Министерство образования
Российской Федерации

Российский государственный университет
нефти и газа имени И.М. Губкина

В.И. Иванов

Методические указания к изучению темы

«Неопределенный интеграл»

(для студентов всех специальностей)

Москва 2013

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение: Первообразной функции *f(x)* на интервале *(a; b)* называется функция *F(x),* производная которой равна *f(x)* во всех точках данного интервала.

Теорема: Если есть две первообразные функции *f(x),* то они отличаются друг от друга только на постоянную величину.

Определение: Совокупность всех первообразных функции *f(x)* называется неопределенным интегралом.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C,}$$

где $\int$ - знак интеграла, *f(x)* – подынтегральная функция, dx - дифференциал аргумента, по которому производится интегрирование, *f(x)dx* – подынтегральное выражение.

Теорема: Непрерывная на отрезке *[a; b]* функция интегрируема на интервале (*a; b)* (т.е. существует первообразная или неопределенный интеграл).

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$
3. $\int d\,F(x) = F(x) + C.$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$
5. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$
6. $\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(\Im)\,d\Im = F(\Im) + C.$

Способы вычисления интегралов

I. *Табличное интегрирование*

Данный способ интегрирования заключается в использовании вышеперечисленных свойств неопределенного интеграла и нижеприведенной таблицы. В таблице параметр u может быть любой непрерывно дифференцируемой функцией переменной x.

Таблица интегралов *(u=u(x))*:

1. $\int du = u + C.$	6. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$
2. $\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1).$	7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\, du = \operatorname{tg} u + C.$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{u}}\, du = 2\sqrt{u} + C.$	8. $\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\, du = -\operatorname{ctg} u + C.$
$\int \dfrac{1}{u^2}\, du = -\dfrac{1}{u} + C.$	9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\, du = \arcsin\dfrac{u}{a} + C = -\arccos\dfrac{u}{a} + C^*.$
3. $\int \dfrac{1}{u}\, du = \ln\lvert u\rvert + C.$	10. $\int \dfrac{1}{u^2+a^2}\, du = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{u}{a} + C^*.$
4. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$	11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2+b}}\, du = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2+b}\right\rvert + C.$
$\int e^u\, du = e^u + C.$	12. $\int \dfrac{1}{u^2-a^2}\, du = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C.$
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$	

Пример I.1. Вычислить интеграл $\int\left(x - 5\sqrt{2x} + 7\sin x + \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{6}{2^x} - 8\pi\right)dx.$

Решение:

$$\int\left(x - 5\sqrt{2x} + 7\sin x + \frac{1}{4x^3} + \frac{6}{2^x} - 8\pi\right)dx = \int x\, dx - 5\sqrt{2}\int x^{1/2}\, dx + 7\int \sin x\, dx + \frac{1}{4}\int x^{-3}\, dx +$$

$$+ 6\int (1/2)^x\, dx - 8\pi\int dx = \frac{x^2}{2} - 5\sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} - 7\cos x + \frac{1}{4}\,\frac{x^{-2}}{-2} + 6\,\frac{(1/2)^x}{\ln(1/2)} - 8\pi x + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{10\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x} - 7\cos x - \frac{1}{8x^2} - \frac{6}{2^x \ln 2} - 8\pi x + C$$

II. Линейное преобразование выражения под знаком дифференциала

Если известен интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$, то следующие интегралы могут быть вычислены с помощью линейного преобразования выражения под знаком дифференциала:

1. $\int f(x+a)\,dx = \int f(x+a)\,d(x+a) = F(x+a) + C.$
2. $\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int f(kx)\,d(kx) = \frac{1}{k}F(kx) + C.$
3. $\int f(kx+a)\,dx = \frac{1}{k}\int f(kx+a)\,d(kx+a) = \frac{1}{k}F(kx+a) + C.$

ꕥ **Пример II.1.** Вычислить интеграл $\int \sin(5x-2)\;dx.$

Решение: $\int \sin(5x-2)\;dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x-2)\;d(5x-2) = -\frac{1}{5}\cos(5x-2) = C.$

Вычислить интегралы:

