int\limits_0^{1/2} \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(x\cdot\arcsin x\right)\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{1/2} \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left(x\cdot\arcsin x\right)\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{1/2} \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = \left(x\cdot\arcsin x\right)\Big|_0^{1/2} + \left(\ \right)\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - 0\arcsin 0 + \sqrt{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{\pi}{12} + \sqrt{3}/2 - 1.$$

Несобственные интегралы

Как говорилось выше, подынтегральная функция в определенном интеграле должна быть непрерывной, а отрезок интегрирования конечным. Возникают задачи, где при формальном их решении получаются интегралы, подобные определенным, но нарушаются условия непрерывности функций и конечности отрезков интегрирования. В этих случаях рассматриваются новые понятия – несобственные интегралы.

Несобственный интеграл I рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;+\infty)$. На любом отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ будет непрерывной, следовательно, интегрируемой. Формально составим интеграл на интервале $[a;+\infty)$:

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Определение. Говорят, что несобственный интеграл I рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ существует (или сходится), если существует следующий конечный предел: $\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx$. В противном случае (т.е., если предел не существует или равен бесконечности), интеграл не существует или расходится.

Аналогично можно составить интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx$.

Если оба предела интегрирования бесконечны, то числовую ось с помощью любой точки разбиваем на два полубесконечных интервала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Такой несобственный интеграл будет сходиться, если каждый из двух интегралов сходится.

Свойства несобственного интеграла.

Теорема 1. Пусть функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывны на интервале $[a;\ +\infty)$ и $0\le f(x)\le g(x)$ всюду на $[a;\ +\infty)$. Тогда:

а) если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем

$$0\le \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx;$$

б) если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Другими словами данную теорему можно интерпретировать так: если интеграл от большей функции сходится, то интеграл от меньшей функции тем более сходится, если же интеграл от меньшей функции расходится, то интеграл от большей функции тоже расходится.

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале $[a;\ +\infty)$, тогда если несобственный интеграл от модуля функции на данном интервале $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл от самой функции $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, и говорят, что сходится абсолютно, причем, верно неравенство

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

℘ **Пример 5.** Исследовать несобственный интеграл на сходимость, если сходится вычислить значение:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$$

Решение: Данный интеграл является несобственным из-за того, что предел интегрирования является бесконечным. Заменим этот предел интегрирования на параметр, и устремим его к первоначальному пределу интегрирования.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^c =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(e^{-c^2} - e^0\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

✍ **Пример 6.** Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx,\ a > 0.$$

Решение: Как и в предыдущем примере перейдем к пределу.

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c\frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to+\infty}\begin{cases}\ln|x|\Big|_a^c, \text{ при } p = 1;\\ \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^c, \text{ при } p \neq 1.\end{cases} =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\begin{cases}\ln|c| - \ln|a|, \text{ при } p = 1;\\ \dfrac{c^{-p+1}}{-p+1} - \dfrac{a^{-p+1}}{-p+1}, \text{ при } p < 1;\\ \dfrac{1}{(-p+1)c^{p-1}} - \dfrac{1}{(-p+1)a^{p-1}}, \text{ при } p > 1.\end{cases} = \begin{cases}+\infty, \text{ при } p \le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, \text{ при } p > 1.\end{cases}$$

Таким образом, получаем, что при всех $a > 0$ интеграл расходится при $p \le 1$, и сходится при $p > 1$.

Данный интеграл является эталонным при исследовании на сходимость сложных несобственных интегралов I рода.

✍ **Пример 7.** Исследовать несобственный интеграл на сходимость $\int_7^{+\infty}\frac{1}{\ln x}dx$.

Решение: Первообразная от такой функции в элементарных функциях не находится (этот интеграл один из известных так называемых «неберущихся» интегралов). Но во многих случаях достаточно выяснить сходится или нет данный несобственный интеграл, если сходится, то в каких пределах находится его значение. Известно, что логарифмическая функция вдали от начала отсчета растет медленнее своего аргумента. Поэтому мы можем предположить, что наш интеграл расходится. Подберем такую функцию, которая будет меньше, чем рассматриваемая функция, а интеграл от нее расходится.

$$\ln x < x \text{ на} [7; +\infty) \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$$

Но интеграл $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ расходится, т.к. относится к случаю $p=1$ предыдущего примера. Следовательно, по свойствам несобственных интегралов исходный интеграл тоже расходится.

Несобственный интеграл II рода

Перейдем к случаю, когда функция $f(x)$ терпит разрыв в какой либо точке отрезка $[a, b]$, а в остальных точках – непрерывна. Рассмотрим случай, когда точка $x=b$ является точкой разрыва (как говорят, точка разрыва вынесена на границу интервала интегрирования). Такой интеграл не является определенным в том понимании, в котором мы определили ранее (функция не является непрерывной на отрезке интегрирования), хотя интеграл будет записываться в точности как обычный определенный интеграл. Поэтому необходимо быть внимательными при решении подобных примеров.

Определение. Говорят, что несобственный интеграл II рода $\int_a^r f(x)dx$ (где точка $x=r$ является точкой разрыва) существует (или сходится), если существует следующий конечный предел $\lim\limits_{c \to r-} \int_a^c f(x)dx = \int_a^r f(x)dx$. В противном случае (т.е., если предел не существует или равен бесконечности), интеграл не существует или расходится.

Аналогично можно составить интеграл $\int_r^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to r+} \int_c^b f(x)dx$. Если точка разрыва $x=r$ является внутренней точкой отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл разбиваем на два несобственных, вынося точку разрыва на границу интервала интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx.$$

Такой несобственный интеграл будет сходиться, если каждый из двух интегралов сходится.

Свойства несобственного интеграла.

Свойства несобственного интеграла II рода аналогичны свойствам интеграла I рода. Приведем их.

Теорема 1. Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны на интервале $[a;\ r)$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ всюду на $[a;\ r)$. Тогда:

а) если $\int_a^r g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^r f(x)dx$, причем

$$0 \le \int_a^r f(x)dx \le \int_a^r g(x)dx;$$

б) если $\int_a^r f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^r g(x)dx$.

