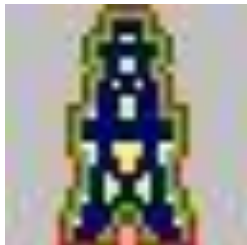


**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА  
имени И.М.ГУБКИНА»**

**Кафедра «Высшая математика»**



**А.Н.Филиппов, Т.С.Филиппова**

**«Определенный и несобственный интегралы и их приложения»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению расчетно-графической работы**

МОСКВА 2010

**Рецензенты:**

Профессор кафедры высшей и прикладной математики МГУПП

**д.ф.-м.н Угрозов В.В.**

Доцент кафедры высшей и прикладной математики МГУПП

**к.ф.-м.н. Иванов В.И.**

**© Филиппов Анатолий Николаевич, Филиппова Тамара Сергеевна**

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания подготовлены в соответствии с новым образовательным стандартом математических дисциплин, в котором расчетно-графическая работа или типовой расчет рекомендованы в качестве основной формы циклического задания для обучения студентов с целью развития навыков самостоятельной работы с новым материалом. Кроме того, данные указания будут полезны студентам альтернативных форм обучения, в том числе овладевающим знаниями по системе дистанционного образования.

Методические указания посвящены освоению техники вычисления определенных и несобственных интегралов и их приложениям. Задачи в каждом варианте подобраны в основном так, что при их решении требуется приложить некоторые усилия при сохранении доступного уровня сложности. Перед решением каждого варианта студенту желательно дать ответы на теоретические вопросы, что, в конечном счете, приведет к более глубокому и прочному усвоению темы «определенный и несобственный интеграл».

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

*(для всех вариантов РГР)*

1. Дать определение понятий «определенный интеграл» и «несобственный интеграл».
2. Что такое интегральная сумма, и какими основными свойствами она обладает?
3. В чем заключается геометрический смысл определенного и несобственного интегралов? Что такое криволинейная трапеция?
4. Какой смысл придается определенному интегралу с физической точки зрения?
5. Чему равен определенный интеграл, если его подынтегральная функция равна единице?
6. Как вычислить среднее «интегральное значение» данной непрерывной на отрезке  $[a,b]$  функции  $f(x)$

7. Можно ли сравнить два определенных интеграла от двух различных функций, заданных на одном и том же отрезке?
8. Можно ли, не вычисляя интеграла, указать числовые границы, в пределах которых находится его значение?
9. Что общего между определенным и неопределенным интегралом для одной и той же функции  $f(x)$ , и какое различие между ними?
10. Запишите формулу вычисления определенного интеграла методом замены переменной.
11. В чем сущность формулы интегрирования по частям?
12. Напишите определенный интеграл от любой четной и нечетной функции  $f(x)$  и вычислите его. Дайте геометрическую интерпретацию результатов вычисления.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ**

*(в каждом отдельном варианте)*

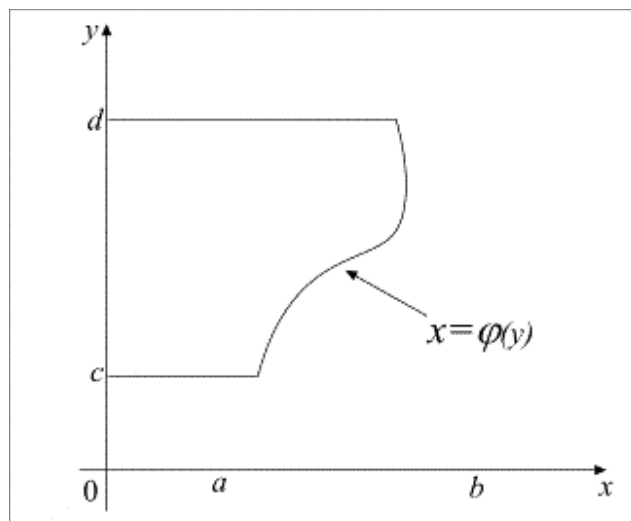
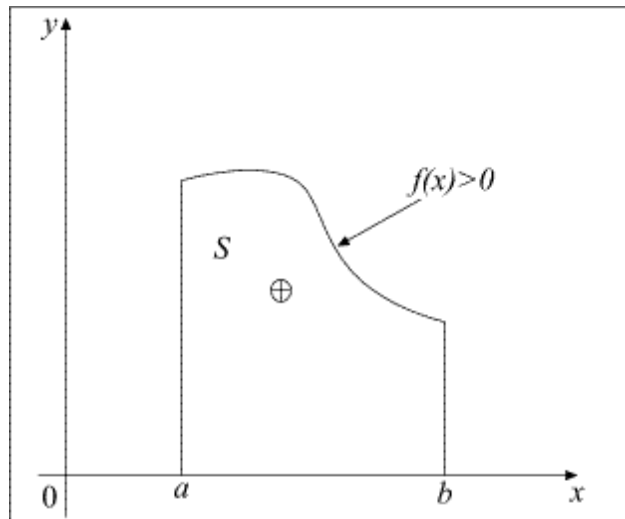
1. Вычислить написанные интегралы, один из которых несобственный.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми в декартовой системе координат (предварительно построить эту фигуру).
3. Построить указанную фигуру в полярной системе координат, определить пределы интегрирования и вычислить ее площадь.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде.
5. Вычислить длины дуг кривых, заданных в декартовой системе координат.
6. Вычислить длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат или в параметрическом виде.
7. Вычислить среднее значение функции или интеграла или оценить интеграл неравенством.
8. Построить плоскую фигуру в декартовой системе координат и затем построить соответствующую фигуру вращения, вычислить ее площадь.
9. Решить прикладную задачу.

# КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

## Площадь криволинейной трапеции

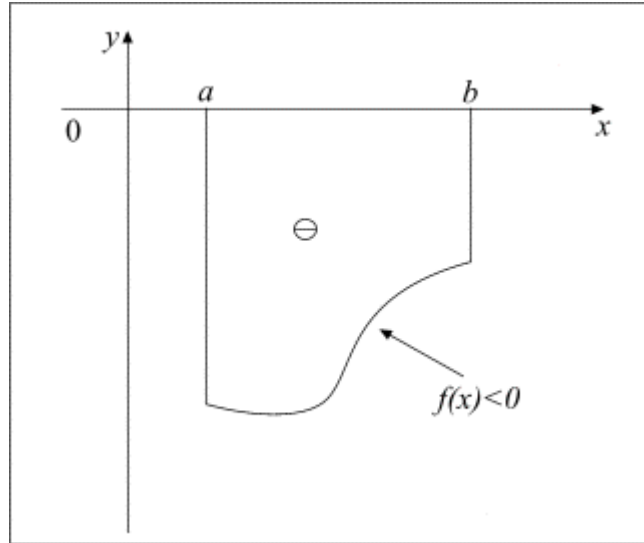
Если заданная непрерывная функция  $f(x)$  знакопостоянна,  $f(x) \geq 0$  или  $f(x) \leq 0$  на некотором отрезке  $[a, b]$ , то за основную фигуру, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейная трапеция с основанием  $[a, b]$  на оси  $Ox$  или с основанием  $[c, d]$  на оси  $Oy$ .

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \geq 0.$$



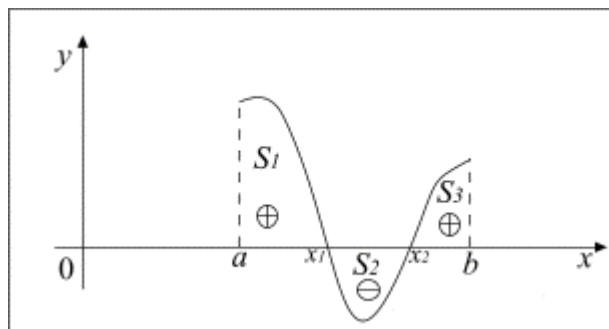
$$S = \int_c^d x dy = \int_c^d \varphi(y) dy$$

Если  $f(x) \leq 0$ , то  $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$ .



Если заданная непрерывная функция знакопеременна на отрезке интегрирования  $[a, b]$ , становясь поочередно то положительной, то отрицательной, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^b f(x)dx.$$



Но  $\int_a^{x_1} f(x)dx = S_1$ , где  $S_1$  - площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a, x_1]$ ;

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -S_2$  где  $S_2$  - величина площади криволинейной трапеции с основанием

$[x_1, x_2]$  под осью ОХ, которая будет отрицательной; аналогично  $S_3 = \int_{x_2}^b f(x)dx$ .

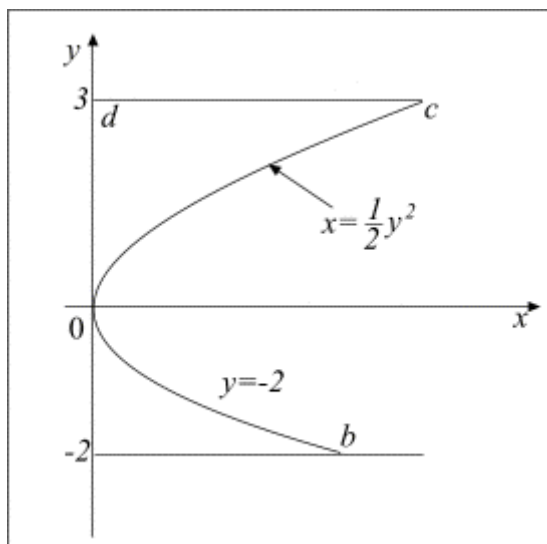
Рассуждения справедливы и в том случае, когда точек пересечения графика с осью ОХ будет любое конечное число, большее двух. Поэтому

$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$ . Таким образом, интеграл по всему отрезку дает алгебраическую разность площадей фигур, расположенных выше и ниже оси ОХ.