1. $\int\left(7\cos x + \sqrt{5}\,\pi^x\right)dx.$
2. $\int\left(4x^7 - 7\sqrt[3]{x}\right)dx.$
3. $\int\left(3 - \frac{1}{11x} + \frac{11}{x}\right)dx.$
4. $\int\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)\;dx.$
5. $\int\frac{9}{\sqrt{x^2-3}}dx.$
6. $\int\left(\frac{a^x}{2} - 2x^a\right)\;dx.$
7. $\int\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt{x} + x^5\right)dx.$
8. $\int\left(\frac{2.7}{e^x} + 3.14e^x\right)dx.$
9. $\int\left(9\sqrt[6]{x} - \sin x\right)dx.$
10. $\int(x+3)^{121}\,dx.$
11. $\int 5(6x+7)^8\,dx.$
12. $\int(3-4x)^7\,dx.$
13. $\int\frac{12}{2-x}\,dx.$
14. $\int\frac{\sqrt{19}}{2-6x^2}\,dx.$
15. $\int\frac{12}{\sin^2(\pi x - 2)}dx.$
16. $\int\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx.$
17. $\int\frac{31}{\sqrt{1-3x}}\,dx.$
18. $\int\frac{1}{9+(8x-7)^2}dx.$
19. $\int\frac{3^{-x}}{\sqrt{6}}\,dx.$
20. $\int(\pi x - 2\sin 5x)dx.$
21. $\int\frac{1}{(12-11x)^3}\;dx.$

III. Подведение (внесение) под знак дифференциала

Один из множителей подынтегральной функции можно подвести под знак дифференциала. Для этого необходимо вычислить первообразную этого множителя и записать ее под знаком дифференциала. В дальнейшем все дополнительные вычисления и рассуждения будем записывать между двумя вертикальными чертами.

$$\boxed{\int \left(f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \right) dx = \int \left(f(\varphi(x)) \right) d\,\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C}$$

!Совет. Если после внесения одного из множителей под знак дифференциала возникли затруднения в дальнейших действиях, смело заменяйте полученное выражение под знаком дифференциала на новую переменную.

Пример III.1. Вычислить интеграл $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Решение:

$$\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -d(\arccos x) \right| = -\int e^{\arccos x} d(\arccos x) =$$

$$= -e^{\arccos x} + C.$$

Пример III.2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{x^3 \sqrt{\cos \frac{5}{x^2}}} dx.$

Решение:

$$\int \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{x^3 \sqrt{\cos \frac{5}{x^2}}} dx = \int \frac{1}{x^3} \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\cos \frac{5}{x^2}}} dx = \left| \frac{1}{x^3} dx = d\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} d\frac{1}{x^2} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\cos \frac{5}{x^2}}} d\frac{1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{10} \int \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\cos \frac{5}{x^2}}} d\frac{5}{x^2} = \left| \sin \frac{5}{x^2} d\frac{5}{x^2} = -d\cos \frac{5}{x^2} \right| = \frac{1}{10} \int \frac{d\cos \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\cos \frac{5}{x^2}}} = \frac{1}{5} \sqrt{\cos \frac{5}{x^2}} + C.$$

IV. Замена переменной в неопределенном интеграле

В неопределенном интеграле переменную интегрирования можно заменить на непрерывно дифференцируемую функцию от другой переменной:

$$\int f(x)\,dx = \left| x = \varphi(t); \quad dx = \varphi'(t)\,dt \right| = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\;dt.$$

Пример IV.1. Вычислить интеграл $\int x\left(3x-2\right)^{17}dx.$

Решение:

$$\int x\left(3x-2\right)^{17}\;dx = \left|3x-2=t; \quad x=\frac{t+2}{3}; \quad dx=\frac{dt}{3}\right| = \frac{1}{9}\int\left(t+2\right)\;t^{17}\,dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int\left(\;t^{18}\;+2t^{17}\right)dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{19}}{19}+\frac{2t^{18}}{18}\right)+C = \frac{1}{9}\left(\frac{\left(3x-2\right)^{19}}{19}+\frac{\left(3x-2\right)^{18}}{9}\right)+C.$$

Вычислить интегралы:

22. $\int 7^{\sin x}\cos x\,dx.$
23. $\int\frac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
24. $\int 2x^3\,\sin 3x^4\,dx.$
25. $\int\left(\frac{3x}{x^4+4}\right)\;dx.$
26. $\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx.$
27. $\int\frac{\pi^{1/x^2}}{x^3}\,dx.$
28. $\int\frac{1}{x\;\;\ln 5x}\;\;dx.$
29. $\int e^x\,\mathrm{tg}\,e^x\,dx.$
30. $\int\frac{dx}{\left(1+4x^2\right)\;\;\mathrm{arcctg}^4\,2x}.$
31. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\;\;\sin^2\sqrt{x}}.$
32. $\int 6x\;\;\cos x^2\,dx.$
33. $\int\frac{e^{4x}}{\cos^2 e^{4x}}\,dx.$
34. $\int\frac{12}{2-e^x}\;\;dx.$
35. $\int\frac{\log_5^6 x}{x}dx.$
36. $\int\frac{1+x}{x\left(x+\ln x\right)}dx, t=x+\ln x.$
37. $\int\frac{1+x}{\sqrt{x}+1}\;\;dx.$
38. $\int\frac{1}{x\sqrt{1-3x^2}}\,dx.$
39. $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx,\quad t=e^x.$

V. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

При интегрировании выражений, содержащих квадратный трехчлен, главным моментом является выделение полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right].$$

После этого чаще всего необходимо сделать замену: $x+\dfrac{b}{2a}=t.$

Пример V.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{3x^2-x+2}{6x-x^2}\,dx$.