Другими словами данную теорему можно интерпретировать так: если интеграл от большей функции сходится, то интеграл от меньшей функции тем более сходится, если же интеграл от меньшей функции расходится, то интеграл от большей функции тоже расходится.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $[a;\ r)$, тогда если несобственный интеграл от модуля функции на данном интервале $\int_a^r |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл от самой функции $\int_a^r f(x)dx$, и говорят, что сходится абсолютно, причем верно неравенство

$$\left|\int_a^r f(x)dx\right| \le \int_a^r |f(x)|\,dx.$$

Пример 8. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}dx,\ b>0.$$

Решение: Перейдем к пределу.

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to 0+}\begin{cases} \ln|x|\Big|_c^b, \text{ при } p=1; \\ \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_c^b, \text{ при } p\neq 1. \end{cases} =$$

$$= \lim_{c\to 0+}\begin{cases} \ln|b|-\ln|c|, \text{ при } p=1; \\ \dfrac{b^{-p+1}}{-p+1}-\dfrac{c^{-p+1}}{-p+1}, \text{ при } p<1; \\ \dfrac{1}{(-p+1)b^{p-1}}-\dfrac{1}{(-p+1)c^{p-1}}, \text{ при } p>1. \end{cases} = \begin{cases} +\infty, \text{ при } p\geq 1 \\ \dfrac{b^{1-p}}{(1-p)}, \text{ при } p<1. \end{cases}$$

Получаем, что интеграл расходится при $p\geq 1$, и сходится при $p<1$.

Данный интеграл также является эталонным при исследовании на сходимость сложных несобственных интегралов II рода.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$.

Решение: Данный интеграл является несобственным, т.к. в точке $x=1$ терпит разрыв (функция не существует). Поэтому интеграл является несобственным интегралом II рода и требует разбиения на два интеграла.

$$\int_0^4 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx + \int_1^4 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx.$$

Рассмотрим первый интеграл.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = \left|\sqrt{x}-1=t;\ x=(t+1)^2;\ dx=2(t+1)\cdot dt;\ t_1=-1;\ t_2=0\right| = -2\int_{-1}^0 \frac{t+1}{t}dx =$$

$$= -2\lim_{c\to 0-}\int_{-1}^c \frac{t+1}{t}dx = -2\lim_{c\to 0-}\left(t+\ln|t|\right)\Big|_{-1}^c = -2\lim_{c\to 0-}\left(c+\ln|c|-0-\ln 1\right)=+\infty.$$

Первый интеграл расходится, следовательно, исходный тоже расходится.

Оценка значений определенного интеграла

Среднее интегральное значение функции.

Средним интегральным значением непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число $f_{cp} = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$

ഈ **Пример 10.** Определить среднее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;1]$

Решение: $f_{cp} = \dfrac{1}{1-0}\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}dx = \dfrac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1 = \dfrac{3}{4}$.

Оценка интеграла.

На практике часто бывает так, что невозможно вычислить точное значение интеграла. Но, возможно, достаточно знать численные величины, между которыми находится значение интеграла. Для этого можно воспользоваться вышеперечисленными свойствами определенного интеграла (свойства №№ 8-11), позволяющими оценить значения интеграла: $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$,

где m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а M – наибольшее её значение на этом отрезке; $(b-a)$ - длина отрезка.

ഈ **Пример 11.** Оценить интеграл $\int\limits_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$, не вычисляя его.

Решение: Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x) = \sqrt{3+x^3}$ на отрезке $[1;\, 3]$. Вычислим её производную, получим, что $f'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{3+x^2}} > 0$ на $[1;\, 3]$.

Из неравенства следует, что сама функция на данном отрезке монотонно возрастает. Следовательно, свои наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка $[1;\ 3]$, т.е. $m = f(1) = \sqrt{4} = 2$; $M = f(3) = \sqrt{30}$

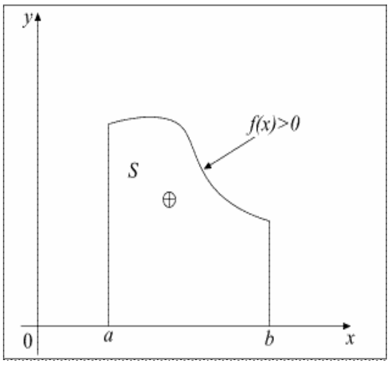
Поэтому, $4 \le \int\limits_1^3 \sqrt{3+x^3} \le 2\sqrt{30}$.

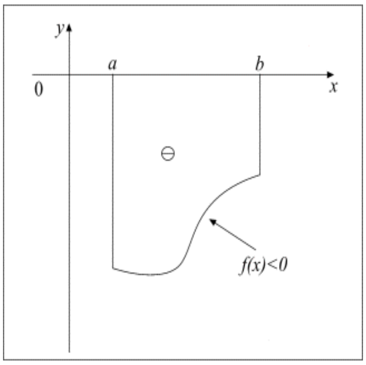
Геометрические приложения определенного интеграла

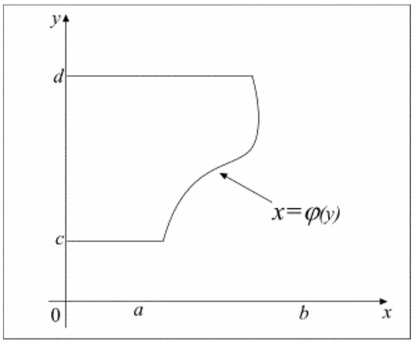
Вычисление площадей в декартовой системе координат

Площадь криволинейной трапеции

Если заданная непрерывная функция *f(x)* знакопостоянна, *f(x) ≥0* или *f(x)≤0* на некотором отрезке *[a, b]*, то за основную фигуру, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейная трапеция с основанием *[a, b]* на оси ОХ или с основанием *[c, d]* на оси ОУ.







$$S=\int_a^b f(x)dx,\ \ f(x)\geq 0.$$

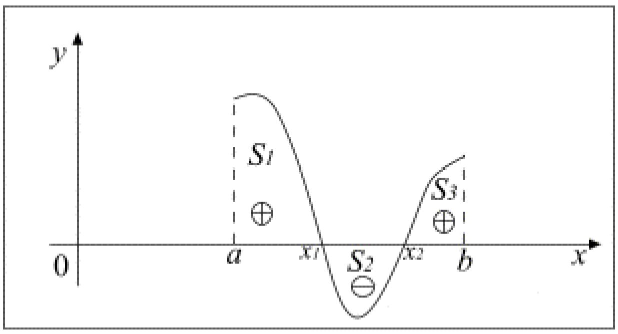
Если *f(x)≤0,* то

$$S=\int_c^d xdy=\int_c^d \varphi(y)dy$$

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx$$

Если заданная непрерывная функция знакопеременна на отрезке интегрирования *[a, b]*, становясь поочередно то положительной, то отрицательной, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^b f(x)dx.$$

