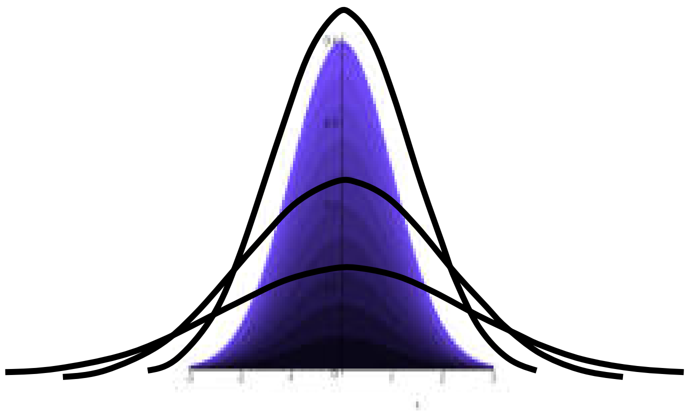
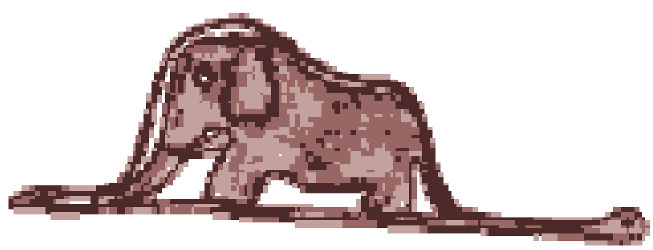
В.В. Калинин, Н.О. Фастовец

ВЕРОЯТНОСТЬ в примерах и задачах

для нефтегазового образования





Москва 2004

Введение

Теория вероятностей, как никакой другой раздел математики, может быть активно использована для описания окружающей нас действительности. Множество событий, происходящих в мире, носит случайный характер, или, по крайней мере, кажутся нам такими. Скажем, студент взял на экзамене билет и обнаружил, что ему достался тот единственный вопрос, который он не успел выучить. Автомобилист поехал на работу и из-за пробок провел в пути 2 часа вместо обычных 40 минут. Ваша любимая черная собачка Пегги родила четырех черных щенков, а одного почему-то белого. Это всё проявления случайного. Конечно, в каждом из этих случаев можно докопаться до причин, по которым произошло то или иное событие: прадед Пегги был белого цвета, пробка образовалась из-за ремонта улицы, «плохой» билет лежал сверху. Чаще всего, однако, причин, приведших к определенному событию либо слишком много, либо они вообще неизвестны. Так что, сложить руки и принимать случайность как неизбежное?! Вовсе нет! Во многих случаях удается увидеть за множеством случайных явлений некоторые закономерности. Если вы подбрасываете монету один раз, то выпадение «орла» или «решки» случайно. Но если монета подброшена 100 раз, то количество «орлов» и «решек» близко к 50. Значит, закономерность все-таки есть, и именно теория вероятностей позволяет ее выявить.

Правда, нельзя полностью полагаться на теорию вероятностей. Приведем здесь в этой связи два шуточных примера.

1. Известно, что на экзамене в ГАИ 80% (т.е. четыре пятых) пришедших не могут с первого раза сдать вождение автомобиля. Вы пришли в ГАИ и узнали, что 4 человека до вас экзамен провалили. Как вы думаете, ваши шансы резко возросли от этого?

2. Как мы знаем, среди людей примерно половину составляют женщины, а половину – мужчины. Молодой математик предложил поспорить и поставил свой автомобиль против велосипеда, что среди первых 50 человек на улице окажется хотя бы одна женщина. Пожилой математик подумал и принял предложение. Когда они вышли на улицу, мимо как раз проходила рота солдат!

Эти два примера очень хорошо демонстрируют сильные и слабые стороны теоретико-вероятностного описания явлений. Если собрать данные о сдаче экзамена в ГАИ, скажем, за месяц, то число успешно сдавших, действительно, оказалось бы близким к четырем пятым всех претендентов. Если бы два математика простояли на улице целый день, то, скорее всего, выиграл бы молодой, поскольку число прохожих обоих полов оказалось бы приблизительно равным.

Для того чтобы научится использовать теорию вероятностей, понимать ее возможности и ограничения, необходимо, прежде всего, научиться решать ее стандартные задачи. Настоящий сборник и ставит своей целью познакомить читателей с основными классами задач, решаемых методами теории вероятностей. В сборнике приведены сведения из теории, примеры решения задач и задачи для самостоятельного изучения. Издание предназначено как для студентов, изучающих соответствующий курс, так и для специалистов, ставящих своей целью вспомнить основные подходы к решению задач теории вероятностей.

Материалы, связанные с данным изданием, можно найти на сайте
кафедры высшей математики РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина:
http://kvm.gubkin.ru/Index.html

Оглавление

1. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Событие, относящиеся к результату некоторого испытания (эксперимента), которое может при наличии некоторого комплекса условий S произойти или не произойти, называется ***случайным событием***.

Событие, которое в результате испытания

– наступит всегда, называется ***достоверным событием***;

– не наступит никогда, называется ***невозможным событием***.

Случайные события будут обозначаться буквами A, B, C, …; достоверные – Ω, невозможные – $\varnothing$.

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, (или иначе, $C = A \cup B$), которое произойдет, если произошло хотя бы одно из этих событий A или B (рис. 1.1).

Произведением двух событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, (или $C = A \cap B$), которое произойдет, если произошли оба события A и B (рис. 1.2).

Разностью двух событий A и B называется событие $C = A - B$ (или $C = A \setminus B$), которое произойдет, если произошло событие A, но не произошло событие B (рис. 1.3).

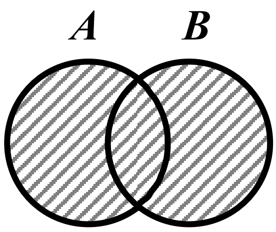


Рис. 1.1 $A + B$

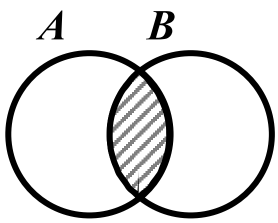


Рис. 1.2 $A \cdot B$

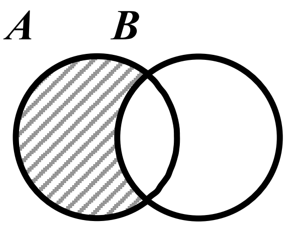


Рис. 1.3 $A \setminus B$

Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется ***противоположным*** событию A, если оно наступает тогда и только тогда, когда не происходит событие A (рис. 2.1). Если каждое появление события A влечет за собой появление события B, то говорят, что ***из** A **следует*** B, и пишут: $A \subset B$ (рис. 2.2). Если одновременно имеют место соотношения $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называют ***равносильными***. События называются ***несовместными*** в данном испытании, если они не могут произойти вместе, т.е. $A \cdot B = \varnothing$.

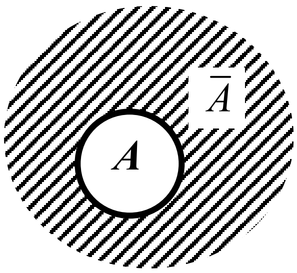


Рис. 2.1 Событие $\overline{A}$.

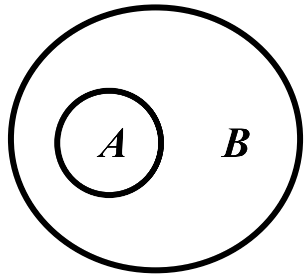


Рис. 2.2 $A \subset B$

Полной группой событий называются такие события $A, B, C, \ldots$, что при всякой реализации комплекса условий S хотя бы одно из них обязательно происходит, то есть $A+B+C+\ldots= \Omega$.

Действия над событиями могут быть проиллюстрированы с помощью ***диаграмм Венна***, которые и представлены на рис.1 и 2.

ПРИМЕР. Пусть A, B и C – события, означающие попадание точки соответственно в области A, B и C (рис. 3а).

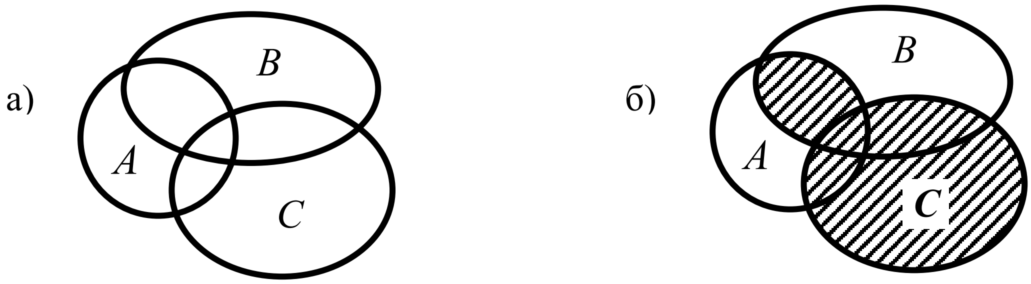


Рис. 3. Иллюстрация примера

Что означает событие $A \cdot B+C$?

Решение. Событие $A \cdot B+C$ означает попадание в область $(A \cap B) \cup C$, которая заштрихована на рис. 3б.

Задачи к разделу 1.

1.1. Какие из написанных утверждений верны:

а) $ABC \subset AB + AC + BC$ б) $A\overline{B}C \subset A + B$

в) $AB + AC + BC \subset A + B + C$ г) $(A+B)\overline{C} = A + B\overline{C}$

д) $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A+B}$ е) $\overline{A+B+C} = \overline{ABC}$

ж) $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A+B}$ з) $(A+B)C = AC + BC$

1.2. Судно имеет рулевое устройство, 4 котла и 2 турбины. Событие A означает исправность рулевого устройство, B_k ($k = 1, 2, 3, 4$) – исправность k-го котла, событие C_i – исправность I-ой турбины ($i = 1, 2$). Событие D – судно управляемо – обеспечивается при исправности рулевого управления, хотя бы одного котла и хотя бы одной турбины. Выразить событие D через события A, B_k и C_i.

1.3. Электрические цепи составлены по схемам, изображенным на рис. 4 а), б), в), г). Событие A_k ($k = 1, 2$) – выход из строя элемента A_k , событие B_i ($i = 1, 2$) – выход из строя элемента b_i, событие C – выход из строя элемента c. Для каждой из схем записать событие E – разрыв цепи, а также событие $\overline{E}$.

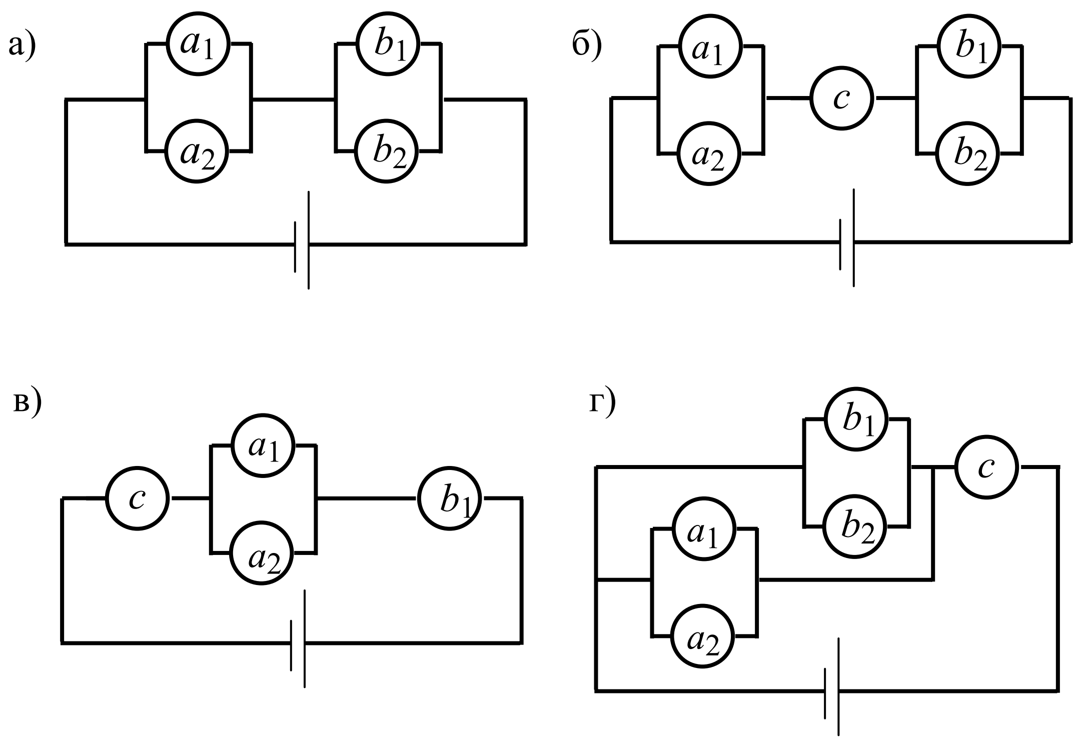


Рис. 4. К задаче 3

1.4. Деканат решил проконтролировать посещение лекции по высшей математике четырьмя нерадивыми студентами. Каждый из них может быть или не быть на этой лекции. Рассматриваются события:

A – на лекции был ровно один из 4 студентов;
B – на лекции был хотя бы один из студентов;
C – на лекции было не менее 2 студентов;
D – на лекции было ровно 2 студента;
E – на лекции было ровно 3 студента;
F – на лекции были все 4 студента.

