# Глава VII

# КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

1°. Непосредственное вычисление двойных интегралов. *Двойным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую область $S$ плоскости $XOY$, называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы

$$\int\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ \max\Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_k, \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и сумма распространена на те значения $i$ и $k$, для которых точки $(x_i, y_k)$ принадлежат области $S$.

2°. Расстановка пределов интегрирования в двойном интеграле. Различают два основных вида области интегрирования.

1) Область интегрирования $S$ (рис. 85) ограничена слева и справа прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, а снизу и сверху — непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ $(AB)$ и $y = \varphi_2(x)$ $(CD)$ $[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$, каждая из которых пересекается с вертикалью $x = X$ $(x_1 < X < x_2)$ только в одной точке (см. рис. 85). В области $S$ переменная $x$ меняется от $x_1$ до $x_2$, а переменная $y$ при постоянном $x$ меняется от $y_1 = \varphi_1(x)$ до $y_2 = \varphi_2(x)$. Вычисление интеграла (1) может быть произведено путем сведения к повторному интегралу по формуле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

где при вычислении $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ величину $x$ полагают постоянной.

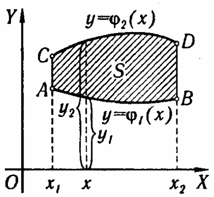


Рис. 85.

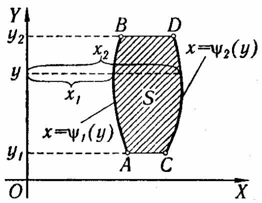


Рис. 86.



2) Область интегрирования $S$ снизу ограничена прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$ $(y_2 > y_1)$, а слева и справа — непрерывными кривыми $x = \psi_1(y)$ $(AB)$ и $x = \psi_2(y)$ $(CD)$ $[\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)]$, каждая из которых пересекается с горизонталью $y = Y$ $(y_1 < Y < y_2)$ только в одной точке (рис. 86).

Аналогично предыдущему имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

где при вычислении интеграла $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$ величина $y$ считается постоянной.

Если область интегрирования не принадлежит ни к одному из разобранных выше видов, то ее стараются разбить на части, каждая из которых относится к одному из этих двух видов.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x + y)\,dy.$$

Решение.

$$I = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1} dx = \int\limits_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Определить пределы интегрирования интеграла

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

если область интегрирования $S$ (рис. 87) ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и двумя прямыми $x = 2$ и $x = -2$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

Решение. Область интегрирования $ABCD$ (рис. 87) ограничена прямыми $x = -2$ и $x = 2$ и двумя ветвями гиперболы:

$$y = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{1 + x^2},$$

т. е. принадлежит к первому виду. Имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy.$$

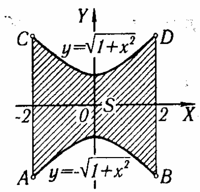


Рис. 87.

Вычислить следующие повторные интегралы:

**2113.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)\,dx.$

**2114.** $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x + y)^2}.$

**2115.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dy}{1 + y^2}.$

**2116.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}.$

**2117.** $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\,dx.$

**2118.** $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr.$

**2119.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2 \varphi\,dr.$

**2120.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy.$

Написать уравнения линий, ограничивающих области, на которые распространены нижеследующие двойные интегралы, и вычертить эти области:

**2121.** $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\,dx.$

**2122.** $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x, y)\,dx.$

**2123.** $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{y}^{10-y} f(x, y)\,dx.$

**2124.** $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)\,dy.$

**2125.** $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\,dy.$

**2126.** $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x, y)\,dy.$

Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

для указанных областей $S$.

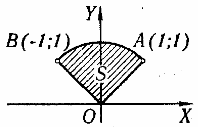

Рис. 88.

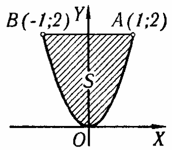

Рис. 89.

**2127.** $S$ — прямоугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

**2128.** $S$ — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$.

**2129.** $S$ — трапеция с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2,\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

**2130.** $S$ — параллелограмм с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$, $C(2;\ 7)$, $D(1;\ 5)$.

**2131.** $S$ — круговой сектор $OAB$ с центром в точке $O(0;\ 0)$, у которого концы дуги $A(1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1)$ (рис. 88).

**2132.** $S$ — прямой параболический сегмент $AOB$, ограниченный параболой $BOA$ и отрезком прямой $BA$, соединяющим точки $B(-1;\ 2)$ и $A(1;\ 2)$ (рис. 89).



**2133.** $S$ — круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $r = 1$ и $R = 2$, с общим центром $O(0;\ 0)$.

**2134.** $S$ ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

**2135.** Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

если область $S$ определяется неравенствами:

а) $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x + y \leqslant 1$; г) $y \geqslant x$; $x \geqslant -1$; $y \leqslant 1$;

б) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$; д) $y \leqslant x \leqslant y + 2a$;

в) $x^2 + y^2 \leqslant x$; $0 \leqslant y \leqslant a$.

Переменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

**2136.** $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y)\,dy.$

**2137.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x, y)\,dy.$

**2138.** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy.$

**2139.** $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dy.$

**2140.** $\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\,dy.$

**2141.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$

**2142.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\,dx.$

**2143.** $\int\limits_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\,dy.$

**2144.** $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x, y)\,dy.$

Вычислить следующие двойные интегралы:

**2145.** $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$, где $S$ — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$ и $B(0;\ 1)$.

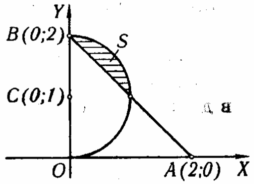


Рис. 90.

**2146.** $\iint\limits_{(S)} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где область интегрирования $S$ ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;\,0)$, $B(0;\,2)$, и дугой окружности с центром в точке $C(0;\,1)$, радиус 1 (рис. 90).

**2147.** $\iint\limits_{(S)} \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где $S$ — часть круга радиуса $a$ с центром в точке $O(0;\,0)$, лежащая в первой четверти.

**2148.** $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $S$ — треугольник с вершинами $O(0;\,0)$, $A(1;\,-1)$ и $B(1;\,1)$.

**2149.** $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $S$ — треугольник с вершинами $O(0;\,0)$, $A(10;\,1)$ и $B(1;\,1)$.

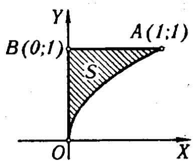


Рис. 91.

**2150.** $\iint\limits_{(S)} e^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $S$ — криволинейный треугольник $OAB$, ограниченный параболой $y^2=x$ и прямыми $x=0$, $y=1$ (рис. 91).

**2151.** $\iint\limits_{(S)} \dfrac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, где $S$ — параболический сегмент, ограниченный параболой $y=\dfrac{x^2}{2}$ и прямой $y=x$.

**2152.** Вычислить интегралы и вычертить области, на которые они распространены:

а) $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\,\mathrm{d}y$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{\cos x}^{1} y^4\,\mathrm{d}y$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y\,\mathrm{d}x$.



При решении задач №№ 2153—2157 рекомендуется предварительно делать чертеж.

**2153.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

если $S$ есть область, ограниченная параболой $y^2=2px$ и прямой $x=p$.

**2154*.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

распространенный на область $S$, ограниченную осью $OX$ и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$.

**2155.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}},$$

где $S$ — круг радиуса $a$, касающийся осей координат и лежащий в первом квадранте.

**2156*.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где область $S$ ограничена осью абсцисс и аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=R(t-\sin t), \\ y=R(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi). \end{cases}$$

**2157.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

в котором область интегрирования $S$ ограничена осями координат и дугой астроиды

$$x=R\cos^3 t,\quad y=R\sin^3 t\quad \left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

**2158.** Найти среднее значение функции $f(x,\,y)=xy^2$ в области $S\,\{0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

Указание. Средним значением функции $f(x,\,y)$ в области $S$ называется число

$$\bar f=\frac{1}{\text{пл. } S}\iint\limits_{(S)} f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

**2159.** Найти среднее значение квадрата расстояния точки $M(x,\,y)$ круга $(x-a)^2+y^2\leqslant R^2$ от начала координат.