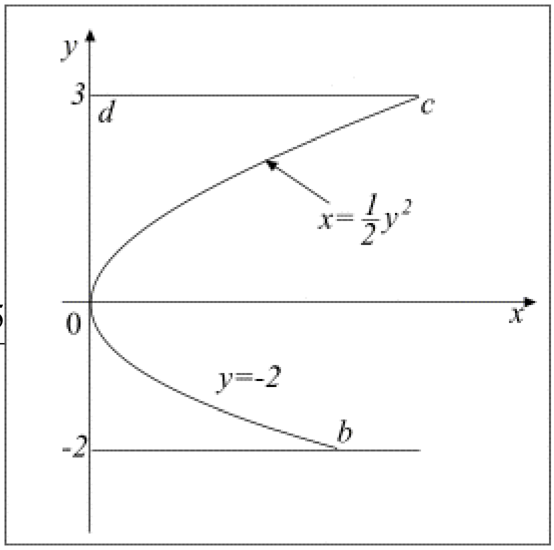


Но $\int_a^{x_1} f(x)dx=S_1$, где S_1 -площадь криволинейной трапеции с основанием *[a,x₁]*; $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=-S_2$, где S_2 - площадь криволинейной трапеции с основанием $[x_1,x_2]$ под осью ОХ, которая будет отрицательной; аналогично $S_3=\int_{x_2}^b f(x)dx.$

Рассуждения справедливы и в том случае, когда точек пересечения графика с осью ОХ будет любое конечное число, большее двух. Поэтому $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$. Таким образом, интеграл по всему отрезку дает алгебраическую разность площадей фигур, расположенных выше и ниже оси ОХ.

Чтобы вычислить площадь всей геометрической фигуры, представленной на рисунке (на отрезке *[a, b]*), нужно вычислить модуль интеграла по отрезку *[x_1, x_2]*, т. е. $\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx = |-S_2| = S_2$ и $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx + \int_{x_2}^b f(x)dx$.

Пример 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: прямыми *y=-2, y=3*, параболой $x=\frac{1}{2}y^2$ и осью ординат.

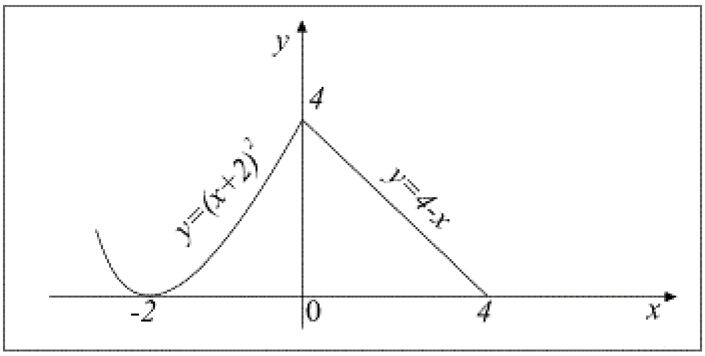


Решение:

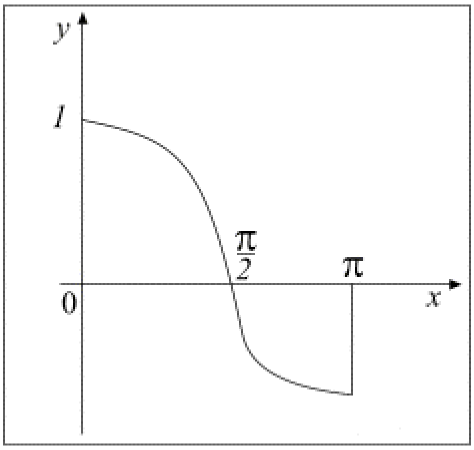
$$S = \int_{-2}^{3} \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{2} * \frac{y^3}{3} \Bigg|_{y=-2}^{y=3} = \frac{1}{6}(27-(-8)) = \frac{35}{6}$$

Пример 13. Вычислить площадь, ограниченную осью ОХ и линиями *$y=(x+2)^2$, y=4-x*.

Решение: Сначала построим фигуру, ограниченную параболой и прямой. Из графика ясно, что построенная на отрезке *[-2, 0]* фигура, (криволинейная трапеция) ограничена одной кривой, на отрезке *[0, 4]* – другой, т. е. мы получили другую криволинейную трапецию и поэтому $S = \int_{-2}^{0} (x+2)^2 dx + \int_0^4 (4-x)dx = 10\frac{2}{3}$.



✄ **Пример 14.** Вычислить площадь, ограниченную косинусоидой $f(x)=\mathbf{cos}x$ на отрезке $[0, \pi]$



Решение: Рассмотрим знак функции $\mathbf{cos}x$ на всем отрезке $[0, \pi]$. На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\mathbf{cos}x\geq 0$, а на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ - $\mathbf{cos}x\leq 0$. Учитывая это, имеем:

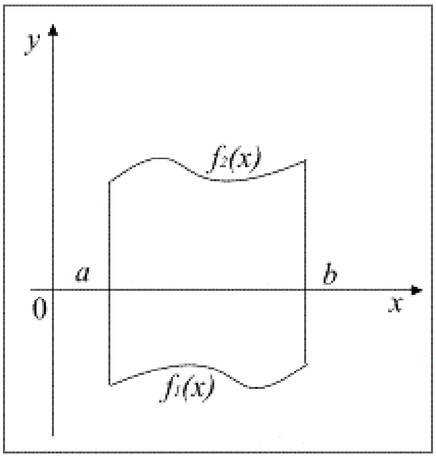
$$S=\int_0^{\pi}\cos xdx=\int_0^{\pi/2}\cos xdx+\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\cos xdx\right|=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+\left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right|=\sin\frac{\pi}{2}+\left|-\sin\frac{\pi}{2}\right|=2.$$

Заметим, что при этом интеграл $\int_0^{\pi}\cos xdx=\int_0^{\pi/2}\cos xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}\cos xdx=0$.