Описать события:

1) $A+B$; 2) AB; 3) $B+C$; 4) BC; 5) $D+E+F$; 6) BF.

Совпадают ли события BF и CF ? BC и D ?

1.5. Нефтеналивной порт имеет 5 причалов. Событие A – занято четное число причалов, событие B – занят хотя бы один причал. Описать события $A+B$ и AB.

1.6. Событие Z состоит в том, что при сдаче экзамена по математике тремя студентами хотя бы один из них получил положительную оценку. Что представляет собой событие $\bar{Z}$.

1.7. Что представляют собой события ABC и $A+B+C$, если

а) $A \subset B$ и $A \subset C$ б) $B \subset C$ и $A \subset B$ в) $B \subset C$ и $A \subset C$

1.8. При каких условиях справедливы соотношения:

а) $A+B=AB$ б) $A+\bar{A}=A$ в) $A \cdot \bar{A}=A$ г) $(A+B)-B=A$

1.9. Связь между вычислительным центром и управлением магистральных трубопроводов осуществляется по трем каналам. По каждому каналу может быть передан сигнал о нормальной работе или об отказе. При передаче сигнал может быть искажен, поэтому информация считается верной только в том случае, если хотя бы два канала передали одинаковый сигнал. Выразить события: а) принят сигнал о нормальной работе объекта; б) принят сигнал об отказе.

1.10. Бросается игральная кость. Рассматриваются события: A – выпало четное число очков; B – выпало нечетное число очков; C – выпало число очков, большее трех. Описать события: $(A+B)\,C$, $AC+B$, $BC+A$, $(A+C)\,B$.

2. Классическое определение вероятности. Задача о выборке. Геометрическая вероятность

Вероятность характеризует степень объективной возможности наступления данного события. События A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) называются ***равновозможными***, если при реализации некоторого комплекса условий каждое из них имеет одинаковую возможность наступить. Например, при бросании монеты равновозможно выпадение орла и решки, а при бросании игральной кости – выпадение любого количества очков от 1 до 6.

Пусть достоверное событие Ω распадается на n равновозможных и попарно несовместных событий A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), то есть

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i, \qquad A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

Такие события образуют ***полную группу*** попарно несовместных событий.

Пусть событие A представляет собой сумму некоторых m событий, выбранных из событий A_i. Тогда ***вероятность события*** A равна отношению числа m событий, благоприятствующих событию A, к числу n всех равновозможных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Это и есть ***классическое определение вероятности***.

Для вычисления вероятностей событий используют формулы ***комбинаторики***:

❶ ***размещения с повторениями.*** Если n – количество различных видов элементов, k – количество элементов, которые входят в группу. Тогда общее число таких групп будет n^k (в группу могут входить элементы одного вида).

❷ ***размещения без повторений*** получаются, если в группу не могут входить два или более элементов одного вида, т.е. выбираются k элементов из общего количества n с учетом их порядка. Общее количество таких групп будет

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

❸ ***перестановки*** получаются, если $n=k$, т.е. в группе из n элементов эти элементы можно переставлять в различных порядках. Таких групп будет

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...\cdot 1 = n!$$

В рассмотренных выше случаях 1 – 3 составленные группы считаются различными, если в них хотя бы на одном месте стоят элементы различных видов.

❹ ***сочетания*** получаются, если группы из k элементов отличаются только составом элементов, а не их порядком. Другими словами, в группу выбираются k элементов из n без учета порядка. Число таких групп равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ПРИМЕР 1. В урне лежат 15 шаров, из которых 6 белых и 9 чёрных. Какова вероятность, что: а) наудачу извлечённый шар будет белым? б) вынутые наудачу два шара окажутся белыми?

Решение.

а) Данное испытание имеет $n=15$ равновозможных исходов (общее количество шаров). Пусть событие A – извлечённый шар оказался белым. Для события A благоприятны $m=6$ исходов (количество белых шаров). Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

б) Пусть событие B – наугад извлечённые два шара оказались белыми. Проводимое испытание (извлечение двух шаров) имеет $n = C_{15}^2$ равновозможных исходов (способов выбора двух шаров из имеющихся 15 без учета их порядка). Благоприятен событию B выбор любых двух белых шаров. Число способов выбора 2 белых шаров (без учета порядка) из общего их количества (6 штук) равно числу сочетаний из 6 элементов по 2: $m = C_6^2$. Следовательно, по классическому определению вероятности $P(B) = \frac{C_6^2}{C_{15}^2} = \frac{1}{7}$.

Задача о выборке.

Среди N предметов имеется m отмеченных. Наудачу выбрали n предметов. Найти вероятность, что среди них окажется ровно k ($k \leq m$) отмеченных?

<u>*Решение.*</u> Всего существует $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ способов выбрать n предметов из N (без учета порядка). Отмеченные k предметов должны быть отобраны среди их общего числа m. Таких способов существует C_m^k. Среди отобранных должно находится $n-k$ неотмеченных предметов из их общего количества $N-m$. Существует C_{N-m}^{n-k} способов отбора неотмеченных предметов. Тогда общее количество благоприятных исходов испытания есть $C_m^k C_{N-m}^{n-k}$. Искомая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к общему количеству исходов испытания:

$$\boxed{P = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}}$$

ПРИМЕР 2. В студенческой группе 20 человек, среди которых 5 отличников. Деканат случайным образом отобрал от группы для участия в конференции трудового коллектива 3 человек. Какова вероятность, что среди них окажется 2 отличника, которые сорвут план двоечников голосовать за удаление из учебной программы факультета дисциплины «Высшая математика»?

<u>*Решение.*</u> Воспользуемся формулой, полученной в задаче о выборке. Здесь отличники играют роль отмеченных предметов: $N = 20$ (общее количество студентов в группе), $m = 5$ (количество отличников), $n = 3$ (количество ото-

бранных на конференцию), $k=2$ (количество отличников среди отобранных). Тогда искомая вероятность

$$P=\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}=\frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{15!}{1!14!}}{\frac{20!}{17!3!}}=\frac{\frac{5\cdot 4}{2!}\cdot\frac{15}{1}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}}=\frac{150}{20\cdot 19\cdot 3}=\frac{5}{38}.$$

(Вероятность невелика – скорее всего, математику отменят!)

Геометрическая вероятность.

Пусть в область G бросается наудачу точка. Вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой части (длине, площади или объёму) и не зависит от её расположения и формы. Таким образом, если событие A – попадание точки в область g, являющейся частью области G, то

$$P(A)=\frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}=\frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

ПРИМЕР 3. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. В круг наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри треугольника (рис. 5).

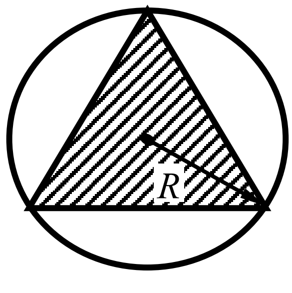


Рис. 5. К примеру 3.

Решение. Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади круга:

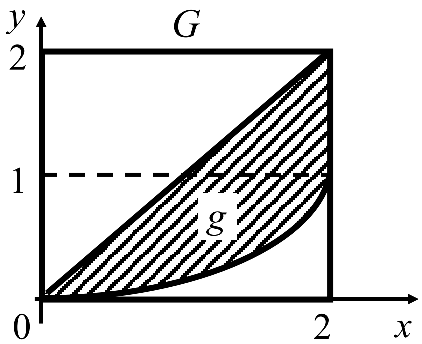
$$P=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0{,}4137$$

ПРИМЕР 4. На отрезке $[0;2]$ наудачу выбраны два числа: x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2\le 4y\le 4x$.

Решение. По условиям опыта координаты точки $(x; y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

то есть точка $(x; y)$ наудачу выбирается из множества точек квадрата со стороной 2. Интересующее нас событие происходит случае, если точка окажется в области g, определяемой неравенствами $x^2 \le 4y \le 4x$. На рис. 6 эта область заштрихована. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры (g) к площади квадрата (G):



$$mes(g) = \text{площадь } g = \int_0^2 (x - \frac{1}{4}x^2)dx = \frac{4}{3},$$

$$mes(G) = 2 \times 2 = 4$$

Тогда

$$P = \frac{mes(g)}{mes(G)} = \frac{1}{3}$$

Рис.6. К примеру 4.

Задачи к разделу 2.

2.1. Из слова «НАУГАД» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что это буква «Я»? Какова вероятность, что это гласная?

2.2. На 6 карточках написаны буквы "а", "в", "к", "М", "о", "с". Карточки наудачу раскладываются в ряд. Какова вероятность, что получится слово "Москва".

2.3. Брошены три монеты. Какова вероятность, что выпадут два «герба»? Какова вероятность, что выпадут две «решки»? Объяснить, почему полученные вероятности равны.

2.4. Брошена игральная кость. Какова вероятность выпадения «шестерки»? Какова вероятность выпадения числа, большего четырех?

2.5. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад выбираются три буквы и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность, что получится слово «ДВА»?

2.6. Среди 25 экзаменационных билетов только 5 «хороших». Студенты Иванов и Петров по очереди берут по одному билету. Найти вероятности событий:

A = {студент Иванов взял хороший билет};
B = {студент Петров взял хороший билет};
C = {оба студента взяли хорошие билеты}.

2.7. При наборе телефона абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность, что номер набран правильно.

2.8. Ваня и Маша стоят в очереди в столовую. Кроме них в очереди еще 8 человек. Какова вероятность, что 1) Ваня и Маша стоят рядом; 2) между ними стоят три человека?

2.9. В лифт семиэтажного дома вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности событий:

A = {все пассажиры выйдут на 4 этаже};
B = {все пассажиры выйдут на одном и том же этаже};
C = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

2.10. После землетрясения на участке между 40-м и 90-м километрами магистрального нефтепровода произошло повреждение. Какова вероятность, что повреждение расположено между 65-м и 70-м километрами магистрали.

2.11. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?

2.12. В урне 7 белых и 8 черных шаров. Вынули один шар, который оказался белым. Затем из урны взяли еще один шар. Какова вероятность, что он также белый? Решить эту же задачу при условии, что цвет первого вынутого шара неизвестен.

2.13. В целях экономии государственных средств Иван-царевич решил, что он должен жениться на девушке, день рождения которой совпадает с его днем рождения. Сколько девушек ему придется опросить, чтобы среди них оказалась хотя бы одна потенциальная невеста с вероятностью не менее 0,5?

2.14. В квадрат с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ наудачу брошена точка $M(x, y)$. Какова вероятность, что ее координаты удовлетворяют условию $y < 2x$.