Чтобы вычислить площадь всей геометрической фигуры, представленной на рисунке (на отрезке  $[a, b]$ ), нужно вычислить модуль интеграла по отрезку

$$[x_1, x_2], \text{ т. е. } \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = |-S_2| = S_2 \text{ и } \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^b f(x) dx.$$

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

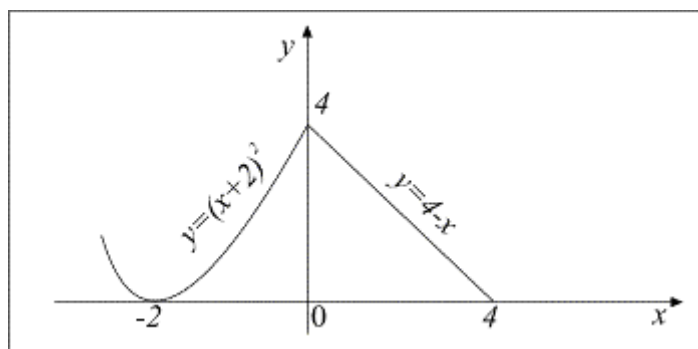


прямыми  $y=-2$ ,  $y=3$ , параболой  $x = \frac{1}{2}y^2$  и осью ординат.

**Решение.**  $S = \int_{-2}^3 \frac{1}{2}y^2 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{1}{6}(27 - (-8)) = \frac{35}{6}$

**Пример 2.** Вычислить площадь, ограниченную осью OX и линиями  $y=(x+2)^2$ ,  $y=4-x$ .

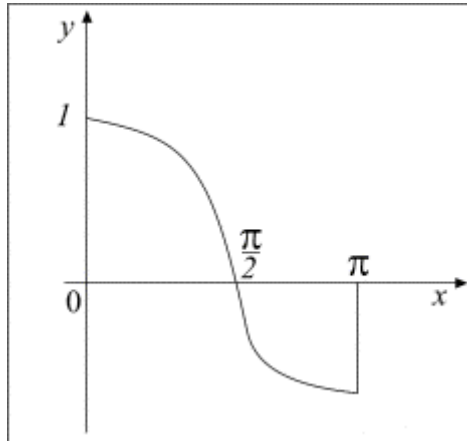
**Решение.** Сначала построим фигуру, ограниченную параболой и прямой. Из графика ясно, что построенная на отрезке  $[-2, 0]$  фигура, (криволинейная трапеция) ограничена одной кривой, на отрезке  $[0, 4]$  – другой, т. е. мы получили другую криволинейную трапецию и поэтому



$$S = \int_{-2}^0 (x+2)^2 dx + \int_0^4 (4-x) dx = 10\frac{2}{3}.$$

**Пример 3.** Вычислить площадь, ограниченную косинусоидой  $f(x)=\cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$

**Решение.** Рассмотрим знак функции  $\cos x$  на всем отрезке  $[0, \pi]$ . На отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$   $\cos x \geq 0$ , а на отрезке  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  -  $\cos x \leq 0$ . Учитывая это, имеем:



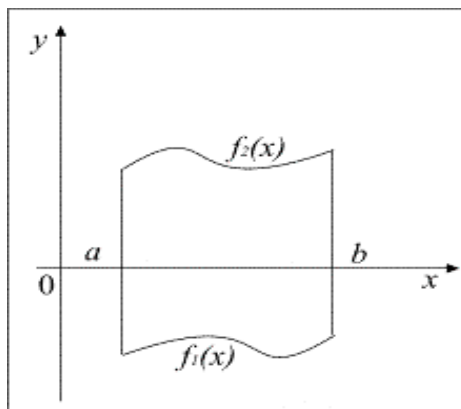
$$S = \int_0^{\pi} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right| = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left| \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \sin \pi / 2 + |\sin \pi - \sin \pi / 2| =$$

$$= 1 + |0 - 1| = 2$$

Заметим, что при этом интеграл  $\int_0^{\pi} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 0$ .

### Площадь фигуры, ограниченной двумя различными кривыми

Предположим что на отрезке  $[a, b]$  заданы две непрерывные функции



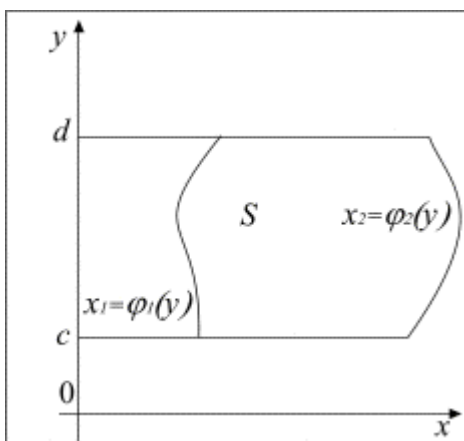


$y_1=f_1(x)$  и  $y_2=f_2(x)$ . Пусть также при всех  $x$  из этого отрезка выполняется неравенство  $f_1(x) \leq f_2(x)$ . Площадь фигуры ограниченной графиками этих функций и прямыми  $x=a$  и  $x=b$  определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (1)$$

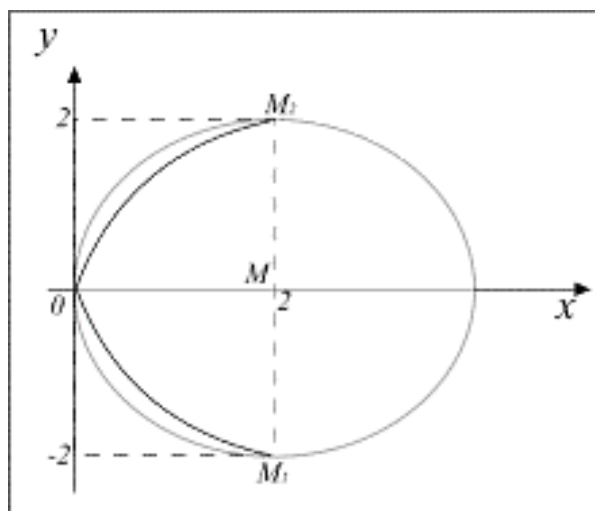
Если же две непрерывные функции относительно  $y$  на отрезке  $[c, d]$  при всех  $y$  из этого отрезка удовлетворяют неравенству  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ , то площадь фигуры, ограниченной функциями  $x_1 = \varphi_1(y)$  и  $x_2 = \varphi_2(y)$  и прямыми  $y=c$  и  $y=d$  вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] dy. \quad (2)$$



**Пример 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y^2=2x$  и окружностью  $y^2=4x-x^2$

**Решение.** Сначала схематически изобразим эту площадь. Из рисунка ви-



дим, что заданные кривые ограничивают две различающиеся плоские фигуры (меньшую и большую). Каждая из этих фигур, в свою очередь, состоит из двух симметричных относительно оси  $Ox$  частей. Поэтому достаточно вычислить площадь верхней части каждой фигуры и затем умножить ее на два. Найдем сначала площадь меньшей фигуры. Преобразуем уравнение окружности и определим координаты ее центра и величину радиуса.

$$y^2 = 4x - x^2 = -x^2 + 4x = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = -[(x-2)^2 - 4] = -(x-2)^2 + 4; \quad y^2 = -(x-2)^2 + 4;$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Следовательно, центр окружности находится в точке  $M(2, 0)$  а ее радиус  $R=2$ . Найдем точки  $M_1$  и  $M_2$  пересечения обеих линий, решая систему двух

уравнений 
$$\begin{cases} y^2 = 4x - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} . 4x - x^2 = 2x; x^2 - 2x = 0; x(x-2) = 0; x_1 = 0, x_2 = 2, y_1 = 0, y_2 = \pm 2.$$

$O(0, 0); M_2(2, 2); M_1(2, -2).$

Найдем уравнение границы  $OM_2$  (части окружности)  $|y_2| = \sqrt{4x - x^2}$ . Из условия на ординаты точек границы  $y_2 \geq 0$  имеем  $y_2 = \sqrt{4x - x^2}$ ; по этой же причине уравнение нижней части границы  $y_1 = \sqrt{2x}$ , на отрезке  $[0, 2]$ .