Решение:

$$\int\frac{3x^2-x+2}{6x-x^2}\,dx=\left|6x-x^2=-\left[x^2-2x\cdot 3+3^2-9\right]=-\left[(x-3)^2-9\right]\right|=-\int\frac{3x^2-x+2}{(x-3)^2-9}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x-3=t;\ x=t+3;\\ dx=dt\end{array}\right|=-\int\frac{3t^2+17t+26}{t^2-9}\,dt=-\int\frac{3\left(t^2-9\right)+17t+53}{t^2-9}\,dt=-3\int dt-17\int\frac{t\,dt}{t^2-9}-$$

$$-53\int\frac{dt}{t^2-9}=-3t-\frac{17}{2}\ln\left|t^2-9\right|-\frac{53}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=-3x+9-\frac{17}{2}\ln\left|6x-x^2\right|-\frac{53}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C.$$

Вычислить интегралы:

40. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x}.$ 41. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+3x-4}.$ 42. $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2-5x+1}.$

43. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}.$ 44. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$ 45. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+\pi}}.$

46. $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$ 47. $\displaystyle\int\frac{2x-7}{x^2-8x+3}\,dx.$ 48. $\displaystyle\int\frac{3x+7}{x^2+9x-4/5}\,dx.$

49. $\displaystyle\int\frac{1-3x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx.$ 50. $\displaystyle\int\frac{4+9x}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx.$ 51. $\displaystyle\int\frac{4+11x}{\sqrt{6x-3x^2+2}}\,dx.$

52. $\displaystyle\int\frac{x^4-1}{4x^2-6x+10}\,dx.$ 53. $\displaystyle\int\frac{15}{3x^2+12x+7}\,dx.$ 54. $\displaystyle\int\frac{2x^3+x-5}{x^2-2x-5}\,dx.$

VI. Интегрирование по частям

В некоторых случаях удобно воспользоваться формулой интегрирования по частям $\left(u = u(x), \quad v = v(x), u'(x) - \text{непрерывные} \quad \text{функции}\right)$

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.}$$

Случаи применения формулы интегрирования по частям:

1. $$\int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} a^{\alpha x} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ \mathrm{Tr}(x) \end{bmatrix} dx = \left| \; u = P_n(x); \quad dv = \begin{bmatrix} a^{\alpha x} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ \mathrm{Tr}(x) \end{bmatrix} dx \; \right|.$$

2. $$\int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} \log_a x \\ \arcsin\beta x \\ \arccos\beta x \\ \mathrm{arctg}\,\beta x \\ \mathrm{arcctg}\,\beta x \end{bmatrix} dx = \left| u = \begin{bmatrix} \log_a x \\ \arcsin\beta x \\ \arccos\beta x \\ \mathrm{arctg}\,\beta x \\ \mathrm{arcctg}\,\beta x \end{bmatrix}; \quad dv = P_n(x)dx \right|.$$

3. $$\int a^{\alpha x} \cdot \begin{bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{bmatrix} dx = \left| \begin{matrix} \text{два раза интегрируем по частям,} \\ \text{получаем уравнение относительно} \\ \text{исходного интеграла} \end{matrix} \right|.$$

4. $$\int \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + b} \\ \sqrt{a^2 - x^2} \end{bmatrix} dx = \left| \begin{matrix} \text{один раз интегрируем по частям,} \\ \text{получаем уравнение относительно} \\ \text{исходного интеграла} \end{matrix} \right|.$$

Замечания:

1. Через Tr*(x)* обозначена тригонометрическая функция, $P_n(x)$ означает многочлен степени *n*, а в квадратных скобках перечислены функции, к которым применима данная формула.

2. Во втором пункте вместо многочлена можно подставлять и степенную функцию.