2.15. На отрезок AB длиной 12 наудачу брошена точка M. Найти вероятность, что площадь квадрата, построенного на отрезке AM, будет заключена между значениями 36 и 81.

2.16. Монета имеет диаметр 20 мм, а толщину 2 мм. Какова вероятность, что при падении она встанет на ребро.

2.17. Стержень длины 1 метр сломали на три части, выбирая места разлома случайным образом. Какова вероятность, что из получившихся частей можно составить треугольник?

2.18. Два танкера должны подойти на разгрузку к одному и тому же причалу 1 сентября. Первому из них на разгрузку нужен 1 час, а второму – 2 часа. Подход танкеров к причалу равновозможен в течение этих суток. Какова вероятность, что ни одному из танкеров не придется ждать освобождения причала?

2.19. (Задаче о встрече). Студент договорился встретиться со своей подругой в вестибюле института между тремя и четырьмя часами дня. Первый пришедший на встречу ждет другого 10 минут, а потом уходит. Какова вероятность встречи друзей, если каждый из студентов может прийти в любое время в течение указанного часа?

2.20. Гардеробщица выдала номерки четырем джентльменам, сдавшим свои цилиндры, но затем перепутала головные уборы и повесила их наугад. Найти вероятности событий:

а) каждый джентльмен получит свой цилиндр;

б) ровно три джентльмена получат свой цилиндр;

в) ровно два человека получат свой головной убор;

г) ровно один получит свой цилиндр;

д) никто не получит своего цилиндра.

2.21. На клавиатуру компьютера капнула капля кетчупа радиуса r см. Найти вероятность, что она не протекла между клавиш, если клавиши имеют форму квадрата со стороной a см, а капля после падения не растекается.

3. Правила сложения и умножения вероятностей.

Для нахождения вероятности результата операций над событиями используется ряд теорем.

Вероятность суммы двух событий A и B находится по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (1а)$$

Если события A и B несовместны, то формула (1а) упрощается:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (1б)$$

Формулы (1) также называются ***теоремой сложения*** вероятностей.

Если события A_1, A_2, ….., A_n попарно несовместны, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей самих событий (обобщение формулы 1б):

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n).$$

Вероятность противоположного события $\overline{A}$ определяется по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B, называется ***условной вероятностью*** и находится по формуле

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Из формулы для условной вероятности следует ***теорема умножения*** вероятностей двух событий:

$$P(AB) = P(B)\,P(A/B) = P(A)\,P(B/A).$$

События A и B называются ***независимыми***, если условные вероятности совпадают с соответствующими безусловными, т.е. $P(A) = P(A/B)$ и $P(B) = P(B/A)$.

Для ***независимых*** событий A и B вероятность произведения равна произведению вероятностей:

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Для вычисления вероятности произведения n, $(n > 2)$ событий $A_1, \ldots, A_n$ используется формула

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / (A_1 A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n / (A_1 A_2 \ldots A_{n-1}))$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ <u>независимы</u>, то формула вероятности их произведения упрощается:

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)\,.$$

ПРИМЕР 1. В одной урне лежат 5 белых и 10 красных шаров, в другой урне – 10 белых и 5 красных шаров. Из каждой урны вынули по одному шару. Найти вероятность того, что хотя бы один из шаров белый.

<u>*Решение.*</u> Пусть событие A – из первой урны вынут белый шар, событие B – из второй урны вынут белый шар. Решим задачу двумя способами:

<u>*1ый способ*</u>. Интересующее нас событие C – хотя бы из одной урны вынут белый шар можно выразить через события A и B: $C = A + B$. (Заметим, что событие C происходит также, если оба шара белые). Используя формулу суммы событий, получим:

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Так как события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A)\,P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

По условию задачи $P(A) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$; $P(B) = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$, поэтому вероятность события C равна $P(C) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{9}$.

$2^{ой}$ способ. Интересующее нас событие C является противоположным событию $\overline{C}$ – ни из одной урны белый шар не вынут, т.е. оба шара черные. Поэтому

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9};$$

(Здесь были использованы формулы вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$).

ПРИМЕР 2. В урне лежат12 белых, 8 красных и 10 синих шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разных цветов, если известно, что среди них не оказалось синего шара?

Решение.

$1^{ый}$ способ. Событие A – вынуты два шара разных цветов; событие B – пара не содержит синий шар. Нас интересует условная вероятность события A при условии, что произошло событие B: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Для вычисления вероятностей воспользуемся подходящими комбинаторными формулами: $P(B) = \frac{C_{20}^2}{C_{30}^2}$; $P(AB) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^1}{C_{30}^2}$. Здесь C_{30}^2 – всего способов вынуть 2 шара из 30, C_{20}^2 – способов вынуть 2 не синих шара из 20, C_{12}^1 – способов выбора одного белого шара из 12, C_8^1 – одного красного шара из 8.

Следовательно $P(A/B) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^1 \cdot C_{30}^2}{C_{30}^2 \cdot C_{20}^2} = \frac{48}{95}$.

$2^{ый}$ способ. Будем теперь рассуждать несколько иначе. Поскольку известно, что синие шары не вынимались, то всего существует $n = 20$ возможных вариантов исхода опыта. Событие A_i – i-ый вынутый шар – белый, событие B_i – i-ый вынутый шар – красный (i = 1, 2). Если первым вынут белый шар, а вторым красный, то вероятность такого события $P(C) = P(A_1 B_2) =$

$= P(A_1)P(B_2 / A_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$. Если первым вынут красный шар, а вторым белый, то вероятность этого события $P(D) = P(B_1 A_2) = P(B_1) \cdot P(A_2 / B_1) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19}$. Нас устраивают оба рассмотренных события, т.к. порядок извлечения шаров не имеет значения. Тогда, учитывая несовместность событий C и D, получаем искомую вероятность извлечения шаров разных цветов, при условии, что среди них нет синего шара: $P = P(C + D) = P(C) + P(D) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{48}{95}$.

Задачи к разделу 3.

3.1. Вероятность появления неисправности в автомобиле «Жигули» в течение одного дня равна 0,05. Какова вероятность, что в автомобиле не возникнет ни одной неисправности в течение трех дней?

3.2. В ящике лежат 10 красных и 6 синих носков. Студент наудачу вынимает из ящика два носка. Какова вероятность, что носки окажутся одного цвета, и студент сможет поехать на занятия?

3.3. Решить ту же задачу, если носки лежат в двух ящиках, причем в первом 5 белых, 11 черных и 8 красных носков, а во втором соответственно 10, 8 и 6. Студент один носок берет из первого ящика, а другой из второго.

3.4. Найти вероятность, что наудачу выбранное двузначное число окажется кратным: а) 2 или 5, б) 2 и 5 ?

3.5. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8 , а вторым стрелком – 0,6. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность, что только один из них попадет в цель?

3.6. В лабораторию для анализа поступило 7 бочек с бензином. Из сопроводительных документов известно, что три из них содержат бензин типа А, две – типа В и две – типа С. Наугад вскрыли три бочки. Какова вероятность обнаружить в них бензин всех трех типов?

3.7. Первый пресс штампует стандартные болты с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,95. На первом прессе изготовили 3 болта, а на втором – два. Какова вероятность, что все 5 болтов стандартные.

3.8. Глубинный манометр испытывается на герметизацию. Проводится не более 5 испытаний, при каждом из которых манометр выходит из строя с вероятностью 0,05. После первой поломки манометр ремонтируется, а после второй – признается испорченным. Какова вероятность, что после пяти испытаний манометр будет признан негодным?

3.9. Электрические цепи составлены по схемам, изображенным на рис. 7 а), б), в), г), д), е). Вероятность выхода из строя элемента a_k равна p_k . Элементы работают независимо друг от друга. Для каждой из схем найти вероятность прохождения тока по цепи.

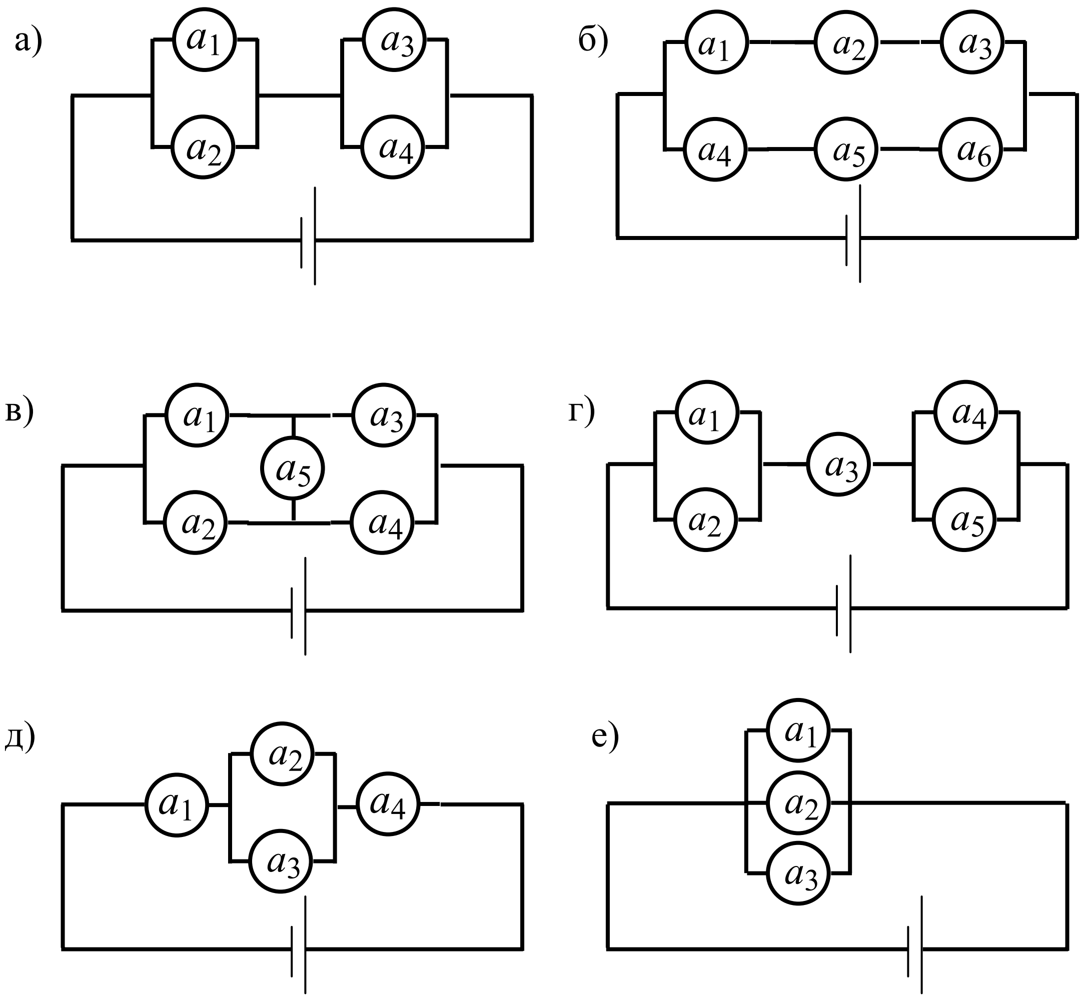


Рис. 7. К задаче 3.9.

3.10. В нефтеносном районе бурят одновременно 6 скважин. Каждая из скважин вскрывает месторождение независимо от других с вероятностью 0,1. Какова вероятность вскрытия месторождения? Изменится ли эта вероятность, если работает одна буровая установка, которая прекращает бурение при вскрытии месторождения? Сколько нужно пробурить скважин, чтобы вероятность вскрытия месторождения превысила 0,7?

3.11. Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,6; второго – 0,7. Найти вероятности событий:

а) только один стрелок попал в мишень;

б) хотя бы один из стрелков попал в мишень;

в) ни один из стрелков не попал;

г) хотя бы один из стрелков не попал.

3.12. Студент успел подготовить к экзамену 20 вопросов из 25. Какова вероятность, из трех заданных вопросов студент будет знать не менее 2?

3.13. Какое из двух событий более вероятно: событие A – при одновременном бросании 4 игральных костей появится хотя бы одна «единица» или событие B – при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз выпадут две «единицы»?