По формуле (1) находим

$$S = 2 \int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}) dx = 2 \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx - 2\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{x} dx,$$

но  $S_{OMM_1} = \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx$  - это площадь четверти окружности. Площадь всей ок-

ружности равна  $\pi R^2 = 4\pi$ . Второй интеграл легко вычисляется

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ Теперь найдем искомую площадь}$$

$$S = 2\left(\pi - \sqrt{2} \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right).$$

Теперь, чтобы найти площадь большей фигуры, необходимо из площади круга вычесть площадь меньшей фигуры:

$$S_1 = 4\pi - 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right).$$

Проверим значение первого интеграла.

$$\int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx = \int_0^2 \sqrt{(-1)(x^2 - 4x)} dx = \int_0^2 \sqrt{4 - (x - 2)^2} dx. \text{ Обозначим } x-2=2\sin t;$$

$dx=2\cos t dt$ , тогда  $\sqrt{4 - (x - 2)^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2|\cos t|$ ; при  $x=2$ ,  $t=0$ ; при  $x=0$ ,

$t = -\frac{\pi}{2}$  (четвертая четверть). Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4 - (x - 2)^2} dx &= -4 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = -4 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = -2 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \\ &= -2 \left( \left| -\frac{\pi}{2} \right. \right. + \sin 2t \left. \left. \right|_0^{-\frac{\pi}{2}} \right) = -2 \left( -\frac{\pi}{2} - \sin \pi \right) = \pi \end{aligned}$$

**Пример 5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = -2y^2$  и  $x = 1 - 3y^2 \geq -2y^2$

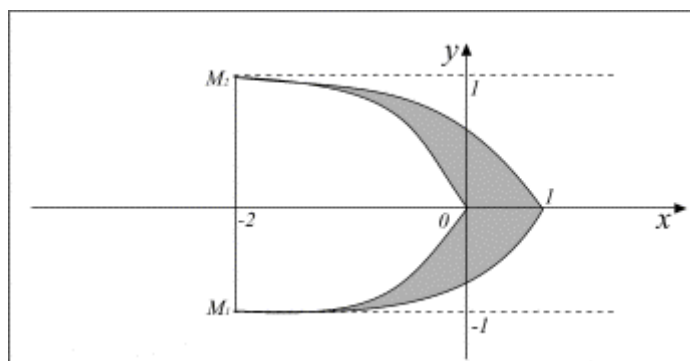
**Решение.** Второе уравнение запишем так  $x - 1 = -3y^2$ , отсюда следует, что  $x - 1 \leq 0$  и  $x \leq 1$ ; это означает, что вся фигура (парабола)  $x = 1 - 3y^2$  расположена левее точки  $x = 1$ ; она симметрична относительно оси  $OX$ , так как при замене  $y$  на  $(-y)$  уравнение не изменяется. Ветви параболы направлены влево; ее вершина находится в точке  $(1, 0)$ . Определим точки ее пересечения с осью  $OY$  ( $x = 0$ );  $3y^2 = 1$ ,  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Ветви второй параболы направлены также влево, а ее вершина совпадает с началом координат.

Определим точки пересечения этих кривых из решения системы

$$\begin{cases} x = -2y^2 \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 = 1 - 3y^2 \\ y^2 = 1; y_1 = 1; y_2 = -1 \end{cases}$$

Одна точка пересечения  $M_1(-2, -1)$  вторая –  $M_2(-2, 1)$ .

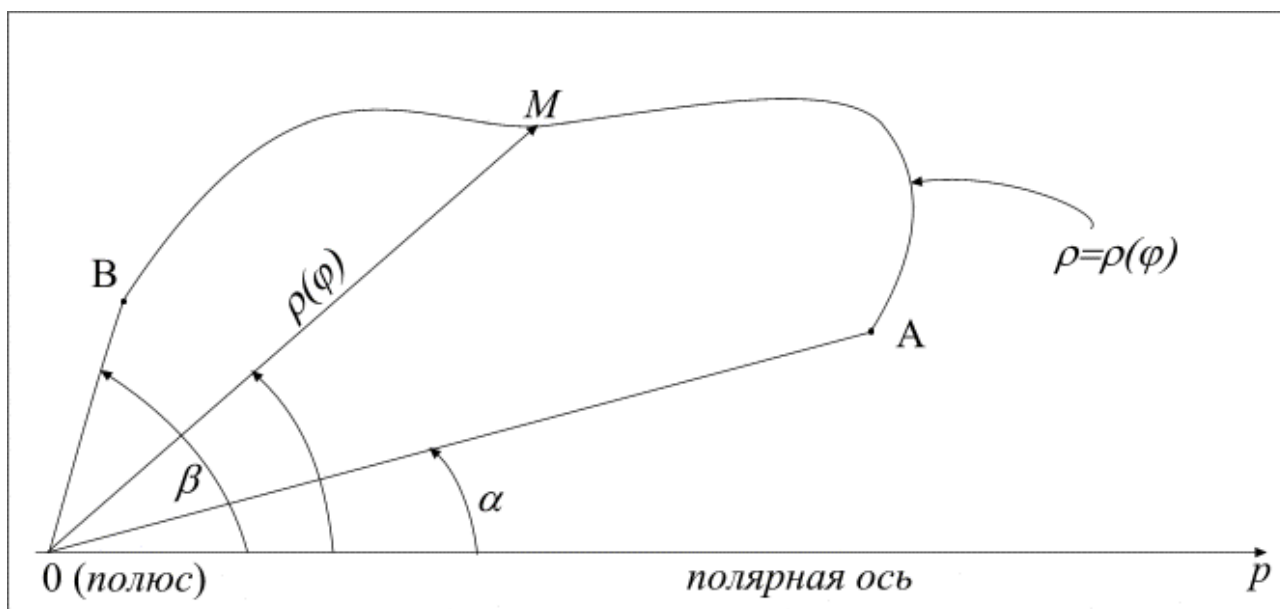
Изобразим эту фигуру на чертеже. Здесь проще вычислить площадь по формуле (2) т. е.



$$S = \int_{-1}^1 [(1 - 3y^2) - (-2y^2)] dy = \int_{-1}^1 (1 - 3y^2 + 2y^2) dy = \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \left( y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

### Площадь в полярной системе координат

В качестве основной фигуры в полярной системе координат, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейный сектор (см. рисунок). Этот сектор ограничен полярными радиусами  $OB$  ( $\varphi = \beta$ ) и  $OA$  ( $\varphi = \alpha$ ) точек  $B$  и  $A$ , а также участком  $AMB$  самой кривой, уравнение которой в полярной системе координат записывается как  $\rho = \rho(\varphi)$ .

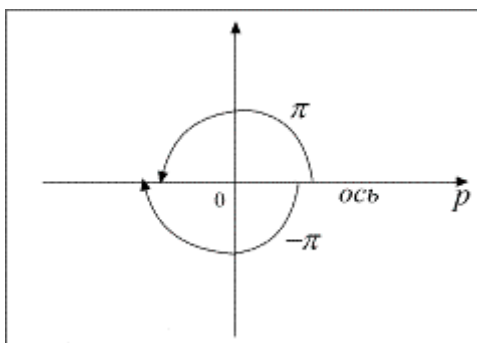


Площадь криволинейного сектора находится по формуле

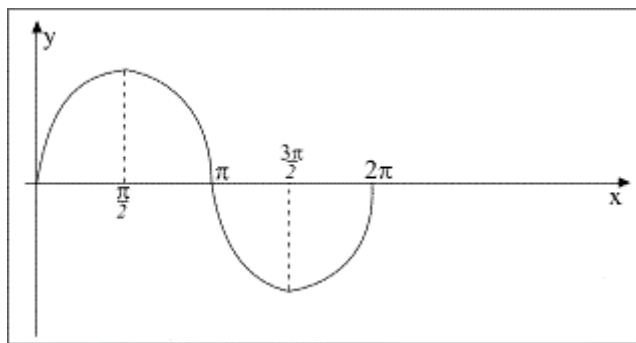
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (3)$$

**Пример 6.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = \sin 2\varphi$

**Решение.** Сначала построим эту фигуру в полярной системе координат, задавая значения аргумента  $\varphi$  полярного угла из интервала  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , учитывая только те из них, которые дают положительные или равные нулю значения полярного радиуса  $\rho$ . Эти значения  $\varphi$  находятся из тригонометрического неравенства  $\sin 2\varphi \geq 0$  ( $\rho \geq 0$ ). Таким образом, вычисляя значения  $\varphi$  из системы неравенств  $\begin{cases} \sin 2\varphi \geq 0 & (4) \\ -\pi < \varphi \leq \pi & (5) \end{cases}$ , установим и пределы интегрирования по переменной  $\varphi$ .



Решим неравенство (4), используя график функции  $y = \sin x$  на одном периоде  $T = 2\pi$ .



Из графика ясно, что если  $0 \leq 2\varphi \leq \pi$  (т.е.  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  - первая четверть полярной системы координат), то первая полуволна синусоиды опирается только на неотрицательные ординаты; в силу периодичности функции все такие полуволны определяются из неравенства

$$0 + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \pi + 2k\pi, \quad \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

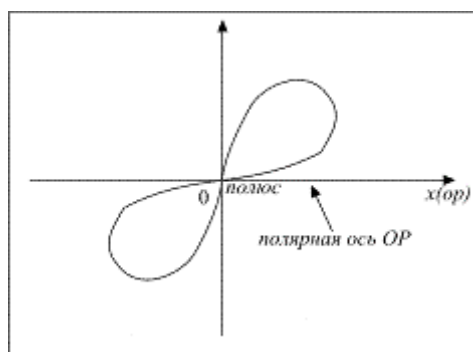
Если же  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$  (вторая четверть), то получаем противоречие неравенству (4) системы.

Вторая полуволна получится из общего неравенства (\*) при  $k=1$  ( $\pi < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$  - третья четверть). При этом получаем противоречие уже неравенству (5) системы. Поэтому другие положительные значения полярного угла рассматривать нет смысла. Остается проверить отрицательные значения, например,  $k=-1$ . Тогда,  $-\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \pi$ , и  $-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$ . Эти значения  $\varphi$  дадут положительные значения полярного радиуса тоже в третьей четверти, что не противоречит неравенству (5). Отсюда ясно, что другие отрицательные значения  $k < -1$  ничего нового не дадут, так как выведут значения  $\varphi$  за пределы, ограниченные неравенствами (4) и (5).