## § 2. Замена переменных в двойном интеграле

1°. Двойной интеграл в полярных координатах. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат $x$, $y$ к полярным $r$, $\varphi$, связанным с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

имеет место формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{1}$$

Если область интегрирования $S$ ограничена лучами $r = \alpha$ и $r = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ — однозначные функции на отрезке $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi, r)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr,$$

где $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. При вычислении интеграла $\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr$ величину $\varphi$ полагают постоянной.

Если область интегрирования не принадлежит к рассмотренному виду, то ее разбивают на части, каждая из которых является областью данного вида.

2°. Двойной интеграл в криволинейных координатах. В более общем случае, если $f(x, y)$ непрерывна, и в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

требуется от переменных $x$, $y$ перейти к переменным $u$, $v$, связанным с $x$, $y$ непрерывными и дифференцируемыми соотношениями

$$x = \varphi(u, v), \; y = \psi(u, v),$$

устанавливающими взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области $S$ плоскости $XOY$ и точками некоторой области $S'$ плоскости $UO'V$, при этом *якобиан*

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в области $S$, то справедлива формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S')} f\,[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|I|\,du\,dv.$$



Пределы нового интеграла определяются по общим правилам на основании вида области $S'$.

Пример 1. Перейдя к полярным координатам, вычислить

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где область $S$ — круг радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 92).

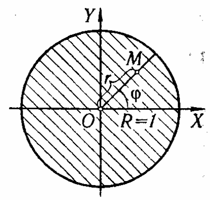

Рис. 92.

Решение. Полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{1 - r^2}.$$

Так как в области $S$ координата $r$ при любом $\varphi$ изменяется от 0 до 1, а $\varphi$ изменяется от 0 до $2\pi$, то

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\,dr = \frac{2}{3}\pi.$$

Перейти к полярным координатам $r$, $\varphi$ и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

**2160.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy.$

**2161.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dy.$

**2162.** $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$, где $S$ — треугольник, ограниченный прямыми $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

**2163.** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right)dy.$

**2164.** $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$, где область $S$ ограничена лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

**2165.** Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

где $S$ — полукруг диаметра $a$ с центром в точке $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ (рис. 93).

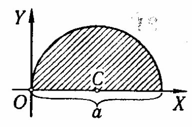

Рис. 93.

**2166.** Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

распространенный на область, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

**2167.** Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где область интегрирования $S$ — полукруг радиуса $a$ с центром в начале координат, лежащий выше оси $OX$.

**2168.** Вычислить двойной интеграл от функции $f(r, \varphi) = r$ по области, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$ и окружностью $r = a$. (Имеется в виду область, не содержащая полюса.)

**2169.** Переходя к полярным координатам, вычислить

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy.$$

**2170.** Переходя к полярным координатам, вычислить

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где область $S$ ограничена лепестком лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

**2171*.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

распространенный на область $S$, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, переходя к *обобщенным полярным координатам* $r$ и $\varphi$ по формулам

$$\frac{x}{a} = r\cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = r\sin\varphi.$$

**2172**.** Преобразовать

$$\int\limits_0^c dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy$$

$(0 < \alpha < \beta$ и $c > 0)$, введя новые переменные $u = x + y$, $uv = y$.



**2173*.** Выполнить замену переменных $u = x + y$, $v = x - y$ в интеграле

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy.$$

**2174**.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} dx\,dy,$$

где $S$ — область, ограниченная кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

Указание. Произвести замену переменных

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

## § 3. Вычисление площадей фигур

1°. Площадь в прямоугольных координатах. *Площадь плоской области $S$* равна

$$\text{пл. } S = \iint\limits_{(S)} dx\,dy.$$

Если область $S$ определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, то

$$\text{пл. } S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2°. Площадь в полярных координатах. Если область $S$ в полярных координатах $r$ и $\varphi$ определена неравенствами $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $f(\varphi) \leqslant r \leqslant F(\varphi)$, то

$$\text{пл. } S = \iint\limits_{(S)} r\,d\varphi\,dr = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} r\,dr.$$

**2175.** Построить области, площади которых выражаются интегралами:

а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy$; б) $\displaystyle\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx$.

Вычислить эти площади и изменить порядок интегрирования.

**2176.** Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$\text{а)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{0}^{3\sec\varphi} r\,dr; \qquad \text{б)} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$$

Вычислить эти площади.

**2177.** Вычислить площадь, ограниченную прямыми $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$ $(a > 0)$.

**2178.** Вычислить площадь, лежащую над осью $OX$ и ограниченную этой осью, параболой $y^2 = 4ax$ и прямой $x + y = 3a$.

**2179*.** Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

**2180.** Найти площадь, ограниченную параболами

$$y^2 = 10x + 25 \quad \text{и} \quad y^2 = -6x + 9.$$

**2181.** Переходя к полярным координатам, найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

**2182.** Найти площадь, ограниченную прямой $r\cos\varphi = 1$ и окружностью $r = 2$. (Имеется в виду площадь, не содержащая полюса.)

**2183.** Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = a(1 + \cos\varphi) \quad \text{и} \quad r = a\cos\varphi \quad (a > 0).$$

**2184.** Найти площадь, ограниченную линией

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

**2185*.** Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100.$$

**2186.** Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами парабол $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ $(0 < a < b,$ $0 < \alpha < \beta)$.

Указание. Ввести новые переменные $u$ и $v$, полагая

$$x^2 = uy, \quad y^2 = vx.$$

**2187.** Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами кривых $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,$ $0 < \alpha < \beta)$.

Указание. Ввести новые переменные $u$ и $v$, полагая

$$xy = u, \quad y^2 = vx.$$



## § 4. Вычисление объемов тел

*Объем V цилиндроида*, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости $XOY$ область $S$ (рис. 94), равен

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

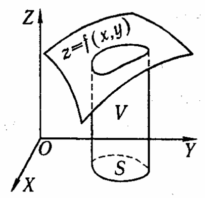


Рис. 94.

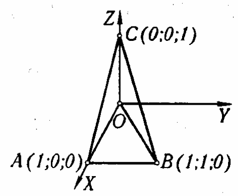


Рис. 95.

**2188.** Выразить при помощи двойного интеграла объем пирамиды с вершинами $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$ (рис. 95). Расставить пределы интегрирования.

В задачах №№ 2189—2192 нарисовать тела, объемы которых выражаются данными двойными интегралами:

$$\textbf{2189.} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy. \qquad \textbf{2191.} \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\,dy.$$

$$\textbf{2190.} \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4 - x - y)\,dy. \qquad \textbf{2192.} \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4 - x - y)\,dy.$$

**2193.** Нарисовать тело, объем которого выражается интегралом $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy$, и из геометрических соображений найти значение этого интеграла.

**2194.** Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями.

**2195.** Тело ограничено гиперболическим параболоидом $z = x^2 - y^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Вычислить его объем.

**2196.** Тело ограничено цилиндром $x^2 + z^2 = a^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $y = x$. Вычислить его объем.

**2176.** Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$\text{а)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{0}^{3\sec\varphi} r\,dr; \qquad \text{б)} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$$

Вычислить эти площади.

**2177.** Вычислить площадь, ограниченную прямыми $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$ $(a > 0)$.

**2178.** Вычислить площадь, лежащую над осью $OX$ и ограниченную этой осью, параболой $y^2 = 4ax$ и прямой $x + y = 3a$.

**2179*.** Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

**2180.** Найти площадь, ограниченную параболами

$$y^2 = 10x + 25 \quad \text{и} \quad y^2 = -6x + 9.$$

**2181.** Переходя к полярным координатам, найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

**2182.** Найти площадь, ограниченную прямой $r\cos\varphi = 1$ и окружностью $r = 2$. (Имеется в виду площадь, не содержащая полюса.)

**2183.** Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = a(1 + \cos\varphi) \quad \text{и} \quad r = a\cos\varphi \quad (a > 0).$$

**2184.** Найти площадь, ограниченную линией

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

**2185*.** Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100.$$

**2186.** Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами парабол $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ $(0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta)$.