℘ **Пример VI.1.** Вычислить интеграл $\int\left(5x^2-7\right)\cdot e^{2x}dx.$

Решение:

$$\int\left(5x^2-7\right)\cdot e^{2x}\,dx=\left|u=5x^2-7;\quad dv=e^{2x}\,dx;\quad du=10x\,dx;\quad v=\int e^{2x}\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\right|=$$

$$=\left(5x^2-7\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{10}{2}\int x\,e^{2x}\,dx=\left|u=x;\quad dv=e^{2x}\,dx;\quad du=dx;\quad v=\frac{e^{2x}}{2}\right|=$$

$$=\left(5x^2-7\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-5\left(\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)=\frac{e^{2x}}{2}\left(5x^2-7-5x+\frac{5}{2}\right)+C.$$

℘ **Пример VI.2.** Вычислить интеграл $\int\sqrt[3]{x}\cdot\log_5 4x\,dx.$

Решение:

$$\int\sqrt[3]{x}\cdot\log_5 4x\,d\,x=\left|u=\log_5 4x,\quad d\,v=\sqrt[3]{x}\,dx,\quad d\,u=\frac{d\,x}{x\ln 5},\quad v=\frac{x^{4/3}}{4/3}\right|=$$

$$=\frac{3x^{4/3}}{4}\log_5 4x-\frac{3}{4\ln 5}\int\sqrt[3]{x}\,d\,x=\frac{3x^{4/3}}{4}\log_5 4x-\frac{9x^{4/3}}{16\ln 5}+C.$$

℘ **Пример VI.3.** Вычислить интеграл $\int\sqrt{x^2-4}\,dx.$

Решение:

$$I=\int\sqrt{x^2-4}\quad dx=\left|u=\sqrt{x^2-4};\quad dv=dx;\quad du=\frac{x\ \ dx}{\sqrt{x^2-4}};\quad v=x\right|=x\sqrt{x^2-4}-\int\frac{x^2\ \ dx}{\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-4}-\int\frac{x^2-4+4}{\sqrt{x^2-4}}\ \ dx=x\sqrt{x^2-4}-\int\sqrt{x^2-4}\ \ dx\ \ +4\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=x\sqrt{x^2-4}+$$

$$+4\ \ \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|-I+2C;$$

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}+2\ \ \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C.$$

Вычислить интегралы:

55. $\int x\cos x\,dx.$ 56. $\int x^2\sin x\,dx.$ 57. $\int (2x^2-5)\cos 4x\,dx.$

58. $\int (2x+5)\sin 3x\,dx.$ 59. $\int (9-7x)\,e^{5x+1}\,dx.$ 60. $\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx.$

61. $\int \left(4x^2+x-2\right)e^x\,dx.$ 62. $\int \sqrt{x}\,\ln 3x\,dx.$ 63. $\int x^3\log_\pi x\,dx.$

64. $\int \log_5 x\,dx.$ 65. $\int \mathrm{arctg}\,2x\,dx.$ 66. $\int x\arcsin x\,dx.$

67. $\int \arcsin x\,dx.$ 68. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,2x\,dx.$ 69. $\int 2^x\sin 2x\,dx.$

70. $\int e^x\cos 2x\,dx.$ 71. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$ 72. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$

VII. Интегрирование рациональных выражений

Определение. Рациональным относительно x называется выражение, которое можно представить в виде отношения двух многочленов, зависящих от x.

Определение. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе.

Теорема. Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной дроби (дробная часть).

Определение. Дроби следующих типов называются простейшими:

$$I.\ \frac{A}{x-a}. \qquad III.\ \frac{Cx+E}{x^2+px+q}, \quad D<0.$$

$$II.\ \frac{B}{(x-a)^n}. \qquad IV.\ \frac{Lx+K}{\left(x^2+px+q\right)^m}, \quad D<0.$$

Простейшими будем называть многочлены, которые являются знаменателями простейших дробей I и III типов.

Теорема. Любой многочлен $Q_m(x)$, степень которого выше 2 ($m>2$), можно разложить на простейшие множители следующим образом:

$$Q_m(x) = b_m\left(x-a_1\right)^{k_1}\cdot\left(x-a_2\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-a_s\right)^{k_s}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{l_r}.$$

Здесь $k_1, \ldots, k_s, l_1, \ldots, l_r$ – кратности простейших многочленов.

Теорема. Любую правильную дробь единственным образом можно разложить на сумму простейших дробей.

Алгоритм разложения:

1. Привести дробь к правильному виду (в дальнейшем будем рассматривать только правильную дробь).
2. Разложить знаменатель дроби на простейшие множители.
3. Представить дробь в виде суммы всевозможных различных простейших дробей, в знаменателях которых стоят всевозможные множители знаменателя, а в числителях соответствующей степени многочлены с неопределенными коэффициентами. При этом множителю знаменателя кратности k будут соответствовать k простейших дробей, в знаменателях которых будут все степени множителя.

   ! Контроль. Число неопределенных коэффициентов должно равняться степени многочлена в знаменателе исходной дроби.
4. Привести сумму простейших дробей к общему знаменателю. Общим знаменателем является знаменатель исходной дроби.
5. Приравнять числители получившейся и исходной дробей, вычислить коэффициенты при переменной x. Для этого можно воспользоваться двумя способами: 1) приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x в многочленах в правой и левой частях равенства; 2) подставить вместо x конкретные числовые значения (в первую очередь – корни знаменателя). Лучше всего комбинировать эти два способа.