Площадь фигуры, ограниченной двумя различными кривыми

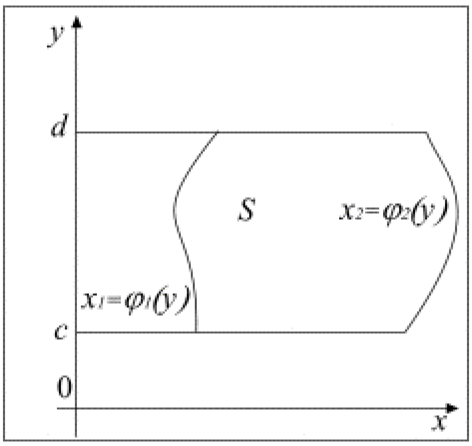
Предположим что на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывные функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$. Пусть также при всех x из этого отрезка выполняется неравенство $f_1(x)\leq f_2(x)$. Площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми $x=a$ и $x=b$ определяется по формуле

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$



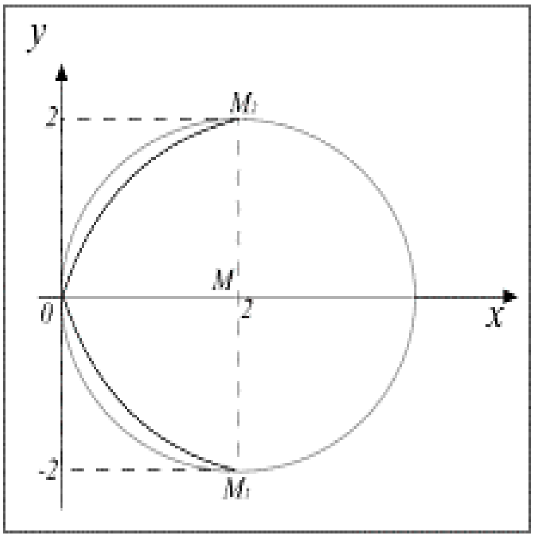
Если же две непрерывные функции относительно y на отрезке $[c, d]$ при всех y из этого отрезка удовлетворяют неравенству $\varphi_1(y)\leq\varphi_2(y)$, то площадь фигуры, ограниченной функциями $x_1=\varphi_1(y)$ и $x_2=\varphi_2(y)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$ вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d\left[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\right]dy.$$



♏ **Пример 15.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$ и окружностью $y^2=4x-x^2$

Решение: Сначала схематически изобразим эту площадь. Из рисунка видим, что заданные кривые ограничивают две различающиеся плоские фигуры (меньшую и большую). Каждая из этих фигур, в свою очередь, состоит из двух симметричных относительно оси ОХ частей. Поэтому достаточно вычислить площадь верхней части каждой фигуры и затем умножить ее на два. Найдем сначала площадь меньшей фигуры. Преобразуем уравнение окружности и определим координаты ее центра и величину радиуса.



$y^2 = 4x - x^2 = -x^2 + 4x = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = -\left[(x-2)^2 - 4\right] = -(x-2)^2 + 4$;

$y^2 = -(x-2)^2 + 4$; $(x-2)^2 + y^2 = 4$

Следовательно, центр окружности находится в точке $M(2, 0)$, а ее радиус $R=2$. Найдем точки M_1 и M_2 пересечения обеих линий, решая систему двух уравнений $\begin{cases} y^2 = 4x - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases}$. $4x-x^2=2x$; $x^2-2x=0$; $x(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$, $y_1=0$, $y_2=\pm 2$.

$O(0, 0)$; $M_2(2, 2)$; $M_1(2, -2)$.

Найдем уравнение границы OM_2 (части окружности) $|y_2| = \sqrt{4x - x^2}$. Из условия на ординаты точек границы $y_2 \geq 0$ имеем $y_2 = \sqrt{4x - x^2}$; по этой же причине уравнение нижней части границы $y_1 = \sqrt{2x}$, на отрезке [0, 2].

Площадь будет равна

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x})dx = 2\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx - 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}dx.$$

Но $S_{OMM_1} = \int_0^2 \sqrt{4x - x^2}dx$ - это площадь четверти окружности. Площадь всей окружности равна $\pi R^2=4\pi$. Второй интеграл легко вычисляется $\int_0^2 \sqrt{x}dx=\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Теперь найдем искомую площадь

$$S=2\left(\pi-\sqrt{2}\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=2\left(\pi-\frac{8}{3}\right).$$

Теперь, чтобы найти площадь большей фигуры, необходимо из площади круга вычесть площадь меньшей фигуры:

$$S_1=4\pi-2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)=2\left(\pi+\frac{8}{3}\right).$$

Проверим значение первого интеграла.

$\int_0^2 \sqrt{4x-x^2}dx=\int_0^2 \sqrt{(-1)(x^2-4x)}dx=\int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}dx$. Обозначим $x-2=2\mathbf{sin}t;$ $dx=2\mathbf{cos}tdt,$ тогда $\sqrt{4-(x-2)^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2|\cos t|$; при x=2, t=0; при x=0, t= - $\frac{\pi}{2}$ (четвертая четверть). Поэтому

$$\int_0^2 \sqrt{4-(x-2)^2}dx=-4\int_0^{-\pi/2}\cos^2 tdt=-4\int_0^{-\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=-2\int_0^{-\pi/2}dt-2\int_0^{-\pi/2}\cos 2tdt=$$

$$-2\left(t\Big|_0^{-\pi/2}+\sin 2t\Big|_0^{-\pi/2}\right)=-2(-\frac{\pi}{2}-\sin\pi)=\pi.$$

.