У к а з а н и е. Ввести новые переменные $u$ и $v$, полагая

$$x^2 = uy, \quad y^2 = vx.$$

**2187.** Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами кривых $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta)$.

У к а з а н и е. Ввести новые переменные $u$ и $v$, полагая

$$xy = u, \quad y^2 = vx.$$



## § 4. Вычисление объемов тел

*Объем V цилиндроида*, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости $XOY$ область $S$ (рис. 94), равен

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

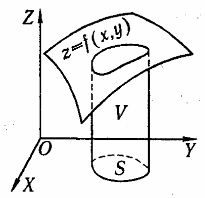


Рис. 94.

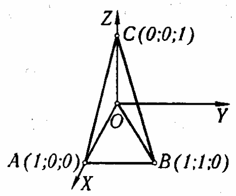


Рис. 95.

**2188.** Выразить при помощи двойного интеграла объем пирамиды с вершинами $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$ (рис. 95). Расставить пределы интегрирования.

В задачах №№ 2189—2192 нарисовать тела, объемы которых выражаются данными двойными интегралами:

**2189.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy.$ **2191.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\,dy.$

**2190.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4 - x - y)\,dy.$ **2192.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4 - x - y)\,dy.$

**2193.** Нарисовать тело, объем которого выражается интегралом $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy$, и из геометрических соображений найти значение этого интеграла.

**2194.** Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями.

**2195.** Тело ограничено гиперболическим параболоидом $z = x^2 - y^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Вычислить его объем.

**2196.** Тело ограничено цилиндром $x^2 + z^2 = a^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $y = x$. Вычислить его объем.

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

**2197.** $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

**2198.** $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

**2199.** $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

**2200.** $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.

**2201.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.

**2202.** $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$.

В задачах №№ 2203—2211 использовать полярные и обобщенные полярные координаты.

**2203.** Найти весь объем, заключенный между цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$ и гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

**2204.** Найти весь объем, заключенный между конусом $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ и гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

**2205.** Найти объем, ограниченный поверхностями $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

**2206.** Определить объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**2207.** Найти объем тела, ограниченного параболоидом $2az = x^2 + y^2$ и шаром $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. (Подразумевается объем, лежащий внутри параболоида.)

**2208.** Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $XOY$, цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

**2209.** Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $XOY$, поверхностью $z = ae^{-(x^2+y^2)}$ и цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

**2210.** Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $XOY$, параболоидом $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ и цилиндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$.

**2211.** В каком отношении гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

**2212*.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.



## § 5. Вычисление площадей поверхностей

*Площадь* $\sigma$ гладкой однозначной поверхности $z = f(x, y)$, имеющей своей проекцией на плоскость $XOY$ область $S$, равна

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

**2213.** Найти площадь части плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, заключенной между координатными плоскостями.

**2214.** Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \geqslant 0)$, содержащейся между плоскостями $z = mx$ и $z = nx$ $(m > n > 0)$.

**2215*.** Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2 - y^2 = z^2$, расположенной в первом октанте и ограниченную плоскостью $y + z = a$.

**2216.** Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной из него сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**2217.** Вычислить площадь части поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**2218.** Вычислить площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2ax$, содержащейся между цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$.

**2219.** Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, содержащейся между плоскостью $XOY$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

**2220.** 1*. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2 - y^2 = z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

2*. Найти площадь части цилиндра $y^2 = 4x$, вырезанной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.

3*. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

**2221*.** Доказать, что площади частей поверхностей параболоидов $x^2 + y^2 = 2az$ и $x^2 - y^2 = 2az$, вырезаемых цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, равновелики.

**2222*.** Шар радиуса $a$ прорезан двумя круглыми цилиндрами, диаметры оснований которых равны радиусу шара и которые касаются друг друга вдоль одного из диаметров шара. Найти объем и площадь поверхности оставшейся части шара.

**2223*.** В шаре радиуса $a$ вырезан просвет с квадратным основанием, сторона которого также равна $a$. Ось просвета совпадает с диа-

метром шара. Найти площадь поверхности шара, вырезанной просветом.

**2224*.** Вычислить площадь части винтовой поверхности $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, лежащей в первом октанте и заключенной между цилиндрами $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = b^2$.

## § 6. Приложения двойного интеграла к механике

1°. Масса и статические моменты пластинки. Если $S$ — область плоскости $XOY$, занятая пластинкой, и $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки в точке $(x, y)$, то масса $M$ пластинки и ее статические моменты $M_X$ и $M_Y$ относительно осей $OX$ и $OY$ выражаются двойными интегралами

$$M = \iint_{(S)} \rho(x, y)\, dx\, dy,$$

$$M_X = \iint_{(S)} y\, \rho(x, y)\, dx\, dy, \quad M_Y = \iint_{(S)} x \rho(x, y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Если пластинка однородна, то $\rho(x, y) = \text{const}$.

2°. Координаты центра тяжести пластинки. Если $C(\bar{x}, \bar{y})$ — центр тяжести пластинки, то

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

где $M$ — масса пластинки, $M_X$, $M_Y$ — ее статические моменты относительно осей координат (см. 1°). Если пластинка однородна, то в формулах (1) можно положить $\rho = 1$.

3°. Моменты инерции пластинки. Моменты инерции пластинки относительно осей $OX$ и $OY$ соответственно равны

$$I_X = \iint_{(S)} y^2 \rho(x, y)\, dx\, dy, \quad I_Y = \iint_{(S)} x^2 \rho(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dx\, dy = I_X + I_Y. \tag{3}$$

Полагая $\rho(x, y) = 1$ в формулах (2) и (3), получаем геометрические моменты инерции плоской фигуры.

**2225.** Найти массу круглой пластинки радиуса $R$, если плотность ее пропорциональна расстоянию точки от центра и равна $\delta$ на краю пластинки.



**2226.** Пластинка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$ и $OA = b$, причем плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета $OA$. Найти статические моменты пластинки относительно катетов $OA$ и $OB$.

**2227.** Вычислить координаты центра тяжести фигуры $OmAnO$ (рис. 96), ограниченной кривой $y = \sin x$ и прямой $OA$, проходящей через начало координат и вершину $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ синусоиды.

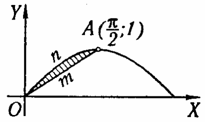

Рис. 96.

**2228.** Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

**2229.** Найти координаты центра тяжести кругового сектора радиуса $a$ с углом при вершине $2\alpha$ (рис. 97).

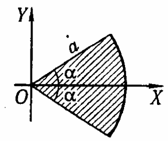

Рис. 97.

**2230.** Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x + 4$ и $y^2 = -2x + 4$.

**2231.** Вычислить момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, относительно оси $OX$.

**2232.** Найти момент инерции кругового кольца с диаметрами $d$ и $D$ ($d < D$): а) относительно его центра и б) относительно его диаметра.

**2233.** Вычислить момент инерции квадрата со стороной $a$ относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно плоскости квадрата.

**2234*.** Вычислить момент инерции сегмента, отсекаемого от параболы $y^2 = ax$ прямой $x = a$, относительно прямой $y = -a$.

**2235*.** Вычислить момент инерции площади, ограниченной гиперболой $xy = 4$ и прямой $x + y = 5$, относительно прямой $x = y$.

**2236*.** В квадратной пластинке со стороной $a$ плотность пропорциональна расстоянию от одной из ее вершин. Вычислить момент инерции пластинки относительно стороны, проходящей через эту вершину.

**2237.** Найти момент инерции кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ относительно полюса.

**2238.** Вычислить момент инерции площади лемнискаты $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ относительно оси, перпендикулярной ее плоскости в полюсе.

**2239*.** Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью $OX$, относительно оси $OX$.

## § 7. Тройные интегралы

1°. Тройной интеграл в прямоугольных координатах. Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область $V$, называется предел соответствующей трехкратной суммы:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) интегралов или к вычислению одного двойного и одного однократного.