ஜ **Пример VII.1.** Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^4} \cdot dx.$

Решение:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{A\cdot(x+1)^3 + B\cdot(x+1)^2 + C\cdot(x+1) + D}{(x+1)^4} = R.$$

приравняем числители

$$x^2+1 = A\cdot(x+1)^3 + B\cdot(x+1)^2 + C\cdot(x+1) + D.$$

$x=-1:\qquad 2=D.$

$x=0:\qquad 1=A+B+C+D;\qquad C=-2.$

$x^3:\qquad 0=A.$

$x^2:\qquad 1=3A+B;\qquad B=1.$

подставим полученные коэффициенты, получим

$$R = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^4}\ ;$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^4} d\,x = \int\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^4}\right)\ d\,x = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{3(x+1)^3} + C.$$

ஜ **Пример VII.2.** Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+2x}{x^3+x^2+x+1} \cdot dx = I.$

Решение: Так как дробь является неправильной, разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x & x^3+x^2+x+1 \\
\underline{x^4+x^3+x^2+x} & \overline{x-1} \\
\quad -x^3-x^2+x & \\
\quad \underline{-x^3-x^2-x-1} & \\
\qquad\qquad 2x+1 &
\end{array}$$

Подынтегральная функция при этом представляется в следующем виде:

$$\frac{x^4+2x}{x^3+x^2+x+1}=x-1+\frac{2x+1}{x^3+x^2+x+1}.$$

Разложим правильную дробь на сумму простейших:

$$\frac{2x+1}{\left(x^3+x^2\right)+(x+1)}=\frac{2x+1}{x^2\quad(x+1)+(x+1)}=\frac{2x+1}{(x+1)\quad(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B\quad x+C}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A\quad(x^2+1)+(B\quad x+C)\quad(x+1)}{(x+1)\quad(x^2+1)};$$

$$2x+1=A\quad(x^2+1)+(B\quad x+C)\quad(x+1);$$

$$x=-1:\quad -1=2A;\qquad A=-1/2;$$

$$x=0:\quad 1=A+C;\qquad C=3/2;$$

$$x^2:\quad 0=A+B;\qquad B=1/2.$$

$$\int\frac{x^4+2x}{x^3+x^2+x+1}\cdot dx=\int\left(x-1\right)dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{x+3}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\quad\ln\left|x+1\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\quad\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Вычислить интегралы:

73. $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+3x-4}\,dx$

74. $\displaystyle\int\frac{3x^2-5}{2x^2-7x+5}\,dx$

75. $\displaystyle\int\frac{2x^2-7}{(x-2)^3}\,dx$

76. $\displaystyle\int\frac{3x^2-4}{x^3+x^2}\,dx$

77. $\displaystyle\int\frac{\left(4-3x\right)dx}{(x+2)\quad(x^2+2)}$

78. $\displaystyle\int\frac{\left(8x-3\right)dx}{(3-2x-x^2)(x+1)}$

79. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

80. $\displaystyle\int\frac{12\,dx}{(3x+1)^2\,(x+3)}$

81. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+2x-3\right)}$

82. $\displaystyle\int\frac{x^4+4}{x^4-4}\,dx$

83. $\displaystyle\int\frac{\left(x+4\right)dx}{(x+6)^2\,(x+5)^2}$

84. $\displaystyle\int\frac{2x^4+x-4}{(x+3)^2\,(x^2+1)}\,dx$

VIII. Интегрирование иррациональных выражений

При интегрировании иррациональных выражений (в данном случае имеются в виду выражения, содержащие корни) необходимо сделать следующие замены переменной интегрирования, позволяющие избавиться от иррациональности:

1. $$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)\ dx = \left|\sqrt[n]{ax+b}=t,\ \ x=\frac{t^n-b}{a},\ \ dx=\frac{n}{a}\ t^{n-1}\,dt\right| =$$

$$=\int R\left(\frac{t-b}{a},\ t\right)t^n\,dt=\int R^*(t)\ \ dt.$$

2. $$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \ldots,\ \sqrt[n_r]{ax+b}\right)dx=\left|\begin{array}{l} l = НОЗ(n_1,\ \ldots\ ,\ n_r),\quad \sqrt[l]{ax+b}=t, \\ x=\dfrac{t^l-b}{a},\quad dx=\dfrac{l}{a}\ \ t^{l-1}dt \end{array}\right| =$$

$$=\int R\left(\frac{t^l-b}{a},\ t^{l/n_1},\ \ldots\ ,\ t^{l/n_r}\right)\ \frac{l}{a}\ \ t^{l-1}\,dt=\int R^{**}\left(t\right)\ \ dt.$$