3.14. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности ответить на первый и второй вопросы для студента Карапузова равны 0,9; на третий вопрос – 0,8. Какова вероятность, что студент Карапузов сдаст экзамен, если для этого надо: а) ответить на все вопросы; б) ответить хотя бы на два вопроса?

3.15. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет «орел». Определить вероятности выигрыша для каждого игрока.

3.16. Двое поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет «шестерка». Определить вероятности выигрыша для первого и для второго игроков.

3.17. В коробке лежат две конфеты с вареньем и четыре с глазурью. Конфеты одинаковы по внешнему виду. Сестры Маша и Даша поочередно вынимают по одной конфете и съедают их (начинает Маша). Девочки договорились, что той, которой первой достанется конфета с вареньем, придется в этот день убирать квартиру. Какова вероятность, что квартиру придется убирать Даше?

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A может наступить только при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, то вероятность события A вычисляется по ***формуле полной вероятности***:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i (очевидно, что выполнено равенство $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1$). Вероятность $P(A/H_i)$ представляет собой условную вероятность наступления события A, если гипотеза H_i верна.

С формулой полной вероятности связана ***формула Байеса***. Если до опыта вероятности гипотез (априорные вероятности) были $P(H_1)$, …, $P(H_n)$, а в результате опыта событие A произошло, то с учетом этого факта вероятности гипотез «переоцениваются» по формуле Байеса и называются ***апостериорными вероятностями***:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},\quad k=1,2,...,n,$$

где вероятность события A находится по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i).$$

(При этом также будет справедливо соотношение $\sum_{k=1}^{n}P(H_k/A)=1$).

ПРИМЕР 1. В первой урне лежат 5 белых и 10 черных шаров, во второй – 2 белых и 7 черных. Из первой урны наудачу переложили один шар во вторую урну, после чего из второй урны наудачу достают один шар. 1) Найти вероятность того, что этот шар белый? 2) Шар, взятый из второй урны оказался белым. Какова вероятность, что из первой урны во вторую был переложен белый шар?

<u>*Решение.*</u> Пусть событие A – из второй урны вынут белый шар. Рассмотрим две гипотезы: гипотеза H_1 – из первой урны переложили во вторую белый шар, гипотеза H_2 – переложили черный шар. Вычислим вероятности гипотез $P(H_1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$. В случае выполнения гипотезы H_1 во второй урне оказывается 3 белых и 7 черных шаров, поэтому условная вероятность вынуть белый шар из второй урны равна $P(A/H_1)=\frac{3}{10}$. При реализации гипотезы H_2 во второй урне оказывается 2 белых и 8 черных шаров, и условная вероятность вынуть белый шар равна $P(A/H_2)=\frac{2}{10}$.

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = \frac{7}{30}.$$

Теперь по формуле Байеса можно найти вероятность гипотезы H_1 (перекладывался белый шар) при условии, что было реализовано событие A (из второй урны вынут белый шар):

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/3\cdot 3/10}{7/30} = \frac{3}{7}.$$

ПРИМЕР 2. Фермер поручил двум охотникам застрелить волка, пообещав им в случае успеха 3500 рублей. Первый, более опытный, охотник попадает в зверя с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,6. Охотники встретили волка и одновременно выстрелили. Волк был поражен одной пулей. Как охотники должны поделить премию?

<u>*Решение.*</u> Пусть событие A – волк поражен одной пулей. Рассмотрим две гипотезы: гипотеза H_1 – попал первый охотник, гипотеза H_2 – попал вто-

рой охотник. Событие A может быть выражено через события H_1 и H_2 следующим образом:

$$A = H_1\overline{H}_2 + H_2\overline{H}_1.$$

С учетом несовместности двух слагаемых и независимости событий H_1 и H_2, находим по формулам сложения и умножения:

$$P(A) = P(H_1)P(\overline{H}_2) + P(H_2)P(\overline{H}_1) = 0,9 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,42.$$

Условная вероятность события A (одно попадание) при осуществлении гипотезы H_1 (попадание первого охотника) равна вероятности промаха второго охотника: $P(A/H_1) = P(\overline{H}_2) = 0,4$. Аналогично, условная вероятность события A при осуществлении гипотезы H_2 равна вероятности промаха первого охотника: $P(A/H_2) = P(\overline{H}_1) = 0,1$. Тогда по формуле Байеса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,9 \cdot 0,4}{0,42} = \frac{6}{7},$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,1}{0,42} = \frac{1}{7}.$$

Премию охотники должны поделить в той же пропорции, в какой относятся условные вероятности их попадания: $\dfrac{P(H_1/A)}{P(H_2/A)} = \dfrac{6}{7} : \dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{1}$. Таким образом, первый охотник должен получит 6/7 частей премии, или 3000 рублей; второй охотник должен получить 1/7 часть премии, или 500. (Такой, на первый взгляд не очень справедливый дележ связан с тем, что вероятность промаха 1-го охотника мала, так что одно попадание, скорее всего, именно на его счету. Если бы попаданий было два, премию надо было делить поровну).

Задачи к разделу 4.

4.1. Имеется два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных. Наудачу выбирают ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

4.2. Приборы зафиксировали утечку газа на участке газопровода, 40% которого расположено под землей и 60% – под водой. Вероятность в течение суток обнаружить утечку на подземном участке равна 0,7, а на подводном – 0,8. Какова вероятность, что утечка газа будет обнаружена не позже, чем через сутки?

4.3. В семье три дочери – Маша, Люба и Наташа – договорились, что каждый вечер одна из них будет мыть посуду. Старшая дочь, Маша, моет посуду 3 раза в неделю, а остальные девочки – по два раза. Вероятность, что Маша разобьет тарелку равна 0,02. Для Любы и Наташи эти вероятности соответственно равны 0,03 и 0,04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но услышали звон разбитой тарелки. Помогите родителям выяснить, какова вероятность, что посуду мыла та или иная из дочерей.

4.4. Два завода поставляют трубы для скважин. Завод А поставляет 30% общего количества труб, из которых 95% стандартных. Завод В поставляет 70% труб, а стандартных среди них 90%. Взятая наудачу труба оказалась нестандартной. Какова вероятность, что она изготовлена на заводе А?

4.5. Из 20 студентов, сдающих экзамен, 8 подготовлены отлично (знают все 40 вопросов), 6 – хорошо (знают 35 вопросов из 40), 4 – средне (знают 25 вопросов) и 2 – плохо (10 вопросов). Наудачу вызванный студент ответил на все три вопроса билета. Найти вероятность, что он подготовлен: а) хорошо, б) плохо.

4.6. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок не попал в мишень. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

4.7. Страховая компания разделяет водителей по трем классам: класс H_1 – низкого риска, класс H_2 – среднего риска, класс H_3 – высокого риска. 30% водителей попадает в первый класс, 50% – во второй класс и 20% – в третий класс. Вероятность в течение года попасть в аварию для водителя класса H_1 равна 0,01; для водителя класса H_2 равна 0,02, а для водителя класса H_3 равна 0,08. Водитель Иванов в течение года попадает в аварию. Какова вероятность, что он относится к классу H_1? К классу H_2? К классу H_3?

4.8. Участок нефтепровода состоит из линейной части и резервуарного парка. Каждая из составляющих необходима для работы всего участка. Вероятность безотказной работы в течение времени T линейной части равна 0,9, а резервуарного парка – 0,8. Какова вероятность, что авария произошла только в линейной части, если отказы в двух составляющих участка: а) несовместны; б) независимы?

4.9. Вероятность повышения давления в трубопроводе до критического значения $P_{\text{кр.}}$ равна 0,15. Вероятность срабатывания контрольно-измерительного прибора при достижении критического давления равна 0,9. Вследствие помех при нормальном давлении в системе прибор может ложно сработать с вероятностью 0,1. Диспетчер зарегистрировал повышение давления до критического значения. Какова вероятность, что давление действительно было повышено?

4.10. В воскресенье утром Петя решил пригласить одну из своих подруг покататься на лыжах. Маша и Вера согласятся на раннюю прогулку с вероятностью 0,1, а Лена – с вероятностью 0,05. Петя случайным образом набрал номер одной из трех своих подруг, и получил отказ. Какова вероятность, что он позвонил Лене.

4.11. Один стрелок поражает цель с вероятностью 0,8, другой – с вероятностью 0,6 и третий – с вероятностью 0,5. После залпа всех трех стрелков в мишени оказалось 2 пробоины. Какова вероятность, что промахнулся третий стрелок?

4.12. В условиях предыдущей задачи после залпа трех стрелков в мишени оказалась только одна пробоина. Какова вероятность, что промахнулись 1-й и 3-й стрелки?

4.13. Студент во время экзамена для решения сложной задачи решил воспользоваться мобильным телефоном, в котором записаны номера десяти его друзей. Пятеро адресатов могут решить задачу с вероятностью 0,3, четверо с вероятностью 0,5 и лишь один (обучающийся по специальности «прикладная математика») с вероятностью 1. Первый же звонок по телефону позволил студенту решить задачу. Какова вероятность, что он дозвонился до друга-математика?

4.14. 20% проблем с загрузкой компьютера связаны с ошибками, допущенными компанией Microsoft, и в одном случае из пятидесяти при этом приходится заново переустанавливать систему. 35% проблем связаны с наличием вируса (переустановка требуется в одном случае из 20). В остальных случаях проблемы возникают из-за действий пользователя, и переустановка требуется в одном случае из 30. Ваш компьютер вышел из строя. Какова вероятность, что в этом виновата компания Microsoft, и Билл Гейтс принесет вам свои извинения?

4.15. В первой урне лежат 3 белых и 8 черных шаров, во второй – 4 белых и 5 черных. Из первой урны наудачу переложили два шара во вторую урну, после чего из второй урны наудачу достают один шар, и он оказывается белым.

1) Какова вероятность, что из первой урны во вторую переложили два белых шара?
2) Какова вероятность, что вынутый из второй урны шар первоначально находился в первой урне?

4.16. Из двух монет одна имеет брак, и поэтому вероятность выпадения орла для нее равна 0,6. Наудачу взятая монета была подброшена два раза, и каждый раз выпадал орел. Какова вероятность, что была взята бракованная монета?

4.17. Решить предыдущую задачу, если орел выпал: а) три раза; б) n раз.

4.18. Из двух близнецов первым родился мальчик. Какова вероятность, что следующим на свет тоже появится мальчик, если среди близнецов вероятность рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равна p и q, а для разнополых близнецов вероятность рождения первым мальчика или девочки одинакова?

4.19. На экзамен пришли 16 успевающих студента и 8 двоечников. Вероятность использования шпаргалки двоечником равна 0,8, успевающим студентом 0,4. После экзамена преподаватель нашел в аудитории шпаргалку. Какова вероятность, что ее уронил двоечник?

4.20. На шоссе одна за другой расположены две автозаправочные станции: сначала принадлежащая компании «Юкос», а затем – компании «Славнефть». 2% всех проезжающих автовладельцев принимают решение заправить автомобиль на заправке «Юкоса». При этом вероятность, что им это удастся сделать, равна 80% (остальные из-за большой очереди или отсутствия требуемого сорта бензина едут дальше). 1,5% из проехавших мимо автозаправочной станции «Юкоса» и 10% из тех, кому не удалось заправить на ней автомобиль, останавливаются затем на станции «Славнефти». Вероятность заправить автомобиль на станции «Славнефти» равна 85%. Наудачу остановленный инспектором ГАИ после двух автозаправочных станций автомобиль оказался заправленным. Какова вероятность, что его владелец воспользовался услугами «Юкоса»?

4.21. При переливании крови должна учитываться ее группа. Человеку с 4-й группой можно перелить любую кровь, человеку со второй или третьей группой можно перелить кровь либо своей же группы, либо первой. Для первой группы перелить можно лишь кровь своей группы. Среди населения 34% имеют 1-ую группу крови, 38% – вторую, 20% – третью и 8% – четвертую. Найти вероятность того, что: а) случайно взятому пациенту можно перелить кровь случайно взятого донора; б) переливание можно провести, если есть два донора; в) переливание можно провести, если есть три донора.