Пример 1. Вычислить

$$I = \iiint\limits_{(V)} x^3y^2z\,dx\,dy\,dz,$$

где область $V$ определяется неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant x,\quad 0 \leqslant z \leqslant xy.$$

Решение. Имеем:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^2z\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^3y^2\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \frac{x^5y^4}{2}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{x^5y^5}{2\cdot 5}\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{1}{110}.$$

Пример 2. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz,$$

распространенный на объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Решение.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} x^2\,dx \iint\limits_{(S_{yz})} dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} x^2 S_{yz}\,dx,$$

где $S_{yz}$ есть площадь эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, $x = \text{const}$, равная

$$S_{yz} = \pi b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Поэтому окончательно имеем

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \pi bc\int\limits_{-a}^{a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15}\pi a^3bc.$$



2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

от переменных $x$, $y$, $z$ требуется перейти к переменным $u$, $v$, $w$, связанным с $x$, $y$, $z$ соотношениями $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, где функции $\varphi$, $\psi$, $\chi$:

1) непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка;

2) устанавливают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области интегрирования $V$ пространства $OXYZ$ и точками некоторой области $V'$ пространства $O'UVW$;

3) функциональный определитель (якобиан) этих функций

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

сохраняет в области $V$ постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

В частности:

1) для цилиндрических координат $r$, $\varphi$, $h$ (рис. 98), где

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = h,$$

получаем, что $I = r$;

2) для сферических координат $\varphi$, $\psi$, $r$ ($\varphi$ — долгота, $\psi$ — широта, $r$ — радиус-вектор) (рис. 99), где

$$x = r\cos\psi\cos\varphi,\quad y = r\cos\psi\sin\varphi,\quad z = r\sin\psi,$$

имеем $I = r^2\cos\psi$.

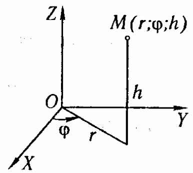


Рис. 98.

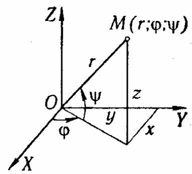


Рис. 99.

Пример 3. Переходя к сферическим координатам, вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — шар радиуса $R$.

Решение. Для шара пределы изменения сферических координат $\varphi$ (долготы), $\psi$ (широты) и $r$ (радиуса-вектора) будут:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Поэтому будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R rr^2 \cos\psi\, dr = \pi R^4.$$

3°. Приложения тройных интегралов. *Объем* области трехмерного пространства $OXYZ$ равен

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz.$$

*Масса* тела, занимающего область $V$,

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где $\gamma(x, y, z)$ — плотность тела в точке $(x; y; z)$.

*Статические моменты* тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) z\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) x\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) y\, dx\, dy\, dz.$$

*Координаты центра тяжести*:

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M},\quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M},\quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Если тело однородно, то в формулах для координат центра тяжести можно положить $\gamma(x, y, z) = 1$.

*Моменты инерции* относительно осей координат:

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Положив в этих формулах $\gamma(x, y, z) = 1$, получим геометрические моменты инерции тела.



## А. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

для указанных областей $V$:

**2240.** $V$ — тетраэдр, ограниченный плоскостями

$$x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

**2241.** $V$ — цилиндр, ограниченный поверхностями

$$x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0,\ z = H.$$

**2242*.** $V$ — конус, ограниченный поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},\ z = c.$$

**2243.** $V$ — объем, ограниченный поверхностями

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ z = 0.$$

Вычислить следующие интегралы:

**2244.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$

**2245.** $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\, dz.$

**2246.** $\displaystyle\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}.$

**2247.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\, dz.$

**2248.** Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3},$$

где $V$ — область интегрирования, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

**2249.** Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} (x + y + z)^2\, dx\, dy\, dz,$$

где $V$ — общая часть параболоида $2az \geqslant x^2 + y^2$ и шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$.

**2250.** Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — общая часть шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$.

**2251.** Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — объем, ограниченный плоскостью $z = 0$ и верхней половиной эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**2252.** Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**2253.** Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — область, ограниченная конусом $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = h$.

**2254.** Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ и содержащая точку $(0;\ 0;\ R)$.

**2255.** Вычислить

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x - x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2 + y^2}\,dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

**2256.** Вычислить

$$\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{-\sqrt{2rx - x^2}}^{\sqrt{2rx - x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}} dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.



**2257.** Вычислить

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} (x^2 + y^2)\,dz,$$

преобразовав его предварительно к сферическим координатам.

**2258.** Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где $V$ — внутренность шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x$.

### Б. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

**2259.** Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2 = 4a^2 - 3ax,\ y^2 = ax,\ z = \pm h.$$

**2260*.** Вычислить объем части цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, содержащейся между параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ и плоскостью $XOY$.

**2261*.** Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$ (внешнего по отношению к конусу).

**2262*.** Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$ (внутреннего по отношению к параболоиду).

**2263.** Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $XOY$, цилиндром $x^2 + y^2 = ax$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (внутреннего по отношению к цилиндру).

**2264.** 1. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ и плоскостью $x = a$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ z \geqslant 0.$$

### В. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

**2265.** Найти массу $M$ прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, если плотность $\rho(x, y, z)$ в точке $(x, y, z)$ численно равна $x + y + z$.

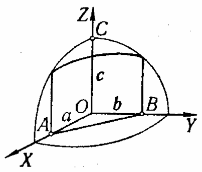


Рис. 100.

**2266.** Из октанта шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ вырезано тело $OABC$, ограниченное координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a \leqslant c$, $b \leqslant x$) (рис. 100). Найти массу этого тела, если плотность его в каждой точке $(x, y, z)$ равна аппликате этой точки.

**2267*.** В теле, имеющем форму полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, плотность изменяется пропорционально расстоянию точки от центра. Найти центр тяжести этого тела.

**2268.** Найти центр тяжести тела, ограниченного параболоидом $y^2 + 2z^2 = 4x$ и плоскостью $x = 2$.

**2269.** Найти момент инерции круглого цилиндра, высота которого $h$ и радиус основания $a$, относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра.

**2270*.** Найти момент инерции круглого конуса, высота которого $h$, радиус основания $a$ и плотность $\rho$, относительно диаметра основания.

**2271**.** Найти силу притяжения однородного конуса высоты $h$ с углом $\alpha$ при вершине (в осевом сечении) к материальной точке единичной массы, расположенной в вершине конуса.

**2272**.** Показать, что сила притяжения, действующая со стороны однородного шара на внешнюю материальную точку, не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.

## § 8. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственные кратные интегралы

1°. Дифференцирование по параметру. При некоторых ограничениях[*)], налагаемых на функции $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha(x, \alpha)$ и на соответствующие несобственные интегралы, имеет место *правило Лейбница*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_\alpha^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_\alpha^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Пример 1. С помощью дифференцирования по параметру вычислить

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

*) См.: Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа, т. 2, гл. 5, § 49, 50. — Висагинас: «Alfa», 1998.



Решение. Пусть

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Тогда

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha} x e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Отсюда $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C(\beta)$. Чтобы найти $C(\beta)$, полагаем в последнем равенстве $\alpha = \beta$. Имеем $0 = -\frac{1}{2}\ln\beta + C(\beta)$.

Отсюда $C(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$. Следовательно,

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

2°. Несобственные двойные интегралы. а) Случай бесконечной области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в неограниченной области $S$, то полагают

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\sigma \to S} \iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где $\sigma$ — конечная область, целиком лежащая в $S$, причем $\sigma \to S$ означает, что мы расширяем область $\sigma$ по произвольному закону, так чтобы в нее вошла и осталась в ней любая точка области $S$. Если предел в правой части существует и не зависит от выбора области $\alpha$, то соответствующий несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Если подынтегральная функция $f(x, y)$ неотрицательна ($f(x, y) \geqslant 0$), то для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы предел в правой части равенства (1) существовал хотя бы для одной системы областей $\sigma$, исчерпывающих область $S$.

б) Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $S$ всюду, за исключением точки $P(a; b)$, то полагают

$$\iint_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{(S_\varepsilon)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где $S_\varepsilon$ — область, получаемая из $S$ путем удаления малой области диаметра $\varepsilon$, содержащей точку $P$. В случае существования предела (2), не зависящего от вида удаляемых из области $S$ малых областей, рассматриваемый несобственный интеграл называется *сходящимся*, а в противном случае — *расходящимся*.