ꝏ **Пример 16.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=-2y^2$ и $x=1-3y^2\geq-2y^2$

Решение: Второе уравнение запишем так $x-1=-3y^2$, отсюда следует, что $x-1\leq0$ и $x\leq1;$ это означает, что вся фигура (парабола) $x=1-3y^2$ расположена левее точки $x=1;$ она симметрична относительно оси OX, так как при замене y на $(-y)$ уравнение не изменяется. Ветви параболы направлены влево; ее вершина находится в точке (1, 0). Определим точки ее пересечения с осью OY $(x=0);$ $3y^2=1,$

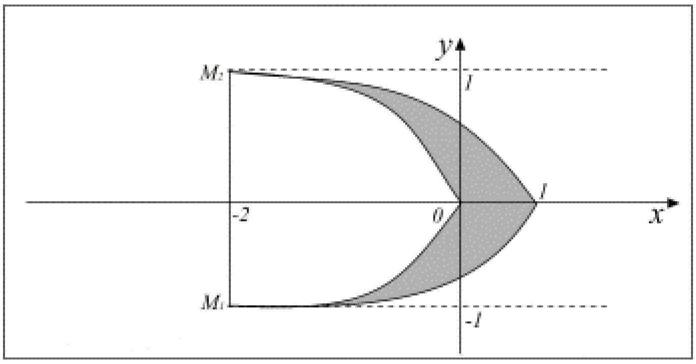
$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ветви второй параболы направлены также влево, а ее вершина совпадает с началом координат.

Определим точки пересечения этих кривых из решения системы

$$\begin{cases} x = -2y^2 \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y^2 = 1 - 3y^2; \\ y^2 = 1;\ y_1 = 1;\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Одна точка пересечения M_1(-2, -1), вторая – M_2(-2, 1).

Изобразим эту фигуру на чертеже.



Здесь проще вычислить площадь по следующей формуле.

$$S = \int_{-1}^{1} \left[(1 - 3y^2) - (-2y^2) \right] dy = \int_{-1}^{1} (1 - 3y^2 + 2y^2) dy = \int_{-1}^{1} (1 - y^2) dy = (y - \frac{y^3}{3}) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде

Если кривая $y = f(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta \end{cases},$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрерывные функции параметра t; α и β - известные числа; или их легко найти после построения фигуры.

Площадь фигуры $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$ или $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (y'_t \cdot x - x'_t \cdot y)dt$

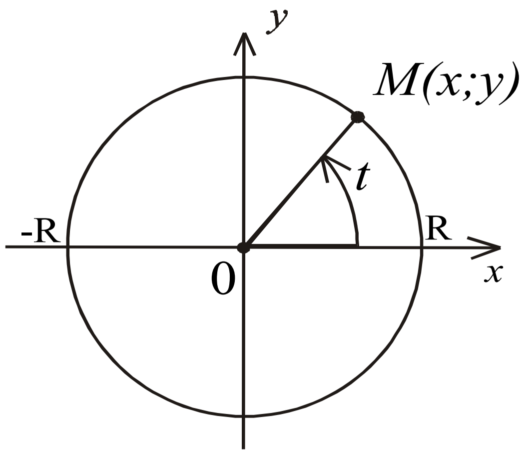
Применение последней формулы часто приводит к более простым выкладкам.

℘ **Пример 17.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = R\cos t \\ y = \psi(t) = R\sin t \end{cases}$$

Решение: Выясним, что эта за линия, определив отношения $(x/R)=\cos t, (y/R)=\sin t$. Возводя их обе части в квадрат и складывая, получим

$x^2+y^2=R^2$



Таким образом, данные параметрические уравнения определяют окружность с центром в начале координат радиусом R; параметр t - угол текущей точки окружности, отсчитываемый от оси OX. Из чертежа видно, что когда, x возрастая, изменяется от значения $x=-R$ до $x=R$, точка M пробегает всю верхнюю часть окружности и параметр t изменяется от значения $t=\pi$ до $t=0$.

Поэтому $S=2\int_{\pi}^{0} R\sin t(-R\sin t)dt=-2R^2\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt=$

$$=2R^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=R^2\int_0^{\pi}dt-2\frac{R^2}{4}\int_0^{\pi}\cos 2t d(2t)=\pi R^2$$

Пример 18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

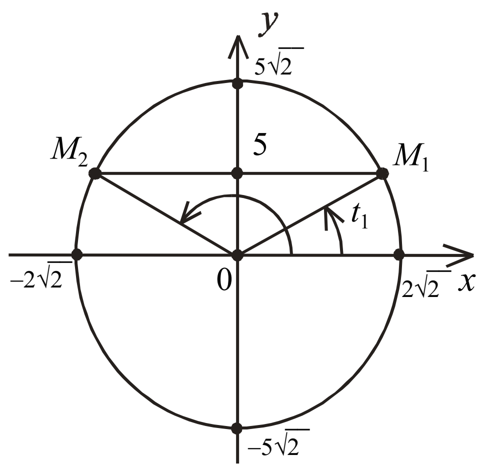
$$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \quad y=5 \ (y\geq 5)$$

Решение: Определим вид линии: $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{5\sqrt{2}}\right)^2=1;\ \frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(5\sqrt{2}\right)^2}=1$

Это эллипс, вытянутый вдоль оси OY. От начала координат вдоль оси OX отложим отрезки $2\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{2}$, а вдоль оси OY $5\sqrt{2}$ и $-5\sqrt{2}$. Получим прямоугольник размером $2\sqrt{2}\,\mathrm{x}\,5\sqrt{2}$, внутри которого расположим эллипс. Проводя прямую $y=5$, отсекаем от него часть, расположенную выше этой прямой:

$$\begin{cases} y=5 \\ y=5\sqrt{2}\sin t \end{cases} \Rightarrow \sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}, t_1=\frac{\pi}{4} \text{ и, в силу симметрии, } t_2=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, рассуждая по аналогии с предыдущим примером, имеем $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}; \beta = \dfrac{\pi}{4}$.



Ординаты точек отсеченной части эллипса определяются уравнением

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y + 5 = 5\sqrt{2}\sin t \Rightarrow y = 5\sqrt{2}\sin t - 5 \end{cases},$$

которое подставляется в формулу для вычисления площади.