Итак, точки нашей кривой в полярной системе координат будут располагаться только в углах, ограниченных неравенствами:  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  и  $-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$ . Поэтому для построения «по точкам» кривой при составлении числовой таблицы переменных координат  $\rho$  и  $\varphi$ , значения  $\varphi$  надо брать из последних неравенств. Так как функция  $\sin 2\varphi$  нечетная, достаточно построить ветвь кривой в 1-ой четверти значений  $\varphi$  из неравенства  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

$\varphi$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$2\varphi$	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi$
$\rho$	0	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0

Из полюса проводим четыре луча под углами  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$  по отношению



к полярной оси и в выбранном масштабе откладываем значения  $\rho$  из таблицы. Полученные точки соединяем плавной кривой. Вторую ветвь кривой строим путем отражения относительно полюса в силу симметрии. Тогда площадь фигуры в соответствии с формулой (3) равна:

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi) d(4\varphi) = \frac{1}{8} (4\varphi - \sin 4\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} (2\pi - \sin 2\pi) = \frac{\pi}{4} \text{ кв.ед.}$$

Отметим, что после такого исследования пределы интегрирования  $\alpha$  и  $\beta$  в данном примере определяются безо всяких трудностей.

Таким образом, для вычисления площади в полярной системе координат рекомендуется поступать так:

1. Составить систему неравенств типа (4) и (5), решить первое неравенство, используя чертежи.
2. Выяснить, в каких четвертях по углу  $\varphi$ , расположена искомая кривая, и построить ее по точкам, используя, где возможно, свойства симметрии. Если окажется, что форма кривой не совсем ясно проявилась или она искажена, то количество точек расчета нужно увеличить и повторить построение, строго соблюдая выбранный масштаб и процесс построения (откладывания) полярных углов  $\varphi$  и полярных радиусов  $\rho$ .
3. Убедиться, что построенная фигура представляет собой криволинейный сектор, и определить пределы интегрирования  $\alpha$  и  $\beta$ . Затем вычислить площадь фигуры по формуле (3). Если же построенная фигура не оказалась криволинейным сектором, то нужно с помощью полярных радиусов разбить ее на части, каждая из которых уже будет криволинейным сектором, выбрать для каждого сектора пределы интегрирования и вычислить их площадь, суммируя результаты вычислений.

### **Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде**

Если кривая  $y = \phi(x)$  задана двумя уравнениями так, что

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) , \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  - непрерывные функции параметра  $t$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  - известные числа; или их легко найти после построения фигуры.

$$\text{Площадь фигуры } S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \quad (6)$$

$$\text{или } S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (y'_t * x - x'_t * y) dt \quad (7)$$

Применение формулы (7) часто приводит к более простым выкладкам.

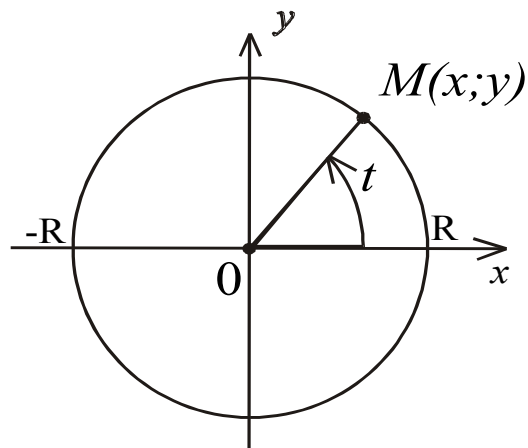
**Пример 7.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = R \cos t \\ y = \psi(t) = R \sin t \end{cases}$$

**Решение.** Выясним, что эта за линия, определив отношения

$(x/R) = \cos t, (y/R) = \sin t$ . Возводя их обе части в квадрат и складывая, получим  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Таким образом, данные параметрические уравнения определяют окружность с центром в начале координат радиусом  $R$ ; параметр  $t$  - угол текущей точки окружности, отсчитываемый от оси  $Ox$ . Из чертежа видно, что когда  $x$  возрастает, изменяется от значения  $x = -R$  до  $x = R$ , точка  $M$  пробегает всю верхнюю часть окружности и параметр  $t$  изменяется от значения  $t = \pi$  до  $t = 0$ . Поэтому



$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{\pi}^0 R \sin t (-R \sin t) dt = \\ &= -2R^2 \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = \end{aligned}$$



$$= 2R^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = R^2 \int_0^{\pi} dt - 2 \frac{R^2}{4} \int_0^{\pi} \cos 2t d(2t) = \pi R^2$$

**Пример 8.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 5\sqrt{2} \sin t \\ y = 5 (y \geq 5) \end{cases}$$

**Решение.** Определим вид линии:  $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{5\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ ,

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{50} = 1$$

Это эллипс, вытянутый вдоль оси ОУ. От начала координат вдоль оси ОХ отложим отрезки  $2\sqrt{2}$  и  $-2\sqrt{2}$ , а вдоль оси ОУ  $5\sqrt{2}$  и  $-5\sqrt{2}$ . Получим прямоугольник размером  $2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$ , внутри которого расположим эллипс. Проводя прямую  $y = 5$ , отсекаем от него часть, расположенную выше этой прямой:

$$\begin{cases} y = 5 \\ y = 5\sqrt{2} \sin t \end{cases} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}, t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ и, в силу симметрии, } t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, рассуждая по аналогии с предыдущим примером, имеем

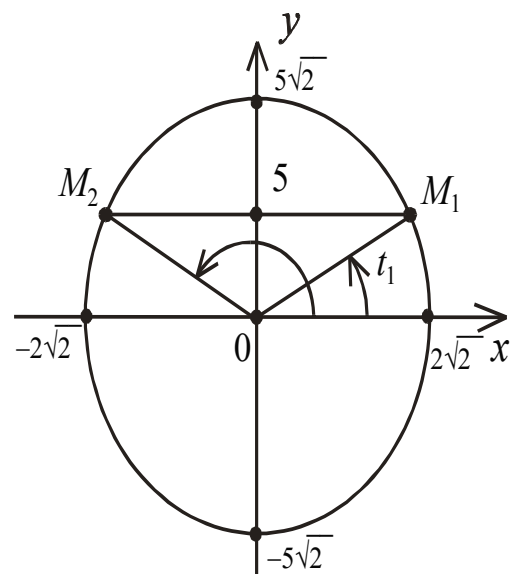
$\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4}$ . Кроме того, ординаты точек отсеченной части эллипса опреде-

ляются уравнением

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ y + 5 = 5\sqrt{2} \sin t \Rightarrow y = 5\sqrt{2} \sin t - 5 \end{cases}, \text{ которое под-}$$

ставляется в формулу (6).

$$S = - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (5\sqrt{2} \sin t - 5) 2\sqrt{2} \sin t dt =$$



$$\begin{aligned}
&= -20 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt + 10\sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt = -20 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - 10\sqrt{2} \cos t \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= -20 * \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - 10\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \\
&= -10 \left( -\frac{\pi}{2} - 1 \right) - 20 = 5(\pi + 2) - 20 = 5(\pi - 10);
\end{aligned}$$

### Длина дуги кривой в декартовой системе координат

Если уравнение кривой задано в виде функции  $y = \phi(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , и она имеет непрерывную производную на  $(a; b)$ , то длина дуги этой кривой, заключенной между точками с абсциссами  $x = a$  и  $x = b$  определяется по формуле

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (\phi'(x))^2} dx \quad (8)$$

Если же кривая определяется уравнением  $x = \varphi(y)$  на отрезке  $[c; d]$  относительно оси ОУ, и функция  $\varphi(y)$  имеет непрерывную производную в промежутке  $(c; d)$ , то

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy \quad (9)$$

**Пример 9.** Вычислить длину дуги окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ ;  $R$  – радиус окружности.

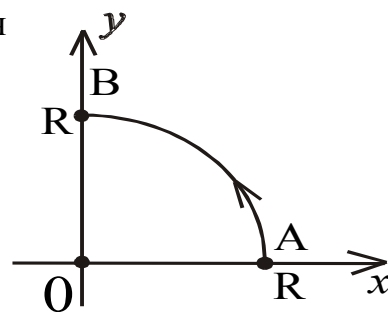
**Решение.** Вычислим производную от выражения

$$x^2 - y^2 - R^2 = 0, \text{ как от неявной функции}$$

$$(x^2 + y^2 - R^2)'_x = 0 \quad 2x + 2y * y'_x = 0.$$

$$y' = -\frac{x}{y}; (y'_x)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{R^2 - x^2};$$

$$1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2};$$



По формуле (8) вычислим длину дуги АВ – четверти окружности.

$$\frac{\ell}{4} = \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R * \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = \frac{\pi R}{2}$$

$\ell = 2\pi R$ . Отметим, что если бы мы нашли  $y^2 = R^2 - x^2$  и затем  $|y| = \sqrt{R^2 - x^2}$  и вычислили производную  $y_x'$ , то затратили больше усилий даже в этой простой задаче.

**Пример 10.** Вычислить длину дуги кривой  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$  заключенную между точками с ординатами  $y = 1$  и  $y = 2$ .