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то предел в правой части равенства (2) не зависит от вида удаляемых из области $S$ областей; в частности, в качестве таких областей можно брать круги радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке $P$.

Понятие несобственных двойных интегралов легко переносится на случай тройных интегралов.

Пример 2. Исследовать на сходимость

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}, \tag{3}$$

где $S$ — вся плоскость $XOY$.

Решение. Пусть $\sigma$ — круг радиуса $\rho$ с центром в начале координат. Переходя к полярным координатам, при $p \neq 1$ имеем

$$I(\sigma) = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^p} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left. \frac{(1+r^2)^{1-p}}{1-p} \right|_0^{\rho} d\varphi = \frac{\pi}{1-p}[(1+\rho^2)^{1-p} - 1].$$

Если $p < 1$, то $\lim\limits_{\sigma \to S} I(\sigma) = \lim\limits_{\rho \to \infty} I(\sigma) = \infty$ и интеграл расходится. Если же $p > 1$, то $\lim\limits_{\rho \to \infty} I(\sigma) = \frac{\pi}{p-1}$ и интеграл сходится. При $p = 1$ имеем $I(\sigma) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \frac{r\,dr}{1+r^2} = \pi \ln(1+\rho^2)$; $\lim\limits_{\rho \to \infty} I(\sigma) = \infty$, т. е. интеграл расходится.

Таким образом, интеграл (3) сходится при $p > 1$.

**2273.** Найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \int\limits_x^{\infty} e^{-xy}\,dy \quad (x > 0).$$

**2274.** Доказать, что функция

$$u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(z)}{x^2+(y-z)^2}\,dz$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**2275.** Преобразование Лапласа $F(p)$ для функции $f(t)$ определяется формулой

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Найти $F(p)$, если: а) $f(t) = 1$; б) $f(t) = e^{\alpha t}$; в) $f(t) = \sin \beta t$; г) $f(t) = \cos \beta t$.



**2276.** Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{n-1} \ln x\,dx.$$

**2277*.** Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0),$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} t^2 e^{-pt}\,dt.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

**2278.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

**2279.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

**2280.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}\,dx.$

**2281.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| < 1).$

**2282.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqslant 0).$

Вычислить следующие несобственные интегралы:

**2283.** $\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy.$ **2284.** $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{y^2} e^{x/y}\,dx.$

**2285.** $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$, где $S$ — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

**2286*.** $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}\ (a > 0)$.

**2287.** *Интеграл Эйлера—Пуассона*, определяемый формулой $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, может быть записан также в виде $I = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,dy$. Перемножая эти формулы и переходя затем к полярным координатам, вычислить $I$.

**2288.** Вычислить $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

Исследовать на сходимость несобственные двойные интегралы:

**2289**.** $\iint\limits_{(S)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где $S$ — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

**2290.** $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, где $S$ — область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 \geqslant 1$ («внешность» круга).

**2291*.** $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, где $S$ — квадрат $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

**2292.** $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, где $V$ — область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$ («внешность» шара).

## § 9. Криволинейные интегралы

1°. Криволинейный интеграл первого типа. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, $y = \varphi[a \leqslant x \leqslant b]$ — некоторая гладкая кривая $C$.

Построим систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, разбивающих кривую $C$ на элементарные дуги $\smile{M_{i-1}M_i} = \Delta s_i$, и составим интегральную сумму $S_n = \sum\limits_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta s_i$. Предел этой суммы при $n \to \infty$ и $\max \Delta s_i \to 0$ называется *криволинейным интегралом первого типа*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\,\Delta s_i = \int\limits_C f(x, y)\,ds$$



($ds$ — дифференциал дуги) и вычисляется по формуле

$$\int\limits_C f(x, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx.$$

В случае параметрического задания кривой $C$: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $[\alpha \leqslant t \leqslant \beta]$ имеем

$$\int\limits_C f(x, y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Рассматривают также криволинейные интегралы первого типа от функции трех переменных $f(x, y, z)$, взятые по пространственной кривой, которые вычисляются аналогично. Криволинейный интеграл первого типа *не зависит от направления пути интегрирования*; если подынтегральную функцию $f$ интерпретировать как линейную плотность кривой интеграции $C$, то этот интеграл представляет собой *массу кривой* $C$.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_C (x + y)\,ds,$$

где $C$ — контур треугольника $ABO$ с вершинами $A(1;\,0)$, $B(0;\,1)$ и $O(0;\,0)$ (рис. 101).

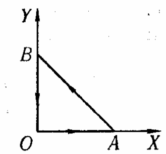

Рис. 101.

Решение. Здесь уравнение $AB$: $y = 1 - x$, уравнение $OB$: $x = 0$, уравнение $OA$: $y = 0$.

Поэтому будем иметь

$$\int\limits_C (x+y)\,ds = \int\limits_{AB} (x+y)\,ds + \int\limits_{BO} (x+y)\,ds + \int\limits_{OA} (x+y)\,ds = \int\limits_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int\limits_0^1 y\,dy + \int\limits_0^1 x\,dx = \sqrt{2} + 1.$$

2°. Криволинейный интеграл второго типа. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, $y = \varphi(x)$ — гладкая кривая $C$, пробегаемая при изменении $x$ от $a$ до $b$, то соответствующий *криволинейный интеграл второго типа* выражается следующим образом:

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_a^b [P(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x, \varphi(x))]\,dx.$$

В более общем случае, когда кривая $C$ задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t$ изменяется от $\alpha$ до $\beta$, имеем

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t)\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,dt.$$

Аналогичные формулы справедливы для криволинейного интеграла второго типа, взятого по пространственной кривой.

Криволинейный интеграл второго типа меняет свой знак на обратный при изменении направления пути интегрирования. Механически этот интеграл можно интерпретировать как работу соответствующей переменной силы $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ вдоль кривой интеграции $C$.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy,$$

где $C$ — верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемая по часовой стрелке.

Решение. Имеем

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_\pi^0 [b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= -ab^2\int_\pi^0 \sin^3 t\,dt + a^2b\int_\pi^0 \cos^3 t\,dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

3°. Случай полного дифференциала. Если подынтегральное выражение криволинейного интеграла второго типа есть полный дифференциал некоторой однозначной функции $U = U(x, y)$, т. е. $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y)$, то этот криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования и имеет место формула Ньютона—Лейбница

$$\int_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \tag{1}$$

где $(x_1; y_1)$ — начальная и $(x_2; y_2)$ — конечная точки пути. В частности, если контур интегрирования $C$ замкнут, то

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Если 1) контур интегрирования $C$ содержится целиком внутри некоторой односвязной области $S$ и 2) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными 1-го порядка непрерывны в области $S$, то необходимым и достаточным условием для существования функции $U$ является тождественное выполнение в области $S$ равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3}$$

(см. § 8 гл. VI). При невыполнении условий 1) и 2) соотношение (3) еще не гарантирует существования однозначной функции $U$ и формулы (1) и (2) могут оказаться неверными (см. задачу № 2332). Укажем способ нахождения функции $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу, основанный на использовании криволинейных интегралов (т. е. еще один способ интегрирования



полного дифференциала). За контур интегрирования $C$ возьмем ломаную $P_0P_1M$ (рис. 102), где $P_0(x_0; y_0)$ — фиксированная точка, $M(x; y)$ — переменная точка. Тогда вдоль $P_0P_1$ имеем $y = y_0$ и $dy = 0$, а вдоль $P_1M$ имеем $dx = 0$. Получаем

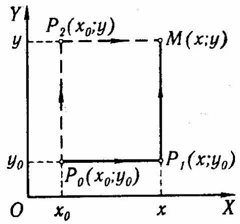


Рис. 102.

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{(x_0;\,y_0)}^{(x;\,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

Аналогично, интегрируя по ломаной $P_0P_2M$, имеем

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx.$$

Пример 3. $(4x + 2y)\,dx + (2x - 6y)\,dy = dU$. Найти $U$.