3. $$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}\right)dx=\left|\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}=t,\ x=\frac{qt^n-b}{a-pt^n},dx=\frac{qa+pb}{\left(pt^n-a\right)^2}n\,t^{n-1}\,dt\right| =$$

$$=\int R\left(\frac{q\ \ t^n-b}{a-p\ \ t^n},\ t\right)\ \frac{qa+pb}{\left(pt^n-a\right)^2}n\ t^{n-1}\,dt=\int R^{***}\left(t\right)dt.$$

℘ **Пример VIII.1.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{3x+7-\sqrt{5-x}}{3\sqrt{5-x}+4}\ \ dx.$

Решение:

$$\int\frac{3x+7-\sqrt{5-x}}{3\sqrt{5-x}+4}dx=\left|\sqrt{5-x}=t;\quad x=5-t^2;\quad dx=-2t\,dt\ \right|=-2\int\frac{3\left(5-t^2\right)+7-t}{3t+4}t\,dt=$$

$$=2\ \int\frac{3t^3+t^2-22t}{3t+4}dt=2\int\left(t^2-t-6+\frac{24}{3t+4}\right)dt=\frac{2}{3}t^3-t^2-12t+16\ln\left|3t+4\right|+C=$$

$$=\frac{2}{3}\ \ \left(\sqrt{5-x}\right)^3-\left(5-x\right)-12\sqrt{5-x}+16\ln\left|3\sqrt{5-x}+4\right|+C.$$

Пример VIII.2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}+\sqrt[3]{3x-4}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}+\sqrt[3]{3x-4}} = \left| \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\ \Rightarrow l=6;\ \sqrt[6]{3x-4}=t; x=\frac{t^6+4}{3}; dx=2t^5\,dt \right| = 2\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^3}{t+1}\ dt = 2\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\ = \frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln\left|t+1\right|+C =$$

$$= \frac{2}{3}\ \sqrt{3x-4}-\sqrt[3]{3x-4}+2\ \ \sqrt[6]{3x-4}-2\ln\left|\sqrt[6]{3x-4}+1\right|+C.$$

Пример VIII.3. Вычислить интеграл $\int\left(\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}-1\right)^2 dx.$

Решение:

$$\int\left(\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}-1\right)^2 d\,x = \left| \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}=t;\quad x=\frac{3t^2+3}{1-t^2};\quad dx=\frac{12}{\left(1-t^2\right)^2}t\,d\,t \right| =$$

$$=12\int\frac{t\left(t-1\right)^2 dt}{\left(1-t^2\right)^2}=12\int\frac{tdt}{\left(1+t\right)^2}=12\int\frac{t+1-1}{\left(t+1\right)^2}=12\int\frac{dt}{\left(t+1\right)}-12\int\frac{dt}{\left(t+1\right)^2}=$$

$$=12\ln\left|t+1\right|+\frac{12}{t+1}+C=12\ln\left|\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}+1\ \right|+\frac{12\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}+C.$$

Вычислить интегралы:

85. $\int\frac{x}{\sqrt{x}-4}d\,x.$

86. $\int\frac{d\,x}{2x+5\sqrt{x}}.$

87. $\int\frac{3\ \ \sqrt{x-1}-5}{\sqrt{x-1}+6}d\,x.$

88. $\int\frac{\sqrt{4-3x}}{1+\sqrt[3]{4-3x}}d\,x.$

89. $\int\frac{d\,x}{\sqrt{x+2}\ \ \left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[4]{x+2}\right)}.$

90. $\int\frac{12\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}}d\,x.$

91. $\int\left(1-\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}\right)d\,x.$

92. $\int\sqrt{\frac{x+2}{x+5}}\ d\,x.$

IX. Интегрирование тригонометрических выражений.

Типы тригонометрических выражений и способы их интегрирования:

1. Внесение под знак дифференциала функции в нечетной степени:

$$\int \sin^m kx \cdot \cos^n kx\, d\,x = \left| \begin{matrix} m = 2p+1 \quad (\text{т.е. нечетное число}); \\ \sin kx\, d\,x = -\dfrac{1}{k} d(\cos kx) \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{k}\int \sin^{2p} kx \cdot \cos^n kx\, d(\cos kx) = \left|\cos kx = t\right| = -\frac{1}{k}\int \left(1-t^2\right)^p t^n dt = \int R(t)\, d\,t.$$

Пример IX.1. Вычислить интеграл $\int \cos^5 x\, d\,x.$

Решение: $\int \cos^5 x\, d\,x = \int \cos^4 x\, d(\sin x) = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x) =$

$$= \int \left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right) d(\sin x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Пример IX.2. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{\sin x}.$