**Решение.** В этой задаче чертеж делать необязательно и за независимую переменную удобнее выбрать  $y$ , тогда

$$x_y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}; \sqrt{1 + (x_y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right)^2} = \left|\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right|, \text{ но по условию } y > 0,$$

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y} > 0, \left|\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right| = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right), \text{ поэтому } \sqrt{1 + (x_y')^2} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}.$$

Итак:  $\ell = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

**Длина дуги кривой, заданной в параметрическом виде**

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме ( $y = \psi(t)$ ) и ( $x = \varphi(t)$ ); причем производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha; \beta]$ , то длина дуги вычисляется по формуле

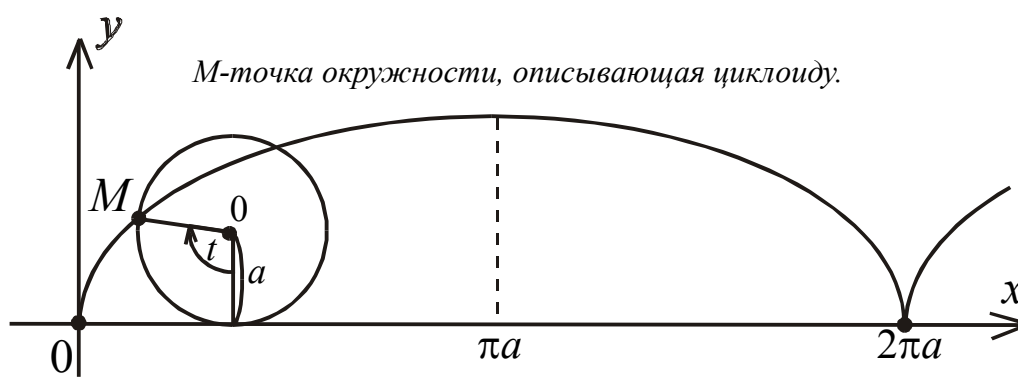
$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{10}$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - значения параметра  $t$ , соответствующие концам рассматриваемое дуги, так, что  $\alpha < \beta$ .

**Пример 11.** Вычислить длину дуги одной арки циклоиды.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

**Решение.** Пусть в начальном положении круг радиуса  $R = a$  касается оси  $OX$  в начале координат так, что его диаметр и центр совпадают с осью  $OY$ . Из этого положения он начинает катиться без скольжения по неподвижной прямой – оси  $OX$ . Совершив при таком движении полный оборот вокруг своей оси (центра), точка  $M$  опишет некоторую кривую, которая и называется аркой циклоиды. Тогда  $x$  пробегает отрезок  $2\pi a$  равный всей длине окружности, так как за один оборот точка  $M$  займет исходное положение на оси  $OX$ . При дальнейшем движении круга получится вся циклоида.



Величина центрального угла  $t$  между диаметрами  $OM$  изменится от значения  $t = 0$  (когда эти диаметры совпадали) до значения  $t = 2\pi$  (точка  $M$  окружности совершила полный оборот). Длина одной арки циклоиды находится при этом следующим образом.

Вычислим:  $x_t' = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2}$ ,  $y_t' = a \sin t = 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$ ;

$(x_t')^2 + (y_t')^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$ . Но, так как,  $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|$ ,  $0 < t < 2\pi$ , а

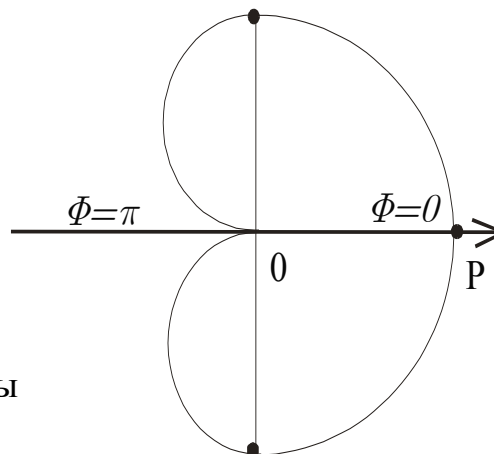
$\sin \frac{t}{2}$  в 1-ой и 2-ой четвертях положителен, т.е.  $\sin \frac{t}{2} \geq 0$  и  $\left| \sin \frac{t}{2} \right| = \sin \frac{t}{2}$ , поэто-

му  $\ell = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a$

## Длина дуги кривой в полярной системе координат

В случае задания линии уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  в полярной системе координат (рисунок на странице 13), длина участка  $AMB$  кривой, ограниченного полярными радиусами  $OB$  ( $\varphi = \beta$ ) и  $OA$  ( $\varphi = \alpha$ ) точек  $B$  и  $A$  находится по формуле:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (11)$$



**Пример 12.** Вычислить длину кардиоиды

$$\rho = a(1 + \cos \varphi).$$

**Решение.** Построим кривую, как показано на рисунке. Поскольку она симметрична относительно полярной оси, то можно найти лишь длину верхней половины кривой от точки, лежащей на луче  $\varphi = 0$  до точки на луче  $\varphi = \pi$  и затем удвоить результат. Так как  $\rho' = -a \sin \varphi$  и  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , то

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} &= \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = a\sqrt{4\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 2a \cos \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, длина кардиоиды равна  $\ell = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a$ .

## Среднее интегральное значение функции

Средним значением непрерывной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется число

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (12)$$

**Пример 13.** Определить среднее значение функции  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  на отрезке  $[0; 1]$ .

**Решение.** 
$$f_{cp} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

### **Оценка интеграла**

На практике часто не требуется знать точное значение интеграла, а нужно знать лишь числа, между которыми находится его величина. Для этой цели используется свойство оценки значения определенного интеграла:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad (13)$$

где  $m$  – наименьшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , а  $M$  – наибольшее её значение на этом отрезке;  $(b-a)$  – длина отрезка.

**Пример 14.** Оценить интеграл  $\int_1^3 \sqrt{3+x^3} dx$ , не вычисляя его.

**Решение.** Рассмотрим подынтегральную функцию  $f(x) = \sqrt{3+x^3}$  на отрезке  $[1; 3]$ . Вычислим её производную, получим, что

$$f'(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}} > 0 \text{ на } [1; 3].$$

Из неравенства следует, что сама функция на данном отрезке монотонно возрастает. Следовательно, свое наибольшее и наименьшее значение она принимает на концах отрезка  $[1; 3]$ , т.е.  $m = f(1) = \sqrt{4} = 2$ ;  $M = f(3) = \sqrt{30}$

Поэтому,  $4 \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \leq 2\sqrt{30}$ .

### **Объем тела вращения**

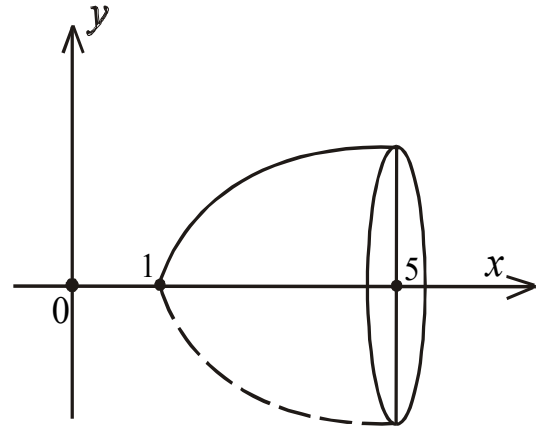
Объем тела вращения находится по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (\phi(x))^2 dx, \quad (14)$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси  $OX$  и

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy, \quad (15)$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси ОУ.



**Пример 15.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ

фигуры, ограниченной линиями  $y = \phi(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $x = 5$ ;  $y = 0$ .

**Решение.** Построим сначала фигуру, исходя из условия задачи. Из чертежа ясно, что это криволинейный треугольник, поэтому

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^5 y^2 dx = \pi \int_1^5 (x-1) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^5 = \\ &= \pi \left( \frac{25}{2} - 5 \right) - \pi \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = 8\pi \end{aligned}$$

### Приложения определенного интеграла в физике

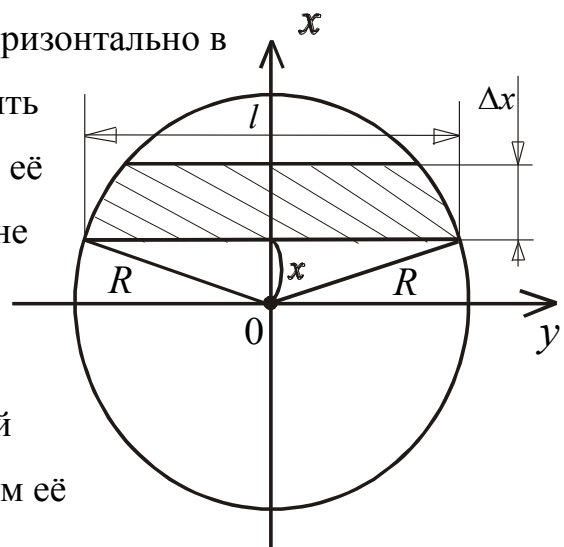
**Задача 1.** Скорость движения точки  $v = 0,5t^3$ . Найти путь  $s$ , пройденный точкой за время  $t = 8$  сек после начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки?

**Решение.** Так как  $\frac{ds}{dt} = v(t)$  или  $\frac{ds}{dt} = 0,5t^3 \Rightarrow ds = 0,5t^3 dt$  причем

$$0 \leq t \leq 8. \text{ Поэтому } s = \int_0^8 0,5t^3 dt = 0,5 \frac{t^4}{4} \Big|_0^8 = 512 \text{ м}; v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{512}{8} = 64 \text{ м/с}.$$

**Задача 2.** Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, может закрываться заслонкой. Определить давление, испытываемое этой заслонкой, если её диаметр  $D=60$  см, а центр находится на глубине 15 м под водой.

**Решение.** Заслонка представляет собой круг. Выберем вертикальную полоску высотой  $\Delta x$  на расстоянии  $x$  от центра круга, обозначим её



длину буквой  $\ell$ . Тогда площадь этой полоски равна

$$\Delta s = \ell * \Delta x,$$

считая приближенно полоску прямоугольной. Это предположение тем точнее,

чем меньше высота полоски  $\Delta x$ . По теореме Пифагора имеем:  $x^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = R^2$ .