Решение. Здесь $P(x, y) = 4x + 2y$ и $Q(x, y) = 2x - 6y$; причем условие (3), очевидно, выполнено. Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тогда

$$U(x, y) = \int_0^x 4x\,dx + \int_0^y (2x - 6y)\,dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

или

$$U(x, y) = \int_0^y -6y\,dy + \int_0^x (4x + 2y)\,dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

где $C = U(0; 0)$ — произвольная постоянная.

4°. Формула Грина для плоскости. Если $C$ — граница области $S$ и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны, вместе со своими частными производными 1-го порядка, в замкнутой области $S + C$, то справедлива *формула Грина*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где обход контура $C$ выбирается так, чтобы область $S$ оставалась слева.

5°. Приложения криволинейных интегралов. 1) *Площадь*, ограниченная замкнутым контуром $C$, равна

$$S = -\oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy$$

(направление обхода контура выбирается обратным движению часовой стрелки).

Более удобна для приложений следующая формула площади:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_C x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) *Работа силы*, имеющей проекции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ (или соответственно работа силового поля), вдоль пути $C$ выражается интегралом

$$A = \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Если существует функция $U = U(x, y, z)$ (потенциальная или силовая функция) такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z,$$

то работа, независимо от вида пути $C$, равна

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

где $(x_1, y_1, z_1)$ — начальная, $(x_2, y_2, x_2)$ — конечная точки пути.

## А. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО ТИПА

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

**2293.** $\int_C xy\,ds$, где $C$ — контур квадрата $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$.

**2294.** $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где $C$ — отрезок прямой, соединяющей точки $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$.

**2295.** $\int_C xy\,ds$, где $C$ — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

**2296.** $\int_C y^2\,ds$, где $C$ — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

**2297.** $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где $C$ — дуга развертки окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$.

**2298.** $\int_C (x^2 + y^2)^2\,ds$, где $C$ — дуга логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ от точки $A(0; a)$ до точки $O(-\infty; 0)$.



**2299.** $\int_C (x + y)\,ds$, где $C$ — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

**2300.** $\int_C (x + z)\,ds$, где $C$ — дуга кривой $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$ $[0 \leqslant t \leqslant 1]$.

**2301.** $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, где $C$ — первый виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

**2302.** $\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, где $C$ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

**2303*.** Найти площадь боковой поверхности параболического цилиндра $y = \frac{3}{8}x^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

**2304.** Найти длину дуги конической винтовой линии $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ от точки $O(0; 0; 0)$ до точки $A(a; 0; a)$.

**2305.** Определить массу контура эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если линейная плотность его в каждой точке $M(x, y)$ равна $|y|$.

**2306.** Найти массу первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, если плотность в каждой точке численно равна значению радиуса-вектора этой точки.

**2307.** Определить координаты центра тяжести полуарки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ [0 \leqslant t \leqslant \pi].$$

**2308.** Найти момент инерции относительно оси $OZ$ первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

**2309.** С какой силой масса $M$, распределенная с постоянной плотностью на окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, воздействует на массу $m$, помещенную в точке $A$ $(0; 0; b)$?

## Б. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ТИПА

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

**2310.** $\int_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$, где $AB$ — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1; 1)$ до точки $B(2; 4)$.

**2311.** $\int_C (2a - y)\,dx + x\,dy$, где $C$ — дуга первой арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра $t$.

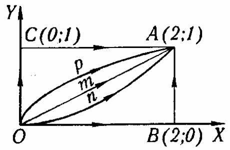


Рис. 103.

**2312.** $\int\limits_{OA} 2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y$, взятый вдоль различных путей, выходящих из начала координат $O(0;\ 0)$ и заканчивающихся в точке $A(2;\ 1)$ (рис. 103):

а) прямой $OmA$;
б) параболы $OnA$ осью симметрии которой является ось $OY$;
в) параболы $OpA$, осью симметрии которой является ось $OX$;
г) ломаной линии $OBA$;
д) ломаной линии $OCA$.

**2313.** $\int\limits_{OA} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ в условиях задачи № 2312.

**2314*.** $\oint \dfrac{(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, взятый вдоль окружности $x^2 + y^2 = a^2$ против хода часовой стрелки.

**2315.** $\int\limits_C y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, где $C$ есть верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

**2316.** $\int\limits_{AB} \cos y\,\mathrm{d}x - \sin x\,\mathrm{d}y$, взятый вдоль отрезка $AB$ биссектрисы второго координатного угла, если абсцисса точки $A$ равна 2 и ордината точки $B$ равна 2.

**2317.** $\oint\limits_C \dfrac{xy(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$, где $C$ — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

**2318.** Вычислить криволинейные интегралы от выражений, являющихся полными дифференциалами:

а) $\displaystyle\int\limits_{(-1;\ 2)}^{(2;\ 3)} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$,

б) $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 1)}^{(3;\ 4)} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$,

в) $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 0)}^{(1;\ 1)} (x + y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$,

г) $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 2)}^{(2;\ 1)} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$ (по пути, не пересекающему ось $OX$),



д) $\displaystyle\int\limits_{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)}^{(x;\ y)} \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x+y}$ (по пути, не пересекающему прямую $x + y = 0$),

е) $\displaystyle\int\limits_{(x_2;\ y_1)}^{(x_2;\ y_2)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \psi(y)\,\mathrm{d}y$.

**2319.** Найдя первообразные функции подынтегральных выражений, вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{(-2;\ -1)}^{(3;\ 0)} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$,

б) $\displaystyle\int\limits_{(0;\ -1)}^{(1;\ 0)} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ (путь интегрирования не пересекает прямой $y = x$),

в) $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 1)} \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ (путь интегрирования не пересекает прямой $y = -x$),

г) $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 0)}^{(1;\ 1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)\mathrm{d}y$.

**2320.** Вычислить

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

взятый по ходу часовой стрелки вдоль четверти эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте.

**2321.** Показать, что если $f(u)$ есть непрерывная функция и $C$ — замкнутый кусочно-гладкий контур, то

$$\oint\limits_C f(x^2 + y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0.$$

**2322.** Найти первообразную функцию $U$, если:

а) $\mathrm{d}u = (2x + 3y)\,\mathrm{d}x + (3x - 4y)\,\mathrm{d}y$;
б) $\mathrm{d}u = (3x^2 - 2xy + y^2)\,\mathrm{d}x - (x^2 - 2xy + 3y^2)\,\mathrm{d}y$;
в) $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{x-y}[(1 + x + y)\,\mathrm{d}x + (1 - x - y)\,\mathrm{d}y]$;
г) $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x+y} + \dfrac{\mathrm{d}y}{x+y}$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых:

**2323.** $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где $C$ — виток винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

соответствующий изменению параметра $t$ от 0 до $2\pi$.

**2324.** $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где $C$ — окружность

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\cos t, \\ y = R\cos\alpha\sin t, \\ z = R\sin\alpha\ (\alpha = \text{const}), \end{cases}$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра.

**2325.** $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, где $OA$ — дуга окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ z = x,$$

расположенная по ту сторону от плоскости $XOZ$, где $y > 0$.

**2326.** Вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

а) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,0;\,-3)}^{(6;\,4;\,8)} x\,dx + y\,dy - z\,dz$,

б) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{(a;\,b;\,c)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$,

в) $\displaystyle\int\limits_{(0;\,0;\,0)}^{(3;\,4;\,5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

г) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{\left(x;\,y;\,\frac{1}{xy}\right)} \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$ (путь интегрирования расположен в первом октанте).



### В. ФОРМУЛА ГРИНА

**2327.** С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\,dy,$$

где контур $C$ ограничивает область $S$.

**2328.** Применяя формулу Грина, вычислить

$$I = \oint\limits_C 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy,$$

где $C$ — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами в точках $A(1;\,1)$, $B(2;\,2)$ и $C(1;\,3)$. Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

**2329.** Применяя формулу Грина, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

где $C$ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

**2330.** Через точки $A(1;\,0)$ и $B(2;\,3)$ проведены парабола $AmB$, осью которой является ось $OY$, и хорда ее $AnB$. Найти

$$\oint\limits_{AmBnA} (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$$

непосредственно и применяя формулу Грина.