4.22. В первой урне лежат 9 белых и 1 черных шаров, во второй – 2 белых и 7 черных, в третьей, соответственно, 6 и 3. Из первой урны наудачу переложили один шар во вторую, после чего из второй переложили один шар в третью. Из третьей урны наудачу достали один шар, оказавшийся белым. Какова вероятность, что этот шар первоначально находился в первой урне? Во второй? Какова вероятность, что при том же условии из первой урны во вторую переложили белый, а из второй в третью – черный шар?

4.23. Экзаменатор решил помочь нерадивому студенту сдать экзамен по теории вероятностей. Вместе с двумя обычными билетами, на которые студент ответить не мог бы, он заготовил еще два билета с таблицей умножения на 2. Студент должен любым способом распределить эти 4 билета по двум кучкам. После чего, преподаватель наугад выбирает одну кучку и нее случайным образом вынимает один билет. Как студент должен распределить билеты по кучкам, чтобы вероятность сдать экзамен была для него максимальной?

4.24. Трое царских сыновей выпустили по одной стреле из лука. Для Бориса-царевича вероятность попасть стрелой в пруд с царевной-Лягушкой равна 0,2, а в обычный пруд 0,6. Для Василия-царевича эти вероятности, соответственно, равны 0,4 и 0,3. Для Ивана-царевича эти вероятности равны 0,8 и 0,1. После испытания одна из стрел оказалась в пруду с царевной-Лягушкой. Какова вероятность, что это была стрела Ивана-царевича?

5. Испытания Бернулли. Теоремы Муавра – Лапласа

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может произойти с одной и той же вероятностью p. Такие испытания носят название ***испытаний Бернулли***.

Вероятность того, что в n испытаниях Бернулли событие A произойдет ровно k раз, находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (1)$$

где $q = 1 - p$ – вероятность не появления события A в каждом испытании.

В случае большого количества n испытаний и малой вероятности успеха p, ($p < 0{,}1;\ np < 10$) вместо формулы (1) приемлемую точность дает приближенная ***формула Пуассона***:

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad a = np$$

Если количество n испытаний Бернулли велико, а $npq \geq 10$ (т.е. вероятность p появления события A в каждом испытании не слишком мала), применяются другие приближения формулы Бернулли:

Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Вероятность того, что в n $(n \gg 1)$ независимых испытаниях Бернулли событие A произойдет ровно k раз, может быть найдена по приближенной формуле:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где p – вероятность появления события A в каждом испытании, $q = 1 - p$. Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ представляет собой плотность стандартного нормального распределения и приведена в таблицах (см. Приложение).

Интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях $(n \gg 1)$ событие A произойдет от k_1 до k_2 раз, приближенно можно найти по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где p – вероятность успеха в каждом испытании, $q = 1 - p$. Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ представлена в таблицах (см. Приложение).

Следствие. Пусть m/n – относительная частота появления успеха (события A) в n испытаниях Бернулли при вероятности p каждого успеха. Тогда вероятность отклонения относительной частоты от вероятности по абсолютной величине менее чем на ε находится по формуле

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Замечание. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа обеспечивают приемлемую точность, если вероятность p каждого успеха удовлетворяет ограничениям: $p > \frac{1}{n+1}$ или $p < \frac{n}{n+1}$, т.е. p не слишком мала и не близка к единице.

ПРИМЕР 1. Монету бросают 6 раз. Какова вероятность, что герб выпадет ровно четыре раза?

Решение. В данных испытаниях Бернулли $n=6$, $p=0{,}5$. По формуле (1) имеем

$$P_6(4) = C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

ПРИМЕР 2. Вероятность рождения девочки равна 0,51, а мальчика – 0,49. Какова вероятность, что в семье из трех детей окажется не более одной девочки?

Решение. В этих испытаниях Бернулли будем считать успехом рождение мальчика. Тогда $p=0{,}49$; $q=0{,}51$. Искомая вероятность равна сумме вероятностей появления двух или трех мальчиков:

$$p = P_3(3) + P_3(2) = C_3^3\left(0{,}49\right)^3\left(0{,}51\right)^0 + C_3^2\left(0{,}49\right)^2\left(0{,}51\right)^1 =$$
$$= \left(0{,}49\right)^3 + 3\left(0{,}49\right)^2\left(0{,}51\right) = \left(0{,}49\right)^2\left(0{,}49 + 3\cdot 0{,}51\right) \approx 0{,}485$$

ПРИМЕР 3. В среднем 90% студентов первого курса продолжают дальнейшее обучение в ВУЗе. Какова вероятность, что из 800 студентов первого курса перейдут на второй курс: а) ровно 720 человек? б) от 700 до 730 человек? в) Более 700 человек?

Решение. Вероятность перейти на второй курс для студента равна $p=0{,}9$. Проведено $n=800$ испытаний.

а) по локальной теореме Лапласа

$$P_{800}(720) = \frac{1}{\sqrt{800\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\cdot\varphi\left(\frac{720-800\cdot 0{,}9}{\sqrt{800\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{72}}\varphi\left(0\right) \approx 0{,}1179\cdot 0{,}3989 \approx 0{,}047$$

(Заметим, что полученное значение вероятности достаточно мало, т.к. практически невероятно, что отчисленными окажутся ровно 800 – 720 = 80 студентов. Впрочем, вероятность быть отчисленными для любого другого числа студентов оказалась бы еще меньше, поскольку при $k\neq np$, аргумент функции $\varphi(x)$ был бы отличен от нуля, и ее значение, а значит и вероятность $P_n(k)$, стала бы меньше).

б) по интегральной теореме Муавра – Лапласа

$$P_{800}(700,730) = \Phi\left(\frac{730-800\cdot 0{,}9}{\sqrt{800\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) - \Phi\left(\frac{700-800\cdot 0{,}9}{\sqrt{800\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) =$$
$$= \Phi\left(1{,}18\right) - \Phi\left(-2{,}36\right) = \Phi\left(1{,}18\right) + \Phi\left(2{,}36\right) \approx 0{,}381 + 0{,}491 = 0{,}872$$

в) по интегральной теореме Муавра – Лапласа

$$P_{800}(700,800)=\Phi\left(\frac{800-800\cdot 0,9}{\sqrt{800\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)-\Phi\left(\frac{700-800\cdot 0,9}{\sqrt{800\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)=$$

$$=\Phi(9,43)-\Phi(-2,36)=\Phi(9,43)+\Phi(2,36)\approx 0,5+0,491=0,991$$

ПРИМЕР 4. На потоке учится 200 студентов. Какова вероятность, что у двоих из них день рождения придется на 1 января?

Решение. Вероятность рождения студента в любой из дней года будем считать одинаковой, тогда $p=1/365$, $n=200$. Поскольку $np<10$, а вероятность p мала, воспользуемся формулой Пуассона:

$$p=P_{200}(2)=\frac{a^2e^{-a}}{2!},\quad a=200\cdot\frac{1}{365}\approx 0,548,$$

или $p=0,087$.

Задачи к разделу 5.

5.1. В гараже завода стоят 5 грузовых машин. Вероятность выхода на линию каждой машины равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы завода, если для этого нужно, чтобы не менее 4 машин вышло на линию.

5.2. В среднем каждый пятый покупатель носит обувь 42-го размера. Найти вероятность, что из пяти покупателей магазина обувь такого размера понадобится а) одному; б) по крайней мере, одному.

5.3. Тест состоит из пяти вопросов, на каждый из которых приведено 4 варианта ответа. Студент не знает ни одного вопроса и выбирает ответы наудачу. Найти вероятность, что он даст: а) три правильных ответа; б) не менее трех правильных ответов; в) не более одного ответа.

5.4. Завод отправил на базу 5000 деталей. Вероятность повреждения детали в пути равна 0,0002. Найти вероятность, что среди отправленных деталей будет повреждено а) ровно 3; б) ровно одно; в) более двух.

5.5. В среднем в одном кубометре воздуха присутствует 100 болезнетворных микробов. На пробу берется 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность обнаружить там хотя бы один микроб.

5.6. В соответствии с техническими условиями пекарь положил в 1000 булочек 2000 изюминок. Можно ли убедить знающего эту норму покупателя не писать жалобу, если тот обнаружил в 40 булочках всего 1 изюминку?

5.7. Левши составляют 5% людей. Какая вероятность, что среди 200 человек 11 будут левшами? Левшей будет не менее 3?

5.8. Заболеваемость гриппом во время эпидемии составила 30%. Какова вероятность, что в студенческой группе из 25 человек заболеют гриппом и не придут на занятие более 15 студентов?

5.9. Диагноз СПИД в России установлен в среднем у 17,62 человек на 100 тысяч населения. Какова вероятность, что среди жителей района с населением 756000 человек этот диагноз окажется менее чем у 100 человек?

5.10. Экзамен по теории вероятностей с первого раза сдают 50% студентов. Найти вероятность, что на первом экзамене из 200 студентов сдадут экзамен более 110 человек.

5.11. Всхожесть семян огурца равна 0,8. найти вероятность того, что из посаженных 300 семян взойдет не менее 200.

5.12. Игральную кость бросают 84 раза. Найти интервал, в который с вероятностью 0,8 попадает число m выпавших «шестерок». Однозначно ли находятся границы интервала?

5.13. На потоке учатся 180 студентов. Если у троих из них день рождения совпадает, то все студенты потока идут вечером на дискотеку. Какова вероятность, что за весенний семестр студенты ровно один раз посетят дискотеку по этой причине?

5.14. Давид Бекхэм забивает в среднем 0,6 гола за игру. Какова вероятность, что в 11 играх чемпионата Европы Бекхэм забьет от 2 до 8 голов? Решить задачу на основе формулы Бернулли и с использованием интегральной теоремы Муавра – Лапласа. Какой из полученных результатов более точен?

6. Случайные величины, законы их распределения и числовые характеристики

Законом распределения случайной величины ξ называется соотношение, устанавливающее связь между значениями ξ и вероятностями этих значений. Для любой случайной величины закон распределения может быть представлен функцией распределения. ***Функцией распределения*** случайной величины называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина ξ примет значение меньшее x, где x – любое действительное число:

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

Случайная величина называется ***дискретной***, если она принимает конечное или счетное число значений. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан ***рядом распределения***. Ряд представляет собой совокупность всех возможных значений x_i случайной величины ξ и соответствующих им вероятностей $p_i = P\{\xi = x_i\}$. Закон (ряд) распределения записывается в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

(Если число значений случайной величины счетное, то таблица содержит бесконечное множество ячеек. В таком случае должно быть задано правило, по которому определяются вероятности p_n).

Вероятности p_i в этой таблице подчиняются условию $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Построив на плоскости точки с координатами (x_i, p_i) и соединив их отрезками, получим ломаную линию, которая называется ***многоугольником распределения*** (рис.1):

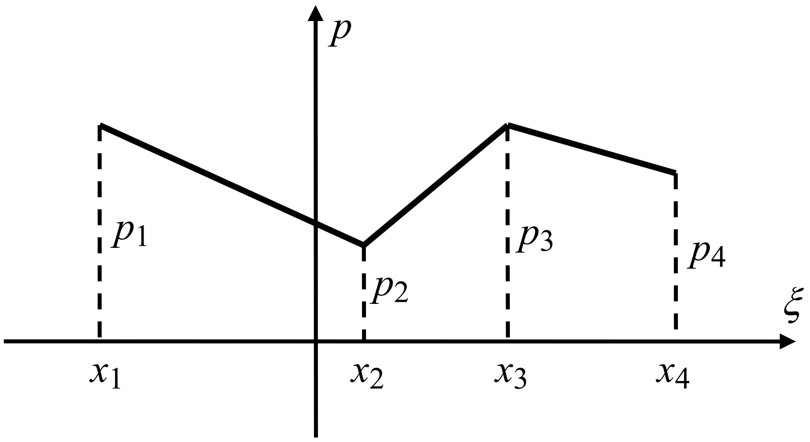


Рис.1. Многоугольник распределения дискретной случайной величины.