Длина хорды, отстоящей на расстоянии  $x$  от центра круга равна:

$\ell = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{30^2 - x^2}$ . Полоска такой длины находится на глубине  $(1500 - x)$  ( $x > 0$  для верхней части круга,  $x < 0$  для нижней части круга). По-

этому элементарная площадь полоски:  $\Delta s = 2\sqrt{30^2 - x^2} * \Delta x$ .

Элементарное давление воды на эту полоску на глубине  $(1500 - x)$  равно

$$\Delta p = \rho g * (1500 - x) * \Delta s = \rho g * (1500 - x) * 2\sqrt{30^2 - x^2} * \Delta x$$

Сила давления на весь круг

$$P = \rho g \int_{-30}^{+30} (1500 - x) * 2\sqrt{30^2 - x^2} dx = 1350000 \rho g \approx 4,16 * 10^{12} \frac{\text{г}}{\text{см сек}^2} = 41,6 \text{ батм.}$$

## ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

### Вариант 1

$$1. \int \frac{xdx}{\sqrt{2-x^2}}; \quad \int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}; \quad \int_0^1 xe^{-x} dx; \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = e^{2x}$ ;  $y = \log_2 x$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$

3. Найти площадь фигуры в полярной системе координат

$$\rho = a \sin 2\varphi; a = \text{const}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, \quad y = 2 (y \geq 2).$

5. Найти длину кривой  $y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ .

6. Найти длину дуги кривой в полярной системе координат  $\rho = 6(1 + \sin \varphi),$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$



7. Оценить интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \sin x} dx$ .

8. Вычислить объем тела, получающегося при вращении параболы  $y^2 = 4x$  вокруг своей оси, ограниченного перпендикулярной к ней плоскостью и отстоящей от вершины параболы на расстоянии, равном единице.

9. Скорость движения точки  $v = e^{-0,01t} \text{ м/с}$ . Вычислить путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

### **Вариант 2**

1.  $\int_2^8 \sqrt{x-1} dx$ ;  $\int_4^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx$ ;  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ ;  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 2x + 1$ ;  $x - y - 1 = 0$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярной системе координат  $r = \cos \varphi$ ;  $r = 2 \cos \varphi$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в параметрическом виде  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}$ ,  $y = 4$  ( $y \geq 4$ ).

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln(x^2 - 1)$ ,  $2 \leq x \leq 3$ .

6. Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$$

7. Оценить интеграл, не вычисляя его  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}$ .

8. Вычислить объем тела вращения вокруг оси  $X$  криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой  $y = \frac{1}{x}$ , прямыми  $x = 2$ ,  $x = 6$  и осью  $OX$ .

9. Тело движется со скоростью  $v = e^{-0,01t} \text{ м/с}$ . Определить закон движения тела, если за 5 секунд оно прошло 105 м.

### Вариант 3

1.  $\int_1^3 x\sqrt{x^2 + 7} dx$ ;  $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ ;  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ ;  $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой  $y = x^2 + 4x - 3$  и касательной к ней в точках  $(0; -3)$  и  $(3; 0)$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярной системе координат  $r = 2 \cos \varphi$ ;  $r = 4 \cos \varphi$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \text{ (в первом квадрате } \frac{\pi}{2} \leq t \leq 0).$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = 1 - \ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/4$ .

6. Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде  $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

7. Оценить интеграл, не вычисляя его  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx$ .

8. Вычислить объем тела, полученного вращением около оси OX, плоской фигуры, ограниченной кривой  $y = x^2$  и прямой  $2y - 3x - 5 = 0$ .

9. Скорость движения точки изменяется по закону  $v(t) = (3t^2 + 2t + 1) \text{ м/с}$ . Вычислить путь, пройденный точкой за 10 секунд от начала движения.

### Вариант 4

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{9}} \sin^2 3x dx$ ;  $\int_1^3 \frac{\sqrt{2+x}}{x} dx$ ;  $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ ;  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля в полярной системе координат  $r = 2a(2 + \cos \varphi)$ ,  $a = \text{const}$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью  $OX$  и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = e^x + 6$ ,  $(\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15})$ .

6. Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$$

7. Оценить интеграл, не вычисляя его  $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx$ .

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $OX$  плоской фигуры, ограниченной кривыми  $x^2 + y^2 = 1$  и  $y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)x$ .

9. Мгновенная скорость движения определяется в зависимости от времени формулой  $v = \sqrt{1+t} \text{ м/с}$ . Определить среднюю скорость движения за 10 секунд от начала движения.

### **Вариант 5**

1.  $\int_2^3 \frac{xdx}{(2+x)(x^2+3)}$ ;  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ ;  $\int_0^3 \ln(x+3) dx$ ;  $\int_0^{\infty} x \sin x dx$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = \ln x$ , осью  $OX$  и прямой  $x = 6$ .

3. Найти площадь, ограниченной кривой  $r = 4 \cos \varphi$  в полярной системе координат.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}, y = 4 \ (y \geq 4)$ .

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \cos x + 2$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ .

6. Найти длину дуги кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

7. Оценить интеграл, не вычисляя его  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 2 \cos x}$ .

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ог-

раниченной осями координат и параболой  $x^2 + y^2 = a^2$ . Предварительно найти отрезок интегрирования путем вычисления точек пересечения кривой с осями координат.

9. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении вдоль прямой. Первое тело движется со скоростью  $v(t) = (6t^2 + 2t) \frac{M}{c}$ , второе – со скоростью  $v(t) = (4t + 5) \frac{M}{c}$ . На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 сек?

### Вариант 6

1.  $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$ ;  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ ;  $\int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx$ ;  $\int_1^{\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{x}} dx$

2. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого от кривой  $y^2 = x^3 - x^2$  хордой  $x = 2$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = 1 + \cos \varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$  и  $y = 6$  ( $y \geq 6$ ).

5. Найти длину дуги кривой  $y = 1 - \ln \cos x$ ,  $\pi/6 \leq x \leq \pi/3$ .

6. Найти длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \\ \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

7. Найти среднее значение функции  $f(x) = \cos^2 x$  на отрезке  $0 \leq x \leq \pi$ .

8. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры,

ограниченной линиями  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $y = b$ ,  $y = -b$ .

9. Скорость движения точки  $v(t) = (12t^2 - 3t) \frac{м}{с}$ . Вычислить путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки. Найти закон ускорения движения точки в зависимости от времени  $t$ .

### Вариант 7

1.  $\int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}$ ;  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin^2 x dx$ ;  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ ;  $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $7x^2 - 9y + 9 = 0$  и

$$5x^2 - 9y + 27 = 0.$$

3. Найти площадь фигуры в полярной системе координат  $r = 2 \sin 4\varphi$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}$  и  $y = 4$  ( $y \geq 4$ ).

5. Найти длину дуги кривой  $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{15}{16}$ .

6. Найти длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ .

7. Вычислить среднее значение функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ .

8. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной ли-

ниями  $y = e^x - 1$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ .

9. Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку с основанием  $b$  и высотой  $h$ , погруженную в воду так, что её вершина лежит на поверхности воды. Произвести расчет для  $h = 9$  и  $b = 4$  м, удельный вес жидкости  $\gamma$ .

### Вариант 8

$$1. \int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}; \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 x dx; \quad \int_0^2 e^{2x} x dx; \quad \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

2. Найти площадь, заключенную между параболой  $y = x^2 - 2x + 2$ , касательной к ней в точке  $M(3;5)$  и осью ординат.

3. Найти площадь области, ограниченной кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$  и лежащей вне кривой  $r = 3a \cos \varphi$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, \quad y = 2 \ (y \geq 2)$ .

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \sqrt{x}, \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{15}$ .

6. Найти длину дуги параметрической кривой  $\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$ .

7. Найти среднюю температуру стержня длины  $\ell = 2\sqrt{2}$ , если распределение температуры вдоль стержня имеет вид  $T(x) = x^2 \sin 5x, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .

8. Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $y = e^x - 1, y = 2, x = 0$  вокруг оси  $OY$ .

9. Вычислить величину давления на полукруг радиуса  $R$ , вертикально погруженный в жидкость, если его диаметр лежит на свободной поверхности жидкости. Принять удельный вес жидкости равным  $\gamma$ .

### Вариант 9

$$1. \int_{-5}^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x+5}}; \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos^2 t}; \quad \int_1^2 x \operatorname{arcctg} \frac{x}{2} dx; \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + x^3}$$

2. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями  $y = x^2$ ,  $y = x^{\frac{2}{9}}$  и  $y = 4$ .

3. Найти площадь фигуры  $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$  в полярной системе координат.

4. Найти площадь, ограниченную линиями  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 5\sqrt{2} \sin t \end{cases}$  и  $y = 5$  ( $y \geq 5$ ).

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \cos x + 2$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ .

6. Найти длину дуги параметрической кривой  $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t) \\ y = 2,5(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ .

Оценить интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ , пользуясь теоремой о среднем значении.

8. Вычислить объем тела, полученный от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией  $y = \arcsin x$  с основанием  $[0;1]$  вокруг оси ОХ.

9. Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли со скоростью  $v(t) = (39,2 - 9,8t) \text{ м/с}$ . Найти наибольшую высоту подъема тела.

### **Вариант 10**

1.  $\int_{-1}^1 x\sqrt{2-x^2} dx$ ,  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}$ ,  $\int_0^{\pi/3} x \cdot \arctg(x) dx$ ,  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $y = \sqrt{4-x^2}$  и осью ОХ.

3. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линиями, предварительно построив эти линии в полярной системе координат:

$$r = 3 + \cos 4\varphi, r = 2 - \cos 4\varphi.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 8 \sin t \end{cases}$ ,  $y = 4$  ( $y \geq 4$ ).

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \frac{5}{2x}$ , ( $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ ).

6. Найти длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ , используя теорему о среднем значении.

8. Построить линию  $y^2=x(x-3)$ . Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс трапеции, лежащей над осью OX и ограниченной этой линией.

9. Два тела движутся по прямой из одной и той же точки. Первое тело движется со скоростью  $v(t)=(3t^2-6t)$  м/с, второе - со скоростью  $v(t)=(10t+20)$  м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?

### Вариант 11

1.  $\int_2^{10} \frac{xdx}{\sqrt[4]{2x^2-1}}$ ,  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ ,  $\int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$ .

2. Вычислить площадь двух частей, на которые круг  $x^2+y^2=8$  разделен параболой  $y^2=2x$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда  $\rho = a\varphi$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. Вычислить длину дуги цепной линии, заданной уравнением

$$y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4}) \text{ от точки } x=0 \text{ до точки } x=4.$$

6. Найти длину дуги параметрической кривой  $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

7. Вычислить среднее значение функции  $y=\cos(2x)$  на отрезке  $[0;\pi/2]$ .

8. Вычислить объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $x = \sqrt{y}$ ,  $5x - y - 4 = 0$ ,  $x = 0$  вокруг оси OY.



9. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического котла с радиусом основания  $R=10$  м.

### Вариант 12

1.  $\int_0^{\pi/4} e^{\cos 3x} \sin 3x dx, \int_5^8 \frac{3x-4}{x^2-4} dx, \int_{\pi}^{\pi/2} x \sin 2x dx, \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-4)^3}}$ .

2. Вычислить площадь каждой из фигур, ограниченных окружностью

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 8 = 0 \text{ и параболой } y = x^2 + 6x + 9.$$

3. Вычислить общую часть площади, заключенную между линиями  $r = 2$  и  $r = 2(1 + \cos \varphi)$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$ , и  $y=2$  ( $y \geq 2$ ).

5. Найти длину дуги кривой  $y=x^2/4-1/2 \ln x$  ( $1 \leq x \leq 2$ ).

6. Найти длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$ .

7. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ , вокруг оси  $OX$ .

8. Вычислить среднее значение функции  $f(x)=10+2\sin^2 x+3\cos^2 x$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

9. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания равен  $R$ , а глубина котла равна  $H$ . Котел наполнен жидкостью с удельным весом  $\gamma$ . Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из котла.

### Вариант 13

1. Вычислить  $\int_1^{10} \sqrt{x-1} dx, \int_0^1 (x-3)e^{-x} dx, \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+5}} dx, \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 6x + 10, y = 6x - x^2.$$

3. Найти площадь, ограниченную кривой  $r = \sin 3\varphi$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$

5. Вычислить длину дуги кардиоиды  $r = 2(1 - \cos \varphi)$ .

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением  $y = \ln \cos x + 2$ ,  $(0 \leq x \leq \pi/6)$ .

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX одного из криволинейных треугольников, образованных линиями  $y = 0$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^{\pi} \sqrt{2 - \cos x} dx$ .

8. Материальная точка движется со скоростью  $v(t) = t/\sqrt{2 + 5t^2}$  м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 10с.

### Вариант 14

1.  $\int_2^0 x\sqrt{4-x^2} dx$ ,  $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ ,  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ ,  $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0,5x^2$ ,  $y = 2x$ .

3. Вычислить площадь, ограниченную линией  $r = a \cos 2\varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ .

5. Вычислить длину дуги  $y = -\ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq 15/16$ .

6. Определить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi/2$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ .

8. Найти объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями  $y=2-x^2$ ,  $y=x^2$ .
9. Материальная точка движется со скоростью  $v(t) = t\sqrt{4+t^2}$  м/с. Вычислить путь, пройденный ею за 20с.

### Вариант 15

1.  $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$ ,  $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$ ,  $\int_2^3 x\sqrt{x^2-4} dx$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 20$ ,  $x^2 + y^2 = 41$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t), y = 6, (y \geq 6) \\ 0 \leq x \leq 8\pi \end{cases}$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$ ,  $3 \leq x \leq 4$ .

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 2.5(t - \sin t) \\ y = 2.5(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^1 \sqrt[3]{4-3x^3} dx$ , не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела вращения, возникающего при вращении фигуры

$$y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0 \text{ вокруг оси ОХ.}$$

9. Цилиндр диаметром 1 м и длиной 3 м заполнен паром под давлением  $10 \text{ кг/см}^2$ . Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в 3 раза, считая, что температура пара остается постоянной?

### Вариант 16

1.  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$ ,  $\int_2^3 \frac{x^2 dx}{(2+x)(x^2-3)}$ ,  $\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+2x} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = (y-2)^3$ ,  $x = 4y - 8$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, y = 3, (0 < x < 4\pi, y \geq 3).$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \operatorname{ch} x + 3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$ , не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{y+1}$ ,  $x = 1$  вокруг оси OX.

9. Вычислить среднюю температуру стержня длины  $L=2$ , если распределение температуры вдоль стержня подчиняется закону  $T(x) = x^2 \cos 4x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

### Вариант 17

1.  $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx$ ,  $\int_1^2 \frac{2x dx}{(2+x)(x+3)}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\cos x} dx$ ,  $\int_2^6 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = (y-2)^3$ ,  $x = 4y - 8$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}, y = 3 (y \geq 3)$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ .

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t \\ y = 10 \sin^3 t \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

7. Доказать, что  $\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ .

8. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями  $y = e^{1-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

9. Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания  $R$ , высота конуса  $H$  и удельный вес материала стержня  $\gamma$ .

**Примечание:** Относительное удлинение  $\varepsilon$  стержня пропорционально напряжению  $\sigma$  в соответствующем поперечном сечении  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ , где  $E$ -модуль Юнга.

### **Вариант 18**

1.  $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{xdx}{(2+x)(9-x^2)}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin x}{5+3\sin x} dx$ ,  $\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = 4 - (y-1)^2$ ,  $x = y^2 - 4y + 3$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми  $r = \cos \varphi$ ,  $r = \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t \\ y = 5\sqrt{2} \sin t \end{cases}, y = 5, (y \geq 5).$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = 2 + \operatorname{ch} x$ ,  $0 \leq x \leq 1$

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t) \\ y = 8(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/4$ .

7. Вычислить среднее значение функции  $f(x) = \frac{1}{x^5 + x}$  на отрезке  $[1; 1,5]$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций  $y^3 = x - 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  вокруг оси  $OY$ .

9. Вычислить работу, затраченную на выкачивание воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания  $r$  и высота  $h$ .

### Вариант 19

1.  $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ ,  $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} xe^{2x} dx$ ,  $\int_1^2 \frac{1-x}{(x^2+x+1)x} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 2$  и  $x^2 + y^2 = 5$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $r = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

4. Вычислить площадь, ограниченную кривыми  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $y = 9, (y \geq 9)$ .

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln \sin x$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ .

7. Оценить интеграл, не вычисляя его  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 3 \cos x}}$ .

8. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой  $y = 2x - x^2$  и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

9. Вычислить массу стержня длины 100 см, если линейная плотность стержня меняется по закону  $\delta = (20x + 0,15x^2)$  г/см, где  $x$ -расстояние от одного из концов стержня.

### Вариант 20

1.  $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\operatorname{ctg} 3x}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$ ,  $\int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^3}$ ,  $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x} dx}{x+5}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной парабололами

$$y=x^2-6x+10, y=6x-x^2.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r=3+2\cos 2\varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2 \quad (y \geq 2).$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$ ,  $\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 1\right)$ .

6. Найти длину дуги кривой  $r=2(1-\cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx$ , не вычисляя его.

8. Найти объем тела вращения, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривыми  $y = \sqrt{x-1}$ ,  $y=0$ ,  $y=1$ ,  $x=0,5$  около оси OX.

9. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 5 см., если сила 0.05 кГ. сжимает ее на 1 см.

### Вариант 21

1.  $\int_0^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$ ,  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ ,  $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $4y=x^2$ ,  $y=4$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r=3\sin 2\varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}, y = 2 \quad (y \geq 2).$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/6$ .

6. Найти длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

7. Оценить интеграл  $\int_0^1 \sqrt[3]{4-3x^2} dx$ , не вычисляя его.

8. Определить объем тела вращения фигуры, образованной линиями  $2x-x^2-y=0, 2x^2-4x+y=0$  вокруг оси ОХ.

9. Скорость движения тела пропорциональна кубу времени. В конце 8-й секунды скорость тела равна 5 м/с. Чему равен путь, пройденный телом за 15с.?

### Вариант 22

1.  $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx, \int_1^e \ln^2 x dx, \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}, \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$

2. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy=1, x=y, y=4.$

3. Вычислить общую часть площади, ограниченную линиями в полярной системе координат  $r=2(1+\cos\varphi), r=2.$

4. Вычислить площадь фигуры  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \frac{2}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}, \left(0 \leq x \leq \frac{25}{9}\right).$

6. Вычислить длину дуги кривой  $r=7(1-\sin\varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$

7. Доказать, что  $\frac{2}{5} \leq \int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y^2=4-x$  и  $x=0$  вокруг оси ОУ.

9. Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина лежит на глубине 4 м.