**2331.** Найти $\int\limits_{AmB} e^{xy}[y^2\,dx + (1 + xy)\,dy]$, если точки $A$ и $B$ лежат на оси $OX$, а площадь, ограниченная путем интеграции $AmB$ и отрезком $AB$, равна $S$.

**2332*.** Вычислить $\oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$. Рассмотреть два случая:

а) когда начало координат находится вне контура $C$,

б) когда контур окружает $n$ раз начало координат.

**2333**.** Показать, что если $C$ — замкнутая кривая, то

$$\oint\limits_C \cos(X,\,n)\,ds = 0,$$

где $s$ — длина дуги, $n$ — внешняя нормаль.

**2334.** Применяя формулу Грина, найти интеграл

$$I = \oint_C [x\cos(X, n) + y\sin(X, n)]\, ds,$$

где $ds$ — дифференциал дуги, $n$ — внешняя нормаль к контуру $C$.

**2335*.** Вычислить интеграл

$$\oint_C \frac{dx - dy}{x + y},$$

взятый вдоль контура квадрата с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ и $D(0; -1)$, при условии обхода контура против часовой стрелки.

### Г. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

**2336.** Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

**2337.** Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

**2338.** Кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

**2339*.** Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

**2340.** Кривой $(x + y)^3 = axy$.

**2341*.** Окружность радиуса $r$ катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса $R$, оставаясь вне нее. Предполагая, что $\frac{R}{r}$ — целое число, найти площадь, ограниченную кривой (эпициклоидой), описанной какой-нибудь точкой подвижной окружности. Разобрать частный случай $r = R$ (кардиоида).

**2342*.** Окружность радиуса $r$ катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса $R$, оставаясь внутри нее. Предполагая, что $\frac{R}{r}$ — целое число, найти площадь, ограниченную кривой (гипоциклоидой), описанной какой-нибудь точкой подвижной окружности. Разобрать частный случай, когда $r = \frac{R}{4}$ (астроида).

**2343.** Поле образовано постоянной силой $F$, направленной вдоль положительной полуоси $OX$. Найти работу поля, когда материальная точка описывает по ходу часовой стрелки четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащую в первом квадранте.

**2344.** Найти работу, производимую силой тяжести при перемещении материальной точки массы $m$ из положения $A(x_1; y_1; z_1)$ в положение $B(x_2; y_2; z_2)$ (ось $OZ$ направлена вертикально вверх).



**2345.** Найти работу упругой силы, направленной к началу координат и пропорциональной удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в первом квадранте.

**2346.** Найти потенциальную функцию силы $R\{X, Y, Z\}$ и определить работу силы на данном участке пути, если:

а) $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$ (сила тяжести) и материальная точка перемещается из положения $A(x_1, y_1, z_1)$ в положение $B(x_2, y_2, z_2)$;

б) $X = -\frac{\mu x}{r^3}$, $Y = -\frac{\mu y}{r^3}$, $Z = -\frac{\mu z}{r^3}$, где $\mu = \text{const}$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (сила ньютоновского притяжения) и материальная точка из положения $A(a, b, c)$ удаляется в бесконечность;

в) $X = -k^2 x$, $Y = -k^2 y$, $Z = -k^2 z$, где $k = \text{const}$ (упругая сила), причем начальная точка пути находится на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а конечная — на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(R > r)$.

## § 10. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл первого типа. Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, $z = \varphi(x, y)$ — гладкая поверхность $S$.

*Поверхностный интеграл первого типа* представляет собой предел интегральной суммы

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i,$$

где $\Delta S_i$ — площадь $i$-го элемента поверхности $S$, точка $(x_i, y_i, z_i)$ принадлежит этому элементу, причем максимальный диаметр элементов разбиения стремится к нулю.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности $S$, по которой производится интегрирование.

Если проекция $\sigma$ поверхности $S$ на плоскость $XOY$ однозначна, т. е. всякая прямая, параллельная оси $OZ$, пересекает поверхность $S$ лишь в одной точке, то соответствующий поверхностный интеграл первого типа может быть вычислен по формуле

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + 1 + \varphi_y'^2(x, y)}\, dx\, dy.$$

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (x + y + z)\, dS,$$

где $S$ — поверхность куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Вычислим сумму поверхностных интегралов по верхней грани куба ($z = 1$) и по нижней грани куба ($z = 0$):

$$\int_0^1\int_0^1 (x + y + 1)\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 (x + y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (2x + 2y + 1)\,dx\,dy = 2.$$

Очевидно, что искомый поверхностный интеграл в три раза больше и равен

$$\iint_S (x + y + z)\,dS = 9.$$

2°. Поверхностный интеграл второго типа. Если $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — непрерывные функции, $S^+$ — сторона гладкой поверхности $S$, характеризуемая направлением нормали $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то соответствующий *поверхностный интеграл второго типа* выражается следующим образом:

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

При переходе на другую сторону $S^-$ поверхности этот интеграл меняет свой знак на обратный.

Если поверхность $S$ задана в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

где

$$D = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

и выбор знака перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности $S$.

3°. Формула Стокса. Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы и $C$ — замкнутый контур, ограничивающий двустороннюю поверхность $S$, то имеет место *формула Стокса*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности $S$, причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура $C$ совершался против часовой стрелки (в правой системе координат).



Вычислить следующие поверхностные интегралы первого типа:

**2347.** $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, где $S$ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**2348.** $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, где $S$ — боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $[0 \leqslant z \leqslant b]$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго типа:

**2349.** $\iint_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, где $S$ — внешняя сторона поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

**2350.** $\iint_S z\,dx\,dy$, где $S$ — внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**2351.** $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где $S$ — внешняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

**2352.** Найти массу поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если поверхностная плотность в точке $M(x; y; z)$ равна $xyz$.

**2353.** Определить координаты центра тяжести однородной параболической оболочки $az = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$.

**2354.** Найти момент инерции части боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $[0 \leqslant z \leqslant h]$ относительно оси $OZ$.

**2355.** Применяя формулу Стокса, преобразовать интегралы:

а) $\oint_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$;

б) $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$.

Применяя формулу Стокса, найти данные интегралы и проверить результаты непосредственным вычислением:

**2356.** $\oint_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, где $C$ — окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0.$$

**2357.** $\oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где $C$ — эллипс

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 1.$$

**2358.** $\oint\limits_C x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, где $C$ — кривая $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$.

**2359.** $\oint\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, где $ABCA$ — контур $\Delta ABC$ с вершинами $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ a)$.

**2360.** В каком случае криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

по любому замкнутому контуру $C$ равен нулю?

## § 11. Формула Остроградского—Гаусса

Если $S$ — замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем $V$, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка в замкнутой области $V$, то имеет место *формула Остроградского—Гаусса*

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $S$.

Применяя формулу Остроградского—Гаусса, преобразовать следующие поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям $S$, ограничивающим объем $V$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $S$).

**2361.** $\iint\limits_S xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx$.

**2362.** $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$.

**2363.** $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

**2364.** $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS$.

С помощью формулы Остроградского—Гаусса вычислить следующие поверхностные интегралы:

**2365.** $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где $S$ — внешняя сторона поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.



**2366.** $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, где $S$ — наружная сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

**2367.** $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где $S$ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**2368.** $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, где $S$ — внешняя полная поверхность конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0\ [0 \leqslant z \leqslant b].$$

**2369.** Доказать, что если $S$ — замкнутая поверхность и $l$ — любое постоянное направление, то

$$\iint\limits_S \cos(n, l)\,dS = 0,$$

где $n$ — внешняя нормаль к поверхности $S$.

**2370.** Доказать, что объем тела $V$, ограниченного поверхностью $S$, равен

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $S$.

## § 12. Элементы теории поля

1°. С к а л я р н о е и в е к т о р н о е п о л я. *Скалярное поле* определяется скалярной функцией точки $u = f(P) = f(u, y, z)$, где $P(x, y, z)$ — точка пространства. Поверхности $f(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$, называются *поверхностями уровня* скалярного поля.