Решение: $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \int \dfrac{\sin x \;\; dx}{\sin^2 x} = -\int \dfrac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$

2. Понижение порядка выражения:

$$\int \sin^m kx \cdot \cos^n kx\, d\,x = \left| \begin{matrix} m+n = 2p; \quad m \ge 0; \quad n \ge 0; \quad \sin^2 kx = \dfrac{1-\cos 2kx}{2}; \\ \cos^2 kx = \dfrac{1+\cos 2kx}{2}; \quad \sin kx \cdot \cos kx = \dfrac{1}{2}\sin 2kx. \end{matrix} \right|.$$

Пример IX.3. Вычислить интеграл $\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x\, d\,x.$

Решение:

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x\, d\,x = \int \left(\sin 3x \cdot \cos 3x\right)^2 \cdot \cos^2 3x\, d\,x = \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1+\cos 6x}{2} d\,x =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 6x\, d\,x + \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \cos 6x\, d\,x = \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 12x\right) d\,x + \frac{1}{48}\int \sin^2 6x\, d(\sin 6x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 12x}{192} + \frac{\sin^3 6x}{144} + C.$$

3. Применение замены *t=tg(kx)*.

$$\int \sin^m kx \cdot \cos^n kx\, d\,x = \left| \begin{matrix} m+n=2p;\ \ \operatorname{tg} kx = t;\ \ \sin^2 kx = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 kx = \dfrac{1}{1+t^2};\ x = \dfrac{1}{k}\operatorname{arctg} t;\ dx = \dfrac{1}{k}\dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int R(t)\, d\,t$$

Замечание. Если $m+n>0$, то сначала необходимо преобразовать тригонометрическое выражение с целью уменьшения его суммарной степени.

✎ **Пример IX.4.** Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \operatorname{tg} x = t;\ \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2};\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \left(1+t^2\right) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

✎ **Пример IX.5.** Вычислить интеграл $\int \dfrac{\cos^6 x}{\sin^4 x}\, d\,x$.

Решение:

$$\int \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^3}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{\sin^4 x} dx -$$

$$-3\int \frac{dx}{\sin^2 x} \ +3\int dx - \int \sin^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + 3\ \ \operatorname{ctg} x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Для вычисления первого интеграла воспользовались примером IX.4:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{d\left(x+\pi/2\right)}{\cos^4\left(x+\pi/2\right)} = \operatorname{tg}\left(x+\pi/2\right) + \frac{\operatorname{tg}^3\left(x+\pi/2\right)}{3} + C = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$$

4. Применение замены *t=tg(kx/2)*.

$$\int \sin^m kx \cdot \cos^n kx\, dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\dfrac{kx}{2} = t;\ \ x = \dfrac{2}{k}\cdot \operatorname{arctg} t;\ \ dx = \dfrac{2}{k}\cdot\dfrac{dt}{1+t^2}; \\ \sin kx = \dfrac{2t}{1+t^2};\quad \cos kx = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{matrix} \right| = \int R(t)\, dt$$

🙰 **Пример IX.6.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 3x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 3x} = \left| \operatorname{tg}\frac{3x}{2} = t \right| = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{12}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3}dt = \frac{1}{12}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{24\ \ t^2} + \frac{1}{6}\ln|t| + \frac{1}{24}t^2 + C = -\frac{1}{24}\operatorname{ctg}^2\frac{3x}{2} + \frac{1}{6}\ \ \ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right| + \frac{1}{24}\operatorname{tg}^2\frac{3x}{2} + C.$$

Замечание: в случае, когда в знаменателе стоит степень *cos(kx)*, сначала лучше перейти к функции *sin(kx)* с помощью формул приведения.

5. Универсальная тригонометрическая подстановка.

$$\int R\left(\sin kx,\ \cos kx\right) dx = \left|\ \operatorname{tg}\frac{kx}{2} = t\ \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{k}\frac{dt}{1+t^2} = \int R^*\left(t\right)\ \ dt.$$

6. Случай четных степеней тригонометрических функций.

$$\int R\left(\sin^2 kx,\ \ \cos^2 kx,\ \ \sin kx\cdot\cos kx\right) d\,x = \left|\ \operatorname{tg} kx = t\ \right| = \int R^{**}\left(t\right) d\,t.$$

🙰 **Пример IX.7.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2+\cos 4x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{2+\cos 4x} = \left|\ \operatorname{tg} 2x = t\ \right| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2+2t^2+1-t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{3}} + C.$$

🙰 **Пример IX.8.** Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x - 3\cos x + 5}{1-\sin x}\,d\,x$.