Функция распределения дискретной случайной величины определяется как $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, где суммирование ведется по тем значениям индекса i, для которых значение случайной величины меньше числа x, т.е. $x_i < x$. В этом случае $F(x)$ является кусочно-постоянной функцией с разрывами в точках $x = x_i$ (рис. 2).

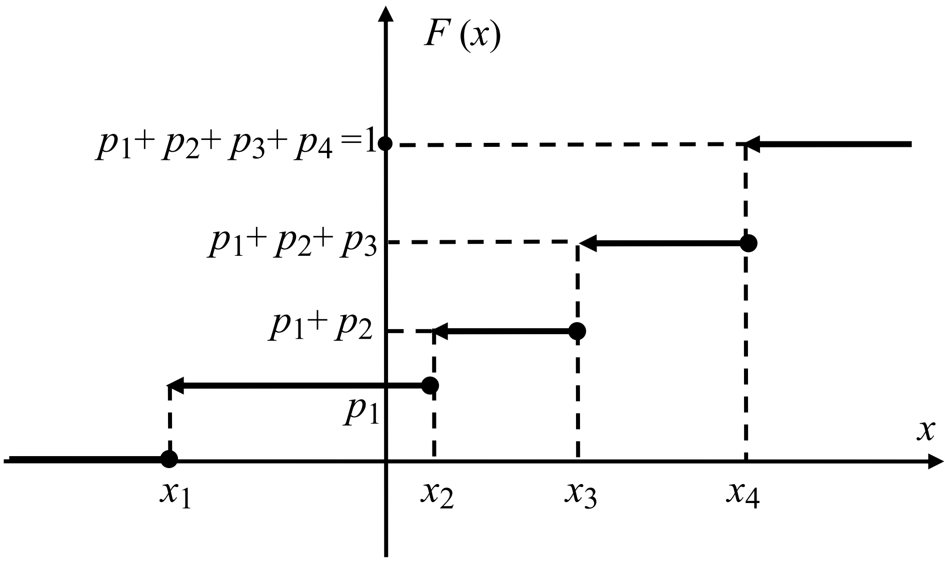


Рис.2. Функция распределения дискретной случайной величины.

Случайная величина ξ называется ***непрерывной***, если существует неотрицательная функция $f(x)$, определяемая равенством

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей***.

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины ξ и плотность вероятности $f(x)$ связаны соотношениями:

1) $f(x) = F'(x);$

2) $F(x) = P\{\xi < x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

Замечание. Случайная величина, не принадлежащая ни к дискретному, ни к непрерывному типу, называется ***смешанной***. Функция распределения случайной величины смешанного типа имеет разрывы, однако при этом не является кусочно-постоянной.

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими ***свойствами***:

1. $F(x_1) \le F(x_2), \quad$ если $x_1 < x_2$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. $P\{\alpha \le \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha).$

Плотность вероятности случайной величины имеет ***свойства***:

1. $f(x) \ge 0.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

3. $P\{\alpha \le \xi < \beta\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

В качестве основных числовых характеристик случайных величин рассматриваются моменты и квантили.

Начальным моментом ν_k порядка k дискретной случайной величины ξ называется выражение

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i ,$$

где суммирование проводится по всем значениям случайной величины. Для непрерывной случайной величины начальный момент порядка k определяется через плотность вероятности:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Начальный момент первого порядка носит название ***математического ожидания*** случайной величины, и характеризует ее среднее значение:

$$M\xi = \nu_1 = \begin{cases} \sum_i x_i p_i & (\textit{\textbf{для дискретной величины}}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & (\textit{\textbf{для непрерывной величины}}) \end{cases}$$

Математическое ожидание случайных величин обладает ***свойствами***:

1. $M(C) = C$;
2. $M(C\xi) = C\cdot M\xi$, (C – постоянная);
3. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$;
4. $M(\xi\cdot\eta) = M\xi \cdot M\eta$, (для независимых величин ξ и η).

Центральным моментом μ_k порядка k случайной величины ξ называется выражение

$$\mu_k = \begin{cases} \sum_i (x_i - M\xi)^k p_i & (\textit{\textbf{для дискретной величины}}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k f(x)dx & (\textit{\textbf{для непреывной величины}}) \end{cases}$$

Дисперсия (центральный момент второго порядка) случайной величины характеризует ее разброс относительно среднего значения и выражается через начальные моменты 1-го и 2-го порядка:

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2] = \nu_2 - (M\xi)^2 = M\left(\xi^2\right) - \left(M\xi\right)^2$$

Корень квадратный из дисперсии носит название ***среднего квадратического отклонения*** случайной величины:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$$

Дисперсия случайных величин обладает ***свойствами***:

1. $D\xi \geq 0$;
2. $D(C) = 0$, (C – постоянная);
3. $D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$, (C – постоянная);
4. $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$, (для независимых величин ξ и η).

Центральный момент третьего порядка характеризует степень несимметричности распределения случайной величины относительно ее среднего значения. Величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

называется ***коэффициентом асимметрии***.

Квантилем x_p порядка p называется величина, определяемая равенством

$$F(x_p) = p,$$

где $F(x)$ – функция распределения.

На рис. 3 показан квантиль x_p порядка p для случайной величины непрерывного типа. Рис. 3а) представляет функцию распределения, рис. 3б) – плотность распределения вероятностей. Заштрихованная площадь равна p.

Квантиль $x_{0,5}$ порядка 0,5 , определяемый соотношением $F(x_{0,5}) = 0,5$ называется ***медианой***. Площадь под кривой $y = f(x)$ плотности вероятности делится пополам прямой $x = x_{0,5}$, проходящей через медиану. (На рис. 3б) соответствующая заштрихованная площадь при этом равна 0,5). Для медианы принято обозначение: $Me = x_{0,5}$.

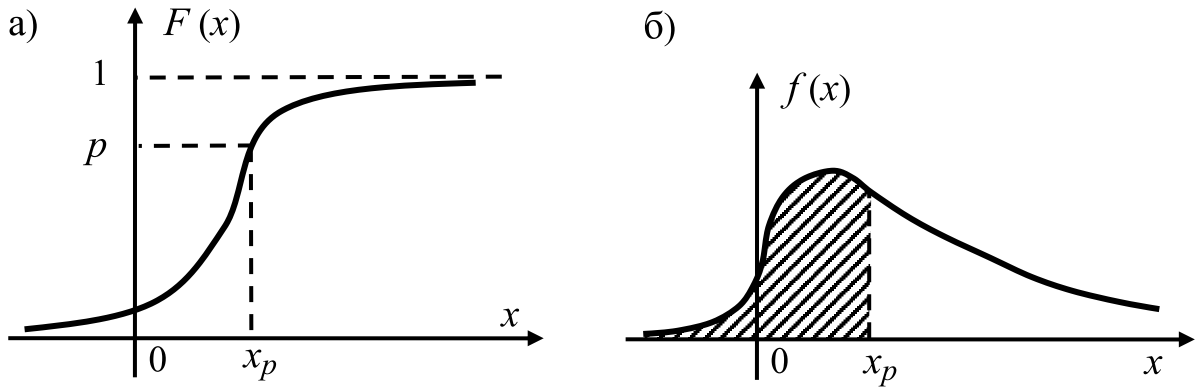


Рис.3. Квантиль x_p порядка p непрерывной случайной величины:
(а)- функция распределения; (б)- плотность вероятности.

Таблица важнейших числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин

Характеристика случайной величины	*Дискретная случайная величина*	*Непрерывная случайная величина*
Математическое ожидание	$M\xi = \sum_i x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$	$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
Дисперсия	$D\xi = \sum_i x_i^2 p_i - (M\xi)^2 =$ $= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots - (M\xi)^2$	$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M\xi)^2$
Асимметрия	$A = \dfrac{\sum_i (x_i - M\xi)^3 p_i}{\sigma^3}$	$A = \dfrac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^3 f(x) dx$

ПРИМЕР 1. В урне лежат 4 белых и 3 черных шара. Наудачу из урны извлекают 3 шара. Случайная величина ξ представляет собой число извлеченных при этом <u>белых</u> шаров. Найти: а) закон распределения случайной величины ξ; б) вероятность события $A = \{\xi \geq 2\}$; в) математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ.

Решение. Возможные значения случайной величины ξ: 0, 1, 2, 3. Соответствующие им вероятности находятся по формуле из задачи о выборке:

$$P\{\xi = 0\} = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}; \quad P\{\xi = 1\} = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$P\{\xi = 2\} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}; \; P\{\xi = 3\} = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

а) Закон (ряд) распределения случайной величины ξ :

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

б) $P\{\xi \geq 2\} = P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = \dfrac{22}{35}$

в) $M\xi = 0 \cdot \dfrac{1}{35} + 1 \cdot \dfrac{12}{35} + 2 \cdot \dfrac{18}{35} + 3 \cdot \dfrac{4}{35} = \dfrac{60}{35} = \dfrac{12}{7}$

ПРИМЕР 2. Задана плотность вероятности случайной величины ξ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; x \leq 0 \\ Cx, \; 0 < x \leq 2 \\ 0, \; x > 2 \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент C; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность $P\{\xi > 1\}$; г) вероятность $P\{0{,}5 < \xi < 3\}$; д) математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ и медиану Me; е) построить графики плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$.

Решение.

а) коэффициент C найдем из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$:

$$C\int\limits_0^2 x\,dx = C\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 2C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2};$$

б) Функцию распределения $F(x)$ на интервале (0;2) найдем по формуле

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^x x\,dx = \frac{x^2}{4}.$$

Тогда на всей числовой оси $F(x)$ задается следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ x^2/4, \ 0 \le x \le 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$$

в) случайная величина ξ принимает значения только из интервала [0,2]. Следовательно, $P\{\xi > 1\} = \int\limits_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

г) $P\{0{,}5 < \xi < 3\} = \int\limits_{0,5}^{3} f(x)dx = \int\limits_{0,5}^{2} f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0,5}^{2} xdx + 0 = \frac{x^2}{4}\Bigg|_{0,5}^{2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16};$$

д) Математическое ожидание $M\xi = \int\limits_0^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$;

Дисперсия $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int\limits_0^2 x^2 f(x)dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^3dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Для медианы имеем $F(Me) = 0{,}5$. Воспользовавшись найденным в б) выражением для функции распределения, получим $(Me)^2/4 = 0{,}5$. Отсюда $Me = \sqrt{2}$.

е) плотность вероятности $f(x)$ изображена на рис. 4, а функция распределения $F(x)$ – на рис.5:

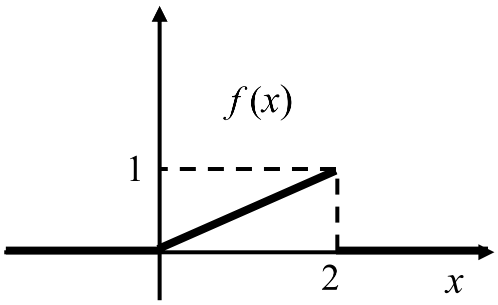


Рис.4. График функции $f(x)$

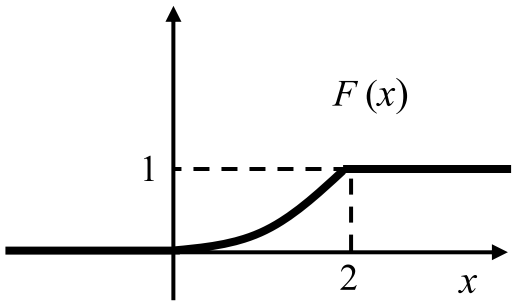


Рис.5. График функции $F(x)$

Задачи к разделу 6.

6.1. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание 3 и дисперсию 12. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $3\xi + 7$.

6.2. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	– 2	– 1	1	2	4
p_i	0,3	0,5	0,1	0,05	0,05

Найти: а) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величиной ξ; б) Вероятность $P\{\xi > 0\}$; в) условную вероятность $P\{\xi > 0 / \xi > -2\}$; г) условную вероятность $P\{\xi > 1 / \xi < 4\}$. Построить график функции распределения случайной величины ξ.