*Векторное поле* определяется векторной функцией точки $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(r)$, где $P$ — точка пространства, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки $P$. В координатной форме $a = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, где $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ — проекции вектора $\mathbf{a}$ на координатные оси. *Векторные линии (силовые линии, линии тока)* векторного поля находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Скалярное или векторное поле, не зависящее от времени $t$, называется *стационарным*, а зависящее от времени — *нестационарным*.

2°. Градиент. Вектор

$$\operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \nabla U,$$

где $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ — оператор Гамильтона (набла), называется *градиентом* поля $U = f(P)$ в данной точке $P$ (ср. гл. VI, § 6). Градиент направлен по нормали $n$ к поверхности уровня в точке $P$ в сторону возрастания функции $U$ и имеет длину, равную

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Если направление задано единичным вектором $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{l} = \operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(*производная функции $U$ по направлению $l$*).

3°. Дивергенция и вихрь. *Дивергенцией* векторного поля

$$\mathbf{a}(P) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

называется скаляр $\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \nabla\mathbf{a}$.

*Вихрем* векторного поля $\mathbf{a}(P) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_k\mathbf{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \equiv \nabla \times \mathbf{a}.$$

4°. Поток вектора. *Потоком* векторного поля $\mathbf{a}(P)$ через поверхность $S$ в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\mathbf{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ к поверхности $S$, называется интеграл

$$\iint_S \mathbf{an}\,dS = \iint_S a_n\,dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS.$$

Если $S$ — замкнутая поверхность, ограничивающая объем $V$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S$, то справедлива *формула Остроградского—Гаусса*, которая в векторной форме имеет вид

$$\iint_S a_n\,dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz.$$

5°. Циркуляция вектора; работа поля. *Линейный интеграл* от вектора $\mathbf{a}$ по кривой $C$ определяется формулой

$$\int_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_C a_s\,ds = \int_C a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz \qquad (1)$$

и представляет собой *работу* поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой $C$ ($a_s$ — проекция вектора $\mathbf{a}$ на касательную к $C$).

Если кривая $C$ — замкнутая, то линейный интеграл (1) называется *циркуляцией* векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль контура $C$.



Если замкнутая кривая $C$ ограничивает двустороннюю поверхность $S$, то справедлива *формула Стокса*, которая в векторной форме имеет вид

$$\oint_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{a}\,dS = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a})_n\,dS,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности $S$, направление которого должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, смотрящего по направлению $\mathbf{n}$, обход контура $C$ совершался в правой системе координат против часовой стрелки.

6°. Потенциальное и соленоидальное поля. Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *потенциальным*, если

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} U,$$

где $U = f(\mathbf{r})$ — скалярная функция (*потенциал* поля).

Для потенциальности поля $\mathbf{a}$, заданного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было *безвихревым*, т. е. чтобы $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$. В этом случае существует потенциал $U$, определяемый из уравнения

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если потенциал $U$ — однозначная функция, то $\int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$; в частности, циркуляция вектора $\mathbf{a}$ равна нулю: $\oint_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0$.

Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$; в этом случае поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = 0$ и потенциальная функция является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, или $\Delta U = 0$, где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

**2371.** Определить поверхности уровня скалярного поля $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Каковы будут поверхности уровня поля $U = F(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$?

**2372.** Определить поверхности уровня скалярного поля

$$U = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**2373.** Показать, что векторными линиями векторного поля $\mathbf{a}(P) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, являются прямые, параллельные вектору $\mathbf{c}$.

**2374.** Найти векторные линии поля $\mathbf{a} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, где $\omega$ — постоянная.

**2375.** Вывести формулы:

а) $\operatorname{grad}(C_1U + C_2V) = C_1\operatorname{grad} U + C_2\operatorname{grad} V$, где $C_1$ и $C_2$ — постоянные;

б) $\operatorname{grad}(UV) = U\operatorname{grad} V + V\operatorname{grad} U$;

в) $\operatorname{grad}(U^2) = 2U\operatorname{grad} U$;

г) $\operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\operatorname{grad} U - U\operatorname{grad} V}{V^2}$;

д) $\operatorname{grad}\varphi(U) = \varphi'(U)\operatorname{grad} U$.

**2376.** Найти модуль и направление градиента поля

$$U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

в точке $A(2; 1; 1)$. Определить, в каких точках градиент поля перпендикулярен оси $OZ$ и в каких точках равен нулю.

**2377.** Вычислить $\operatorname{grad} U$, если $U$ равно соответственно: а) $r$, б) $r^2$, в) $\frac{1}{r}$, г) $f(r)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

**2378.** Найти градиент скалярного поля $U = \mathbf{c}r$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Каковы будут поверхности уровня этого поля и как они расположены относительно вектора $\mathbf{c}$?

**2379.** Найти производную функции $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $P(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$ этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

**2380.** Найти производную функции $U = \frac{1}{r}$ в направлении $\mathbf{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. В каком случае эта производная равна нулю?

**2381.** Вывести формулы:

а) $\operatorname{div}(C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) = C_1\operatorname{div}\mathbf{a}_1 + C_2\operatorname{div}\mathbf{a}_2$, где $C_1$ и $C_2$ — постоянные;

б) $\operatorname{div}(U\mathbf{c}) = \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

в) $\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{a} + U\operatorname{div}\mathbf{a}$.

**2382.** Вычислить $\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$.

**2383.** Найти $\operatorname{div}\mathbf{a}$ для центрального векторного поля $\mathbf{a}(P) = f(r)\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**2384.** Вывести формулы:

а) $\operatorname{rot}(C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) = C_1\operatorname{rot}\mathbf{a}_1 + C_2\operatorname{rot}\mathbf{a}_2$, где $C_1$ и $C_2$ — постоянные;

б) $\operatorname{rot}(U\mathbf{c}) = \operatorname{grad} U \times \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

в) $\operatorname{rot}(U\mathbf{a}) = \operatorname{grad} U \times \mathbf{a} + U\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

**2385.** Вычислить дивергенцию и вихрь вектора $\mathbf{a}$, если: а) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; б) $\mathbf{a} = r\mathbf{c}$; в) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.



**2386.** Найти дивергенцию и вихрь поля линейных скоростей точек тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг оси $OZ$ в направлении против хода часовой стрелки.

**2387.** Вычислить вихрь поля линейных скоростей $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ точек тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат.

**2389.** Доказать, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = 0$.

**2390.** Пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса, доказать, что поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую произвольный объем $V$, равен утроенному объему.

**2391.** Найти поток вектора $\mathbf{r}$ через полную поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

**2392.** Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через: а) боковую поверхность конуса $\frac{x^2+y^2}{R^2} \leqslant \frac{z^2}{H^2}$, $0 \leqslant z \leqslant H$; б) через полную поверхность этого конуса.

**2393*.** Вычислить дивергенцию и поток силы притяжения $\mathbf{F} = -\frac{m\mathbf{r}}{r^3}$ точки массы $m$, помещенной в начале координат, через произвольную замкнутую поверхность, окружающую эту точку.

**2394.** Вычислить линейный интеграл вектора $\mathbf{r}$ вдоль одного витка винтовой линии $x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $z = ht$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

**2395.** С помощью теоремы Стокса вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = x^2y^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$, приняв в качестве поверхности полусферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

**2396.** Показать, что если сила $\mathbf{F}$ — центральная, т. е. направлена к неподвижной точке 0 и зависит только от расстояния $r$ до этой точки: $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, где $f(r)$ — однозначная непрерывная функция, то поле — потенциальное. Найти потенциал $U$ поля.

**2397.** Найти потенциал $U$ гравитационного поля, создаваемого материальной точкой массы $m$, помещенной в начале координат: $\mathbf{a} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$. Показать, что потенциал $U$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$.

**2398.** Выяснить, имеет ли данное векторное поле потенциал $U$, и найти $U$, если потенциал существует:

а) $\mathbf{a} = (5x^2y - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j}$;

б) $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$.

**2399.** Доказать, что пространственное центральное поле $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ будет соленоидальным только при $f(r) = \frac{k}{r^3}$, где $k = \text{const}$.

**2400.** Будет ли соленоидальным векторное поле $\mathbf{a} = r(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, где постоянный вектор?