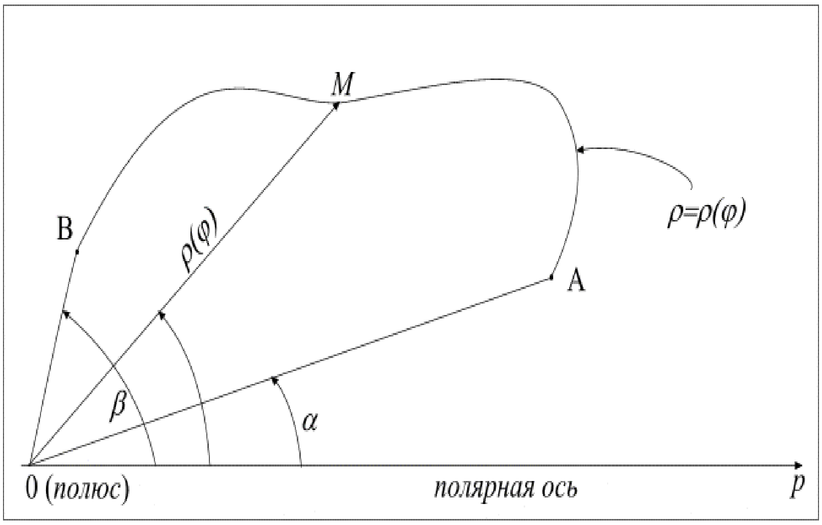
$$S = -\int_{3\pi/4}^{\pi/4} (5\sqrt{2}\sin t - 5)2\sqrt{2}\sin t dt = \int_{3\pi/4}^{\pi/4}\left(20\sin^2 t - 10\sqrt{2}\sin t\right)dt = -20\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2t}{2}dt -$$

$$-10\sqrt{2}\cos t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} = -20\cdot\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} - 10\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}) =$$

$$= -10(-\frac{\pi}{2} - 1) - 20 = 5(\pi + 2) - 20 = 5(\pi - 10).$$

Вычисление площадей в полярной системе координат

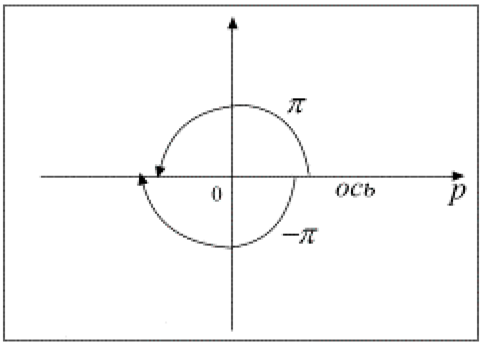
В качестве основной фигуры в полярной системе координат, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейный сектор (см. рисунок). Этот сектор ограничен полярными радиусами ***OB*** ($\varphi = \beta$) и ***OA*** *($\varphi = \alpha$)* точек ***B*** и ***A***, а также участком ***AMB*** самой кривой, уравнение которой в полярной системе координат записывается как $r = r(\varphi)$.



Площадь криволинейного сектора находится по формуле $S = \dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

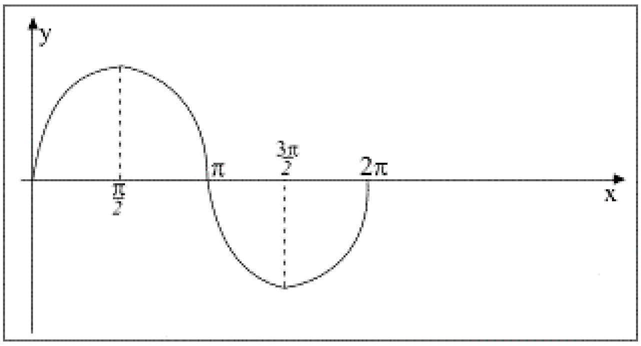
℘ **Пример 19.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \sin 2\varphi$

Решение: Сначала построим эту фигуру в полярной системе координат, задавая значения аргумента φ полярного угла из интервала $-\pi < \varphi \le \pi$, учитывая только те из них, которые дают положительные или равные нулю значения полярного радиуса *r*. Эти значения φ находятся из тригонометрического неравенства $\sin 2\varphi \ge 0\ (\rho \ge 0)$. Таким образом, вычисляя



значения φ из системы неравенств $\begin{cases} \sin 2\varphi \ge 0 & (4) \\ -\pi < \varphi \le \pi & (5) \end{cases}$, установим и пределы интегрирования по переменной φ.

Решим неравенство (4), используя график функции $y=$**sin**x на одном периоде $T=2\pi$.



Из графика ясно, что если $0 \le 2\varphi \le \pi$ (т.е. $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ - первая четверть полярной системы координат), то первая полуволна синусоиды опирается только на неотрицательные ординаты; в силу периодичности функции все такие полуволны определяются из неравенства

$$0 + 2k\pi \le 2\varphi \le \pi + 2k\pi, \quad \pi k \le \varphi \le \frac{\pi}{2} + \pi k\,,\ k \in Z. \qquad (*)$$

Если же $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (вторая четверть), то получаем противоречие неравенству (4) системы.

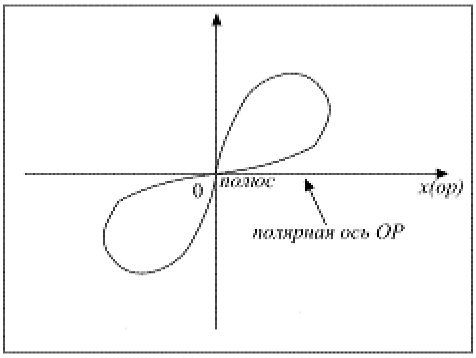
Вторая полуволна получится из общего неравенства (*) при k=1 ($\pi < \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ - третья четверть). При этом получаем противоречие уже неравенству (5) системы. Поэтому другие положительные значения полярного угла рассматривать нет смысла. Остается проверить отрицательные значения, например, k=-1. Тогда, $-\pi \le \varphi \le \frac{\pi}{2} - \pi, \quad и \quad -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}.$ Эти значения φ дадут положительные значения полярного радиуса тоже в третьей четверти, что не противоречит неравенству (5). Отсюда ясно, что другие отрицательные значения k<-1 ничего нового не дадут, так как выведут значения φ за пределы, ограниченные неравенствами (4) и (5).

Итак, точки нашей кривой в полярной системе координат будут располагаться только в углах, ограниченных неравенствами: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$. Поэтому для построения «по точкам» кривой при составлении числовой таблицы переменных координат r и φ, значения φ надо брать из последних неравенств. Так как функция $\mathbf{sin}2\varphi$ нечетная, достаточно построить ветвь кривой в 1-ой четверти значений φ из неравенства $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

φ	0	π/6	π/4	π/3	π/2
$\mathbf{2}\varphi$	0	π/3	π/2	2π/3	π
r	0	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0

Из полюса проводим четыре луча под углами 30°, 45°, 60° и 90° по отношению к полярной оси и в выбранном масштабе откладываем значения r из таблицы.