Решение:

$$\int \frac{\sin x - 3\cos x + 5}{1+\sin x}dx = \int\left(1 - \frac{3\cos x}{1+\sin x} + \frac{4}{1+\sin x}\right)dx = x - 3\int\frac{\cos x dx}{\sin x + 1} + 4\int\frac{dx}{1+\sin x} =$$

$$= x - 3\ln\ \left|\ \sin x + 1\ \right| - \frac{8}{1+\operatorname{tg} x/2} + C.$$

Вычислим последний интеграл отдельно:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| = 2\int\frac{dt}{\left(1+t\right)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg} x/2} + C.$$

7. Использование формул для преобразования произведений тригонометрических функций от различных аргументов

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right);$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)-\cos\left(\alpha-\beta\right)\right);$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right).$$

℘ **Пример IX.9.** Вычислить интеграл $\int\sin 2x\cdot\cos 5x\,dx.$

Решение:

$$\int\sin 2x\cdot\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 7x+\sin\left(-3x\right)\right)dx=\frac{1}{2\cdot 7}\int\sin 7x\,d7x-\frac{1}{2\cdot 3}\int\sin 3x\,d3x=$$
$$=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

℘ **Пример IX.10.** Вычислить интеграл $2\int\cos\left(4x+3\right)\cdot\cos\left(5x-1\right)d\,x.$

Решение:

$$2\int\cos\left(4x+3\right)\cdot\cos\left(5x-1\right)dx=\int\left(\cos\left(9x+2\right)+\cos\left(x-4\right)\right)dx=$$
$$=\frac{1}{9}\sin\left(9x+2\right)+\sin(x-4)+C.$$

℘ **Пример IX.11.** Вычислить интеграл $\int\cos 3x\cdot\sin^2 7x\,dx.$

Решение:

$$\int\sin 3x\cdot\sin^2 7x\,dx=\int\sin 3x\cdot\frac{1-\cos 14x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx-\frac{1}{2}\int\sin 3x\cdot\cos 14x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{4}\int\left(\sin 17x+\sin\left(-11x\right)\right)dx=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{68}\cos 17x-\frac{1}{44}\cos 11x+C.$$

8. Использование тригонометрических подстановок

$$\int R\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|x=a\sin t;\ dx=a\cos t\,d\,t\right|=\int R\left(a\cos t\right)\cdot a\cos t\,d\,t.$$
$$\int R\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|x=\frac{a}{\cos t};\ \ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt\right|=\int R\left(a\frac{\sin t}{\cos t}\right)\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt.$$
$$\int R\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)dx=\left|x=a\ \mathrm{tg}\,t;\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}\,dt\right|=\int R\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

℘ **Пример IX.12.** Вычислить интеграл $\int\sqrt{1-x^2}\,d\,x.$

Решение:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| x=\cos t;\ dx=-\sin t\ d\,t \right| = -\int \sin^2 t\ d\,t = \int \frac{\cos 2t - 1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sin t\cdot\cos t - \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}x\,\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + C.$$

Пример IX.13. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \left| x=\operatorname{tg} t;\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t} \right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} = \int \cos^4 t\,dt = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt = \frac{1}{8}\int \left(3+4\cos 2t+\cos 4t\right)dt = \frac{1}{8}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+$$

$$+C = \frac{1}{8}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\cdot\cos 2t\right)+C = \frac{1}{8}\left(3\operatorname{arctg} x+\frac{4x}{1+x^2}+\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)+C.$$

Вычислить интегралы:

93. $\int \cos^3 x\,d\,x.$

94. $\int \cos^2 2x\cdot\sin^3 2x\,dx.$

95. $\int \sin^2 6x\cdot\cos^3 6x\,dx.$

96. $\int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3x\,dx.$

97. $\int \sin^6 2x\,dx.$

98. $\int \sin^4 7x\cdot\cos^2 7x\,dx.$

99. $\int \frac{1}{\cos^4 4x}\,dx.$

100. $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}.$

101. $\int \frac{1}{\cos^2 3x\cdot\sin^2 3x}\,dx.$

102. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

103. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

104. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x\cdot\cos 4x}.$

105. $\int \frac{dx}{3+\cos x}.$

106. $\int \frac{dx}{1+2\sin \pi x}.$

107. $\int \frac{\sin 2x\ \ dx}{\sin 2x-2}.$

108. $\int \frac{dx}{1+4\cos x\cdot\sin x}.$

109. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x+3\cos 5x\cdot\sin 5x}.$

110. $\int \frac{dx}{3\sin^2 2x-7\cos^2 2x}.$

111. $\int \sin 3x\cdot\cos 5x\,dx.$

112. $\int \sin x\cdot\sin\left(8x+7\right)dx.$

113. $\int \sin x\cdot\cos(4-x)dx.$

114. $\int \sqrt{4+x^2}\,dx.$

115. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx.$

116. $\int \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^3}.$