6.3. Число попыток сдачи экзамена по высшей математике для студентов кулинарного техникума является случайной величиной ξ, распределенной по следующему закону:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,4	0,3	0,07	0,03

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величиной ξ. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен не более чем с трех попыток.

6.4. Студенты решили, что оценки, которые ставят два экзаменатора, представляют собой случайные величины ξ и η, имеющие законы распределения:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,5	0,12	0,18	0,2

y_i	2	3	4	5
p_i	0,3	0,32	0,29	0,1

К какому экзаменатору предпочтительней попасть: а) "двоечнику"? б) "отличнику"? в) чтобы не потерять стипендию?

6.5. Закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

x_i	– 2	1	3	6	10
p_i	0,25	0,15	0,05	[redacted]	0,45

(Клякса по вине авторов! К ним можно обращаться за исходным значением вероятности).

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины; б) условные вероятности: $P\{\xi < 8 / \xi > 1\}$, $P\{\xi \geq 1 / \xi < 8\}$.

6.6. Из колоды в 36 карт наудачу берут три карты. Случайной величиной является: а) ξ – количество вынутых карт трефовой масти; б) η – количество тузов; в) ζ – количество карт красной масти. Найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение каждой из случайных величин ξ, η, ζ.

6.7. Доказать, что дисперсия числа появлений успеха при однократном проведении опыта не может быть больше 0,25.

6.9. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости.

6.10. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков, выпадающих при однократном бросании n игральных костей.

6.11. Найти закон распределения количества ξ выпавших "орлов" при двукратном бросании монеты. Определить $M\xi$, $D\xi$ и σ.

6.12. Найти закон распределения количества ξ выпавших "решек" при трехкратном бросании монеты. Определить $M\xi$, $D\xi$ и σ.

6.13. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f(x)$.и функцию распределения $F(x)$. Как изменятся графики этих функций, если

а) к случайной величине прибавить 1;

б) от случайной величины отнять 2;

в) умножить случайную величину на 2;

г) изменить знак случайный величины на противоположный?

6.14. Какими свойствами обязательно <u>обладает</u> функция распределения любой случайной величины:

а) четность; б) нечетность;

в) ограниченность; г) непрерывность справа (слева);

д) строгая монотонность; е) нестрогая монотонность;

ж) положительность; з) неотрицательность?

6.15. Какими свойствами <u>может обладать</u> плотность распределения случайной величины:

а) четность; б) нечетность;

в) ограниченность; г) неограниченность;

д) непрерывность; е) наличие одной точки разрыва;

ж) монотонность; з) периодичность;

и) положительность; к) неотрицательность?

6.16. Может ли функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,2]\\ x, & x\in[0,1)\\ x-1, & x\in[1,2]\end{cases}$$

быть плотностью вероятности случайной величины? Функцией распределения?

6.17. Может ли функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0)\cup(1,2)\\ x, & x\in[0,1)\\ 1, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$$

быть плотностью вероятности случайной величины? Функцией распределения?

6.18. Количество нефти в резервуаре представляет собой случайную величину. Может ли ее функция распределения иметь какой-либо из графиков, изображенных на рис.6 а) – г)? Какова особенность наполнения резервуара нефтью в каждом из возможных случаев?

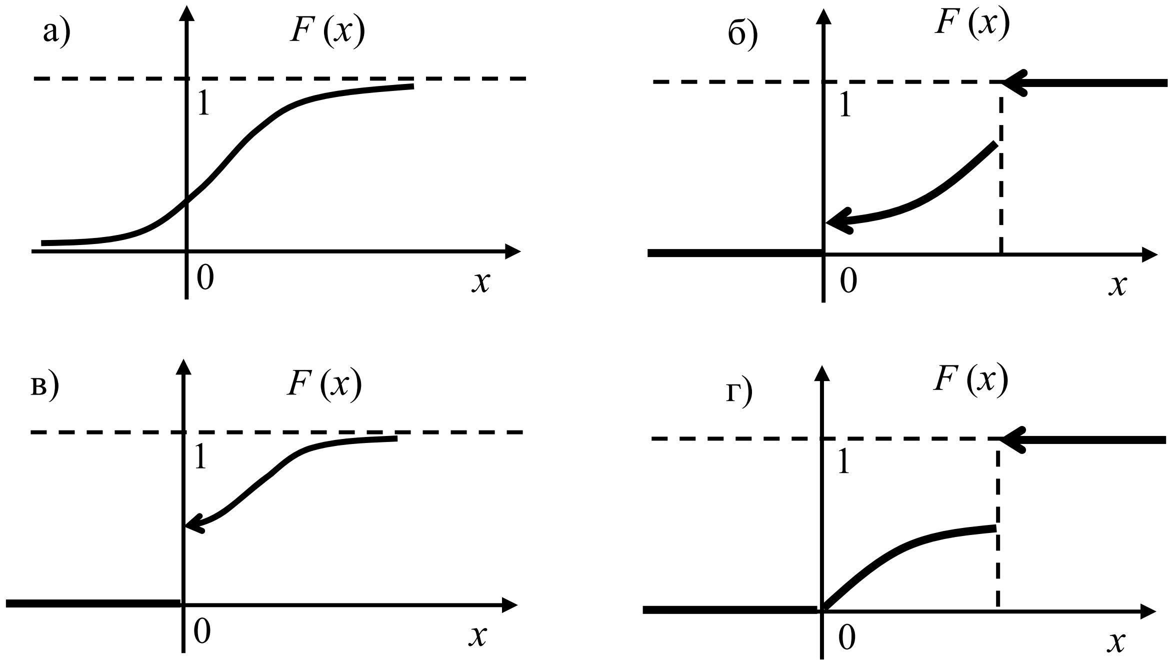


Рис. 6. К задаче 6.15.

6.19. Может ли второй начальный момент ν_2 случайной величины быть больше дисперсии?

6.20. Случайная величина ξ имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

а) Не проводя вычислений определить знак центрального момента третьего порядка μ_3. б) Найти медиану Me.

6.21. Случайная величина ξ задана функцией распределения $F(x)$. Выяснить, является ли случайная величина ξ непрерывной? Найти ее плотность вероятности $f(x)$, если она существует. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

а) $F(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-1, & 1\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}0{,}5e^{x}, & x\le 0\\ 0{,}8, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ г) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi/2\\ 1+\sin x, & -\pi/2<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

д) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \ln x, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ е) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\pi}(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x), & 0<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

6.22. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности (закон Релея):

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2axe^{-ax^2}, & x>0\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$ при $a = 0{,}5$.

6.23. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности (закон Лапласа):

$$f(x)=ae^{-\lambda|x|},\quad \lambda=\text{const}>0$$

Найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

6.24. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины ξ; б) вероятность события $A = \{0{,}2 < \xi < 0{,}9\}$; в) медиану Me.

6.25. Пусть плотность вероятности случайной величины ξ задается формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x^2}, & x>1\end{cases}$$

Найти вероятности $P\{A_1\cdot A_2\}$ и $P\{A_1+A_2\}$, если событие $A_1 = \{1 < \xi < 2\}$, а событие $A_2 = \{4 < \xi < 5\}$.

6.26. Случайная величина ξ распределена по закону Симпсона (рис. 7). Написать выражение для плотности вероятности. Найти функцию распределения и построить ее график. Определить вероятность $P\{-a/2 < \xi < a\}$.

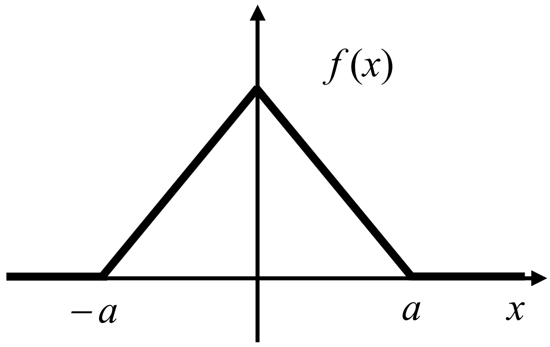


Рис. 7. Закон Симпсона

6.27. Точка брошена в круг радиуса R. Вероятность ее попадания в любую область внутри круга пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины ξ, равной расстоянию от точки до центра круга.

6.28. Автобусы движутся по маршруту с интервалом 10 мин. Время ожидания T автобуса на остановке имеет равномерное распределение. Найти: а) функцию распределения и плотность вероятности; б) среднее время ожидания автобуса и среднее квадратическое отклонение; в) вероятность того, что время ожидания автобуса не превысит 4 минут.

6.29. Правитель острова Хазерталь, решив ограничить численность женского населения в своем государстве, издал декрет, состоящий из двух пунктов:

1) Каждой семье разрешается обзавестись не более чем одной дочерью. После рождения девочки дальнейшее увеличение семьи не разрешается.
2) Общее количество детей в семье не может превышать четырех.

Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,5, выяснить, какую часть населения острова по прошествии длительного времени будут составлять мужчины.

6.30. Решить предыдущую задачу после отмены правителем второго пункта указа.

7. Специальные виды распределений

Некоторые частные виды распределения дискретных и непрерывных случайных величин особенно часто встречаются в прикладных задачах теории вероятностей. Для вычисления их основных числовых характеристик удобно пользоваться готовыми формулами.

К основным **дискретным** распределениям относятся:

Биномиальное распределение.

Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), $(0 < p < 1,\ n \geq 1)$, если она принимает значение $\xi = k$ с вероятностью

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k \left(1 - p\right)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n.$$

Математическое ожидание и дисперсия биномиально распределенной случайной величины ξ определяются соотношениями: $M\xi = np$; $D\xi = npq$, где $q = 1 - p$.

Геометрическое распределение.

Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p, $(0 < p < 1)$, если она принимает значение $\xi = k$ с вероятностью

$$P\{\xi = k\} = p(1 - p)^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Геометрически распределенная случайная величина имеет характеристики: $M\xi = \dfrac{1-p}{p}$; $D\xi = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Распределение Пуассона.

Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром a, (где $a > 0$), если

$$P\{\xi = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для распределения Пуассона $M\xi = a$; $D\xi = a$.

Важнейшие **непрерывные** распределения случайных величин:

Равномерное распределение.

Случайная величина ξ имеет на интервале $[a; b]$ **равномерное распределение**, если ее плотность вероятности постоянна на этом интервале (рис. 1), т.е.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases}.$$

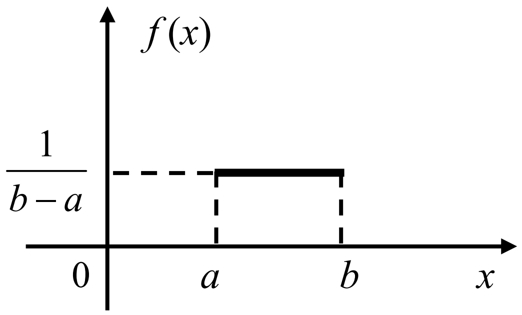


Рис. 1. Равномерное распределение.

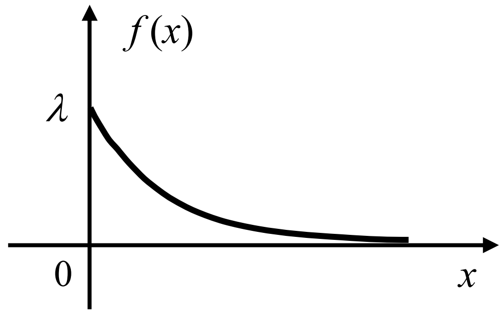


Рис. 2. Показательное распределение.

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины ξ есть $M\xi=\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия $D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное (экспоненциальное) распределение.

Случайная величина ξ имеет **показательное распределение** с параметром λ, (λ > 0), если ее плотность вероятности (рис. 2) определяется зависимостью

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Показательно распределенная случайная величина ξ имеет характеристики: $M\xi=\dfrac{1}{\lambda};\ D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Нормальное распределение.