Полученные точки соединяем плавной кривой. Вторую ветвь кривой строим путем отражения относительно полюса в силу симметрии. Тогда площадь фигуры в соответствии с формулой (3) равна:



$$S = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)d(4\varphi) =$$

$$= \frac{1}{8}(4\varphi - \sin 4\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}(2\pi - \sin 2\pi) = \frac{\pi}{4} \ \text{\textit{кв.ед.}}$$

Отметим, что после такого исследования пределы интегрирования α *и* β в данном примере определяются безо всяких трудностей.

Таким образом, для вычисления площади в полярной системе координат рекомендуется поступать так:

1. Составить систему неравенств типа (4) и (5), решить первое неравенство, используя чертежи.
2. Выяснить, в каких четвертях по углу φ, расположена искомая кривая, и построить ее по точкам, используя, где возможно, свойства симметрии. Если окажется, что форма кривой не совсем ясно проявилась или она искажена, то количество точек расчета нужно увеличить и повторить построение, строго соблюдая выбранный масштаб и процесс построения (откладывания) полярных углов φ и полярных радиусов r.
3. Убедиться, что построенная фигура представляет собой криволинейный сектор, и определить пределы интегрирования $\alpha \, и \, \beta$. Затем вычислить площадь фигуры по формуле (3). Если же построенная фигура не оказалась криволинейным сектором, то нужно с помощью полярных радиусов разбить ее на части, каждая из которых уже будет криволинейным сектором, выбрать для каждого сектора пределы интегрирования и вычислить их площадь, суммируя результаты вычислений.

Вычисление длин дуг плоских кривых

Длина дуги в декартовой системе координат

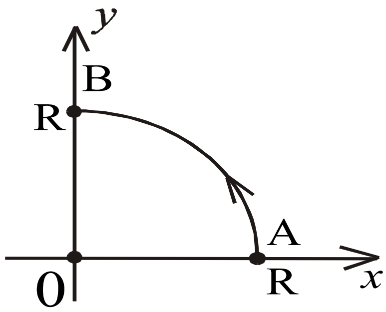
Если уравнение кривой задано в виде функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, и она имеет непрерывную производную на $(a;b)$, то длина дуги этой кривой, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Если же кривая определяется уравнением $x=\varphi(y)$ на отрезке $[c;d]$ относительно оси OY, и функция $\varphi(y)$ имеет непрерывную производную в промежутке $(c;d)$, то $\ell=\int\limits_c^d\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy=\int\limits_c^d\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$

Пример 20. Вычислить длину дуги окружности $x^2+y^2=R^2$; R – радиус окружности.

Решение: Вычислим производную от выражения $x^2-y^2-R^2=0$, как от неявной функции $2x+2y\cdot y'_x=0$.

$$y'_x=-\frac{x}{y};\ (y'_x)^2=\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2}{R^2-x^2};\ 1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2};$$



По формуле (8) вычислим длину дуги AB – четверти окружности.

$$\frac{\ell}{4}=\int\limits_0^R\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int\limits_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=\frac{\pi R}{2}$$

$\ell=2\pi R$. Отметим, что если бы мы нашли $y^2=R^2-x^2$ и затем $|y|=\sqrt{R^2-x^2}$ и вычислили производную y'_x, то затратили больше усилий даже в этой простой задаче.

Пример 21. Вычислить длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ заключенную между точками с координатами $y=1$ и $y=2$.

Решение: В этой задаче чертеж делать необязательно и за независимую переменную удобнее выбрать y, тогда

$$x'_y=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y};\quad \sqrt{1+(x'_y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}=$$

$= \sqrt{1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2} = \left|\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right|$, но по условию $y>0$,

$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}>0$, $\left|\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right| = \left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)$, поэтому $\sqrt{1+(x_y')^2} = \frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}$.

Итак: $\ell = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

Длина дуги кривой, заданной в параметрическом виде

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $(y=\psi(t))$ и $(x=\varphi(t))$; причем производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1;\ t_2]$, то длина дуги вычисляется по формуле

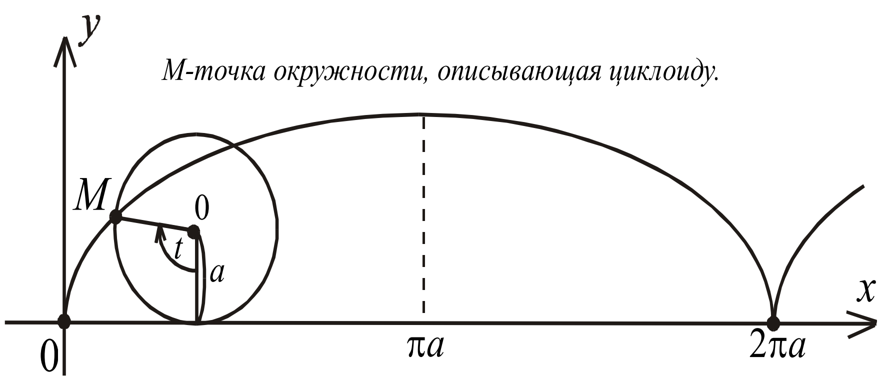
$$\ell = \int\limits_{t_2}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (10)$$

Здесь $t_1,\ t_2$ - значения параметра t, соответствующие концам рассматриваемой дуги, так, что $t_1<t_2$.

℘ **Пример 22.** Вычислить длину дуги одной арки циклоиды.

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Решение: Пусть в начальном положении круг радиуса $R=a$ касается оси OX в начале координат так, что его диаметр и центр совпадают с осью OY. Из этого положения он начинает катиться без проскальзывания по неподвижной прямой – оси OX. Совершив при таком движении полный оборот вокруг своей оси (центра), точка M опишет некоторую кривую, которая и называется аркой циклоиды. Тогда x пробегает отрезок $2\pi a$ равный всей длине



окружности, так как за один оборот точка М вернется на ось ОХ. При дальнейшем движении круга получится вся циклоида.

Величина центрального угла t между диаметрами ОМ изменится от значения $t=0$ (когда эти диаметры совпадали) до значения $t=2\pi$ (точка М окружности совершила полный оборот). Длина одной арки циклоиды находится при этом следующим образом.