### Вариант 23

1.  $\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg} 2x dx, \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{2-x^2}}, \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x - e^{-x}}}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$



2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2-2x$ ,  $y=x$ .
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат  $r=3\sin 2\varphi$ .
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией
 
$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi.$$
5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \arcsin e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
6. Вычислить длину дуги кривой  $r=2e^{3/4\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ .
7. Доказать, что  $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{8}$ .
8. Найти объем тела вращения, если вокруг оси OY вращается фигура, ограниченная линиями  $y=(x-1)^2$ ,  $y=1$ .
9. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой  $a=10$  м, верхнее  $b=6$  м и высота  $h=5$  м, если уровень погружения нижнего основания  $s=20$  м.

#### Вариант 24

1.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{3}\sqrt{7-x^2}}$ ,  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx$ ,  $\int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{x dx}{3+2\sqrt{x}}$ .
2. Найти площадь фигуры между линией  $y=xe^{-x^2/2}$  и ее асимптотой.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r=a(1+\sin\varphi)$ .
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $y=3$  ( $y \geq 3$ ).
5. Вычислить длину дуги линии  $y=0,5x^2$ , отсеченной прямой  $y=2$ .
6. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями  $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ .
7. Оценить интеграл  $\int_0^1 \sqrt[3]{4-3x^2} dx$ , не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, образованной кривыми  $y=x^2$  и  $y^2=x$  около оси ОХ.

9. Какую работу надо затратить, чтобы тело массой  $m$  поднять с поверхности земли на высоту  $h$ ? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено в бесконечность?

### Вариант 25

1.  $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx, \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^2}, \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} dx}{x+5}, \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 2x$  и  $y = x$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат  $r=4+\cos 2\varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2\sqrt{2} \sin t \end{cases}$

$$y = 2, (y \geq 2).$$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y^2 = 4/9(2-x)^3$ , отсеченной прямой  $x = -1$ .

6. Вычислить длину дуги параметрической кривой  $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^1 \sqrt[3]{5-4x^2} dx$ , не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОУ фигуры,

ограниченной дугой кривой  $x^{\frac{2}{3}} = y$ , линиями  $x=0$ ,  $x=3$  и  $y=0$ .

9. Вычислить кинетическую энергию диска массы  $M$  и радиуса  $R$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  около оси, проходящей через его центр, перпендикулярно к его плоскости.

### Вариант 26

1.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx, \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx, \int_0^2 \frac{x^2 dx}{1+x^3}, \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)(x^2+1)}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 4+x$ ,  $x+3y=0$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = \cos 2\varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  
 $y = 12, (y \geq 12), (0 \leq x \leq 16\pi)$ .

5. Вычислить длину дуги параболы  $y = x^2/2 - 1$ , отсеченной осью ОХ.

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t) \\ y = 8(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ .

7. Оценить интеграл  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx$ , не вычисляя его.

8. Найти объем тела, образующегося при вращении вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{x-4}, y = 0, y = 2, x = 2$ .

9. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своего диаметра?

### Вариант 27

1.  $\int_0^1 x e^{2x^2} dx, \int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{3} dx, \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx, \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x-2)^3, y = 4x - 8$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ ,

$y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3})$ .

5. Найти длину дуги кривой  $y = \ln(1-x^2)$  от точки  $x = -\frac{1}{2}$  до  $x = \frac{1}{2}$ .

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \pi \leq t \leq 2\pi$ .

7. Оценить интеграл  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ , не вычисляя его.

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2, y = 2 - x, x = 0$  вокруг оси ОХ.

9. Пружина имеет длину 20 см. Сила в 10 кГ растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 до 35 см.

### Вариант 28

1.  $\int_{-1}^{-6} \sqrt{3-x} dx$ ,  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$ ,  $\int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = \arccos x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = \cos \varphi + \sin \varphi$ .

4. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ ,

$$y = 9, (y \geq 9), 0 \leq x \leq 12.$$

5. Найти длину дуги кривой  $y = -\ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

6. Определить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ .

7. Оценить интеграл  $\int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$ , не вычисляя его.

8. Определить объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = \pm 1$  около оси ОУ.

9. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность воды 1000 Кг/м<sup>3</sup>), наполняющей аквариум, на одну из 4-х его вертикальных стенок, размеры которой 0,4м х 0,7м.

### Вариант 29

1.  $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ ,  $\int_2^8 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ,  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$ ,  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x/2} dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = 5(1 - \sin \varphi)$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ .

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln \sin x$  от  $x = \pi/3$  до  $x = \pi/2$ .

6. Вычислить длину одной арки циклоиды  $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$ .

7. Доказать, что  $9 \leq \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2} dx \leq 9,5$ , не вычисляя интеграла.

8. Найдите объем тела, образованного вращением параболы  $y^2 = 4ax$  вокруг оси ОХ от ее вершины до точки  $x = 3a$ .

9. Материальная точка движется со скоростью  $v(t) = \arctg t$  м/с. Вычислить путь, пройденный за 20 секунд с момента начала движения.

### **Вариант 30**

1.  $\int_1^3 x\sqrt{x^2-1} dx, \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx, \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (1/4)x^2, y = 3x - x^2/2.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = \cos \varphi - \sin \varphi.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ ,

$y = 12, (y \geq 12), 0 < x < 16\pi.$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}, \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$

7. Оценить интеграл  $\int_0^1 \sqrt{1+2x^3} dx$ , не вычисляя его

8. Найти объем тела вращения, если вокруг оси ОУ вращается фигура, ограниченная линиями  $y = (x-1)^2, y = 1.$

7. Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиной в 5 м, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром в 1 м, а удельный вес железобетона  $2500 \text{ кг/м}^3$ .

### Вариант 31

1.  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx, \int_2^4 x^2 \sqrt[3]{x^3 - 8} dx, \int_1^2 x \ln(x+1) dx, \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=16/x^2, y=17-x^2, (x \geq 0, y \geq 0)$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $r=1/2 + \sin \varphi$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$ ,

$y=15, (y \geq 15), 0 \leq x \leq 20\pi.$

5. Вычислить длину дуги кривой  $y=\ln(x^2-1), 2 \leq x \leq 3.$

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \pi \leq t \leq 2\pi.$

7. Доказать, что  $\frac{2}{5} \leq \int_1^2 \frac{xdx}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}.$

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y=-x^2+5x-6, y=0$  вокруг оси ОХ.

9. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см., один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

### Вариант 32

1.  $\int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}}, \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx, \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}, \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $x=y^2+2y$ ,  $x=(y+2)^2$ ,  $x=-y$ ,  $(-1 \leq x \leq 1)$ .

3. Вычислить общую часть фигуры, образованную линиями  $r^2=4\cos 2\varphi$ ,  $r=\sqrt{2}$ .

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$ ,  $y=2$ ,  $(y \geq 2)$ .

5. Вычислить длину дуги кривой  $y=5+\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

6. Вычислить длину дуги кривой  $\begin{cases} x=3,5(2\cos t - \cos 2t) \\ y=3,5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

7. Оценить интеграл, не вычисляя его  $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x} dx}{x+2}$ .

8. Вычислить объем тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2+1$ ,  $y=x$ ,  $x=0$ ,  $x=1$  вокруг оси ОУ.

9. Цилиндр диаметром 50 см. длиной 200 см. заполнен паром под давлением 20 кг/см<sup>2</sup>. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в 4 раза, считая, что температура пара остается постоянной?

### **\*Несобственный интеграл и его вычисление**

Если подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней или граничной точке отрезка интегрирования  $[a;b]$ , или же сам интервал интегрирования является бесконечным, то мы имеем дело уже не с определенным, а с **несобственным интегралом**. В этом случае значение интеграла определяется с помощью понятия предела.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ,  $(b > a)$ .

**Решение:**

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(p-1)(x-a)^{p-1}} \Big|_{a+\varepsilon}^b, \text{ при } p > 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{(x-a)^{1-p}}{(1-p)} \Big|_{a+\varepsilon}^b, \text{ при } p < 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|x-a| \Big|_{a+\varepsilon}^b, \text{ при } p = 1 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(p-1)(\varepsilon)^{p-1}} - \frac{1}{(p-1)(b-a)^{p-1}}, \text{ при } p > 1 \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{(\varepsilon)^{1-p}}{(1-p)}, \text{ при } p < 1 \\ \ln|b-a| - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|\varepsilon|, \text{ при } p = 1 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} +\infty \text{ (расходится) при } p \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)} \text{ (сходится) при } p < 1 \end{cases}.$$

**Пример 2.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ .

**Решение:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 xe^{-x^2} dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B xe^{-x^2} dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 e^{-x^2} d(-x^2) - \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow -\infty} e^{-x^2} \Big|_A^0 -$$
$$-\frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \Big|_0^B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow -\infty} e^{-A^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-B^2} = 0.$$

Таким образом, указанный интеграл сходится и равен нулю.



## Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	3
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ</b>	3
<b>ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ</b>	4
<b>КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ</b>	5
Площадь криволинейной трапеции	5
Площадь фигуры, ограниченной двумя различными кривыми	8
Площадь в полярной системе координат	12
Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде	15
Длина дуги кривой в декартовой системе координат	18
Длина дуги кривой, заданной в параметрическом виде	19
Длина дуги кривой в полярной системе координат	21
Среднее интегральное значение функции	21
Оценка интеграла	22
Объем тела вращения	22
Приложения определенного интеграла в физике	23
<b>ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА</b>	24
*Несобственный интеграл и его вычисление	47

Анатолий Николаевич Филиппов  
Тамара Сергеевна Филиппова

Кафедра  
“Высшая математика”  
Считка авторская