Вычислим: $x'_t = a(1-\cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2}$, $y'_t = a\sin t = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$;

$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$. Но, так как, $\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, $0 < t < 2\pi$, а функция $\sin\frac{t}{2}$ в 1-ой и 2-ой четвертях неотрицательна, т.е. $\sin\frac{t}{2} \geq 0$ и, следовательно, $\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$. При этом

$$\ell = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

Длина дуги кривой в полярной системе координат

В случае задания линии уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат (рисунок на странице 13), длина участка ***AMB*** кривой, ограниченного полярными радиусами ***OB*** ($\varphi=\beta$) и ***OA*** ($\varphi=\alpha$) точек ***B*** и ***A*** находится по формуле:

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

✍ **Пример 23.** Вычислить длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$.

Решение: Построим кривую, как показано на рисунке. Поскольку она симметрична относительно полярной оси, то можно найти лишь длину верхней половины кривой от точки, лежащей на луче $\varphi = 0$ до точки на луче $\varphi = \pi$ и затем удвоить результат. Так как $r' = -a\sin\varphi$ и $0 \leq \varphi \leq \pi$, то

$$\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}=\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}=$$
$$=a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}==a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, длина кардиоиды равна $\ell=2\int\limits_0^{\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$

Вычисление объемов тел вращения

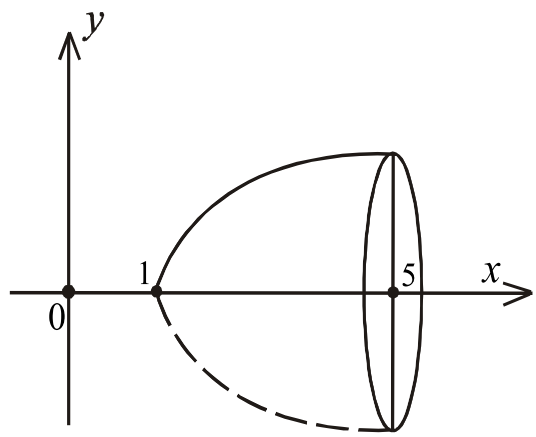
Объем тела вращения находится по формулам:

$$V_x=\pi\int\limits_a^b y^2dx=\pi\int\limits_a^b(\phi(x))^2dx,$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OX и

$$V_y=\pi\int\limits_c^d x^2(y)dy=\pi\int\limits_c^d\varphi^2(y)dy,$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OY.



Пример 24. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=\phi(x)=\sqrt{x-1},x=5;y=0$.

Решение: Построим сначала фигуру, исходя из условия задачи. Из чертежа ясно, что это криволинейный треугольник, поэтому

$$V_x=\pi\int\limits_1^5 y^2dx=\pi\int\limits_1^5(x-1)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^5=\pi\left(\frac{25}{2}-5\right)-\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)=8\pi.$$

Механические приложения определенного интеграла

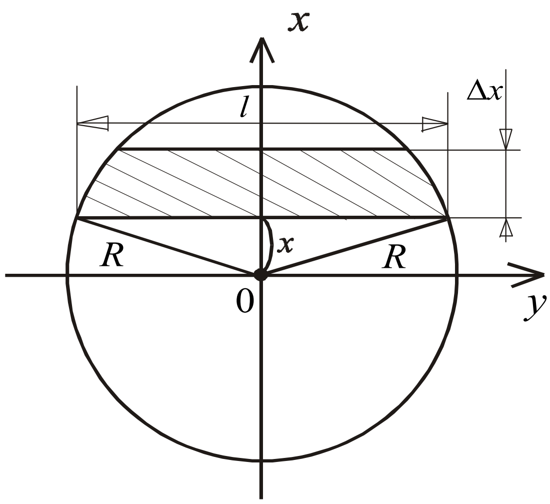
Пример 25. Скорость движения точки $v=0,5t^3$. Найти средняя скорость и путь s, пройденный точкой за время $t=8$ сек после начала движения.

Решение: Так как $\frac{ds}{dt}=v(t)$ или $\frac{ds}{dt}=0,5t^3\Rightarrow ds=0,5t^3dt$ причем $0\le t\le 8$.

Поэтому $s=\int\limits_0^8 0{,}5\cdot t^3\cdot dt = 0{,}5\cdot\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^8 = 512\text{м};\quad v_{ср}=\frac{s}{t}=\frac{512}{8}=64\,\text{м}/\text{с}$.

Пример 26. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, может закрываться заслонкой. Определить давление, испытываемое этой заслонкой, если её диаметр D=60 см, а центр находится на глубине 15 м под водой.

Решение: Заслонка представляет собой круг. Введем систему координат, начало которой совпадает с центром круга, а ось x направлена вертикально вверх. На уровне x выберем горизонтальную элементарную полоску высотой Δx, обозначим её длину буквой ℓ. Тогда площадь этой полоски равна $\Delta s=\ell\cdot\Delta x$, считая приближенно полоску прямоугольной. Это предположение тем точнее, чем меньше высота полоски Δx. По теореме Пифагора получим: $x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=R^2$. Следовательно,



длина хорды, отстоящей на расстоянии x от центра круга равна: $\ell=2\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{30^2-x^2}$. Площадь элементарной полоски равна $\Delta s=2\sqrt{30^2-x^2}\cdot\Delta x$. Элементарная полоска находится на глубине $(1500-x)$ ($x>0$ для верхней части круга, $x<0$ для нижней части круга). Давление воды на глубине $h=(1500-x)$ равно $p(x)=\rho gh=\rho g\left(1500-x\right)$. Сила давления на элементарную полоску равна $\Delta F=p(x)\cdot\Delta s=\rho g\cdot(1500-x)\cdot 2\sqrt{30^2-x^2}\cdot\Delta x$.

Сила давления на весь круг равна

$$F=\int\limits_{Круг} dF=\rho g\int\limits_{-30}^{+30}(1500-x)\cdot 2\sqrt{30^2-x^2}dx=$$

$$=1350000\pi\rho g\approx 4{,}16\cdot 10^{12}\,\frac{г\cdot см}{сек^2}=4{,}16\cdot 10^{12}\,\text{дин}=4{,}16\cdot 10^{7}\,\text{н}.$$