Случайная величина ξ имеет **нормальное (гауссовское) распределение** с параметрами (a; σ^2), если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Функция распределения нормально распределенной случайной величины представляется интегралом, не выражаемым через элементарные функции:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

Параметр a нормального распределения имеет смысл математического ожидания случайной величины ξ: $M\xi=a$; параметр σ^2 представляет ее дисперсию: $D\xi=\sigma^2$. Медиана нормального распределения совпадает с математическим ожиданием: $Me=M\xi=a$; асимметрия равна нулю: $A=0$.

График функции $f(x)$ носит название ***гауссовской кривой*** и представлен на рис.3. Там же справа изображена банкнота в 10 марок ФРГ, которая использовалась до введения евро. На банкноте – гауссовская кривая и ее первооткрыватель – великий немецкий математик *Карл Фридрих Гаусс* (1777 – 1855).

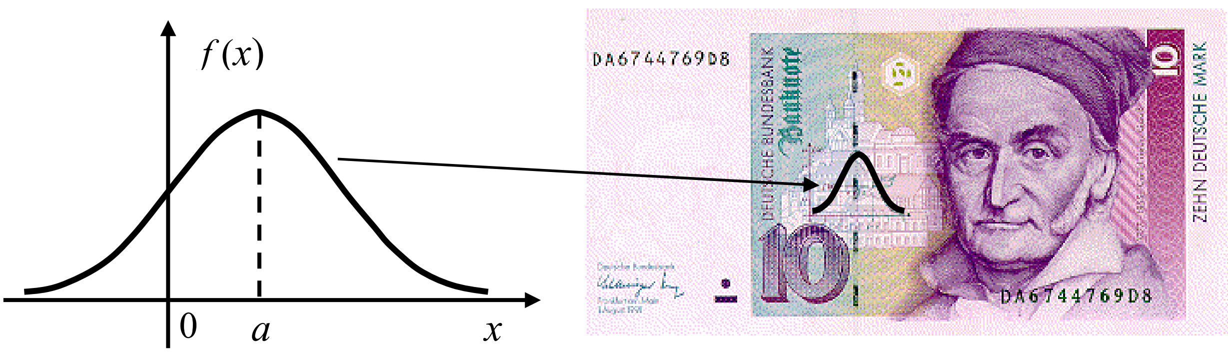


Рис. 3. Нормальное (гауссовское) распределение.

Для краткости нормальное распределение с параметрами (a; σ^2) обозначают $N(a;\sigma^2)$. Если случайную величину ξ нормировать, т.е. вычесть a и разделить на σ, то полученная случайная величина $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$ будет иметь распределение $N(0;1)$, так называемое, ***стандартное нормальное распределение***.

Функция распределения стандартного нормального распределения табулирована и обозначается через $F_{\text{о}}(x)$:

$$F_{\text{о}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

Эта функция обладает свойством: $F_{\text{о}}(-x) = 1 - F_{\text{о}}(x)$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины $\xi \in N\left(a, \sigma^2\right)$ в заданный интервал находится по формуле

$$P\{c < \xi < d\} = F_{\text{о}}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - F_{\text{о}}\left(\frac{c-a}{\sigma}\right).$$

Эта же вероятность может быть выражена через также табулированную (см. Приложение) функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

аналогичным образом:

$$P\{c < \xi < d\} = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right),$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ изображена на рис. 4.

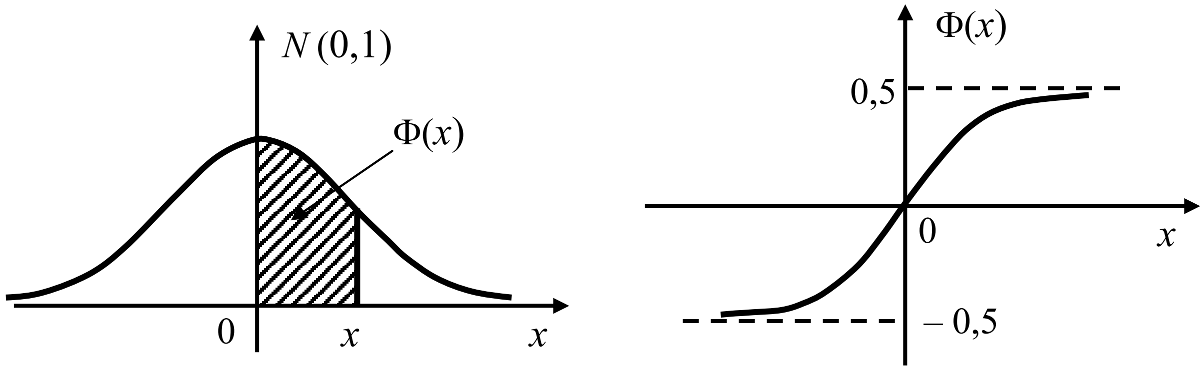


Рис.4. Функция Лапласа.

Отметим **свойства** функции Лапласа:

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ – нечетная функция;
2. $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая функция;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0,5$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = -0,5$

Полезно запомнить следующие важные значения функции Лапласа:

$\Phi(2) = 0,9545:2 = 0,47725;$ $\qquad$ $\Phi(3) = 0,9973:2 = 0,49865$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины $\xi \in N(a,\sigma^2)$ в интервал, симметричный относительно математического ожидания a, может быть вычислена по формуле

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

***Правило* 3σ.** Для нормально распределенной случайной величины попадание в 3^{x}-сигмовый интервал $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$ представляет собой практически достоверное событие. Его вероятность близка к единице:

$$P\{a - 3\sigma < \xi < a - 3\sigma\} \approx 0,9973$$

Замечание. В литературе встречаются и иное определение функции Лапласа: $\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Функции $\Phi(x)$, $F_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ легко выражаются одна через другую:

$$\boxed{\begin{gathered} F_0(x) = \Phi(x) + 0,5 \\ \Phi_1(x) = 2\,\Phi(x) \end{gathered}}$$

Помимо перечисленных выше функций, иногда используют, так называемую, ***функцию ошибок***:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt,$$

которую также легко связать с функцией Лапласа:

$$\boxed{\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2})}$$

Таблица основных видов распределения случайных величин.

Распределение		***Параметры***	$M\xi$	$D\xi$
Биномиальное	$P\{\xi=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$	n, p $(n\in N,$ $0<p<1)$	np	npq
Пуассона	$P\{\xi=k\}=\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$ $k=0, 1, 2, \ldots$	a $(a>0)$	a	a
Геометрическое	$P\{\xi=k\}=p(1-p)^k$ $k=0, 1, 2, \ldots$	p $(0<p<1)$	$\dfrac{1-p}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Равномерное	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases}$	a, b $(a<b)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Показательное	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	λ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Нормальное (гауссовское) $N(a,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a, σ $(a\in\mathbb{R},$ $\sigma>0)$	a	σ^2

ПРИМЕР 1. Контрольное задание (тест) состоит из 10 вопросов, предусматривающих ответы «да» и «нет». Тестируемый решил на каждый вопрос давать ответ наудачу. Найти: а) среднее число правильных ответов; б) вероятность того, что он ответит правильно на все вопросы; в) вероятность того, что он ошибется не более двух раз.

Решение. В данном примере проводится 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха в каждом $p = 1/2$. Следовательно, случайная величина ξ – количество правильных ответов подчиняется биномиальному закону распределения с параметрами $n = 10$; $p = 1/2$. Тогда имеем а) $M\xi = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

б) $P\{\xi = 10\} = C_{10}^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}}$; в) вероятность ошибиться не более двух раз, т.е. два раза или меньше, соответствует $P\{\xi \geq 8\}$ – вероятность дать правильный ответ 8 раз или больше, и может быть найдена двумя способами:

$$P\{\xi \geq 8\} = \sum_{k=8}^{10} C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \sum_{k=8}^{10} C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10},$$

либо через вероятность противоположного события

$$P\{\xi \geq 8\} = 1 - P\{\xi < 8\} = 1 - \sum_{k=0}^{7} C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

(Первый способ, разумеется, предпочтительней, т.к. требует нахождения суммы лишь трех слагаемых – при $k = 8$, $k = 9$ и $k = 10$).

ПРИМЕР 2. Случайная величина ξ – напряжение в электрической сети изменяется по нормальному закону с параметрами $a = 220$ В и $\sigma = 3$ В. определить вероятность того, что отклонение случайной величины ξ от ее математического ожидания будет не более 5 В.

Решение. Случайная величина $\xi \in N\,(220;\ 3^2)$. Отклонение случайной величины ξ от математического ожидания возможно в обе стороны, поэтому нужно вычислить вероятность $P\{|\xi - a| < 5\} = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 2\Phi(1{,}67) \approx 0.905$, где значение $\Phi(1{,}67) = 0{,}4525$ найдено по таблице функции Лапласа.

<u>**Задачи к разделу 7.**</u>

7.1. Случайная величина ξ равномерно распределена на интервале [1; 13]. Написать выражение для плотности вероятности и функции распределения, изобразить их графически. Вычислить, не пользуясь готовыми формулами, величины $M\xi$, $D\xi$ и σ. Найти вероятность попадания случайной величины ξ в интервал [4; 27].

7.2. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = k\,e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$$

Найти коэффициент k и параметр σ. Написать вид функции распределения $F(x)$; определить $F(-1{,}3)$ и $F(4{,}1)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины ξ в промежуток [2; 5].

7.3. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. Написать выражение для плотности вероятности и функции распределения и изобразить их графически. Пользуясь правилом "трех сигм", найти интервал, в который практически достоверно (с вероятностью 0,997) попадает случайная величина:

а) $a=0$, $\sigma=1$; б) $a=2$, $\sigma=1$;

в) $a=-2$, $\sigma=1$; в) $a=0$, $\sigma=0{,}5$

7.4. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $\xi \in N(1,2)$. Какое событие более вероятно: $3 \le \xi \le 4$ или $-1 \le \xi \le 0$?

7.5. Давление на выходе компрессорной станции представляет собой случайную величину, имеющую нормальный закон распределения с параметрами $a=5\cdot 10^6$ Па и $\sigma=2\cdot 10^5$ Па. Найти вероятности событий:

A – давление в системе превысит $5{,}4\cdot 10^6$ Па,

B – давление в системе не превзойдет $4{,}7\cdot 10^6$ Па.

C – давление в системе будет в пределах $(4{,}9 \div 5{,}2)\cdot 10^6$ Па.

7.6. Суточный дебит скважины на газовом промысле можно считать случайной величиной η, имеющей нормальный закон распределения с математическим ожиданием $a = 1 \cdot 10^6$ м^3/сут и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2 \cdot 10^6$ м^3/сут. Найти вероятности событий:

A – суточный дебит будет больше $1{,}5 \cdot 10^6$ м^3/сут,

B – суточный дебит не превысит $0{,}9 \cdot 10^6$ м^3/сут.

C – суточный дебит будет заключен в пределах $(0{,}8 \div 1{,}2) \cdot 10^6$ м^3/сут.

7.7. Имеются два прибора, относительные ошибки ξ_1 и ξ_2 измерения которых распределены по нормальному закону: $\xi_1 \in N(0; 0{,}16)$, $\xi_2 \in N(0{,}1; 0{,}09)$. Каким прибором следует воспользоваться, чтобы вероятность более, чем 50%-ной относительной ошибки, была наименьшей?

7.8. Участок газопровода между двумя компрессорными станциями (КС) имеет длину 100 км. Появление утечки газа равновероятно в любой точке участка. Какова вероятность, что она произойдет ближе 10 км от одной из КС?

7.9. В условиях предыдущей задачи в середине газопровода имеется участок длиной 20 км, где из-за характера местности плотность вероятности утечки в два раза выше, чем в остальной части газопровода. Написать выражение для плотности вероятности и функции распределения расстояния до места утечки газа. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Найти вероятность, что утечка произойдет ближе 10 км от одной из КС.

7.10. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены по биномиальному закону с параметрами $n_1 = 20, p_1 = 0{,}2$ и $n_2 = 20, p_2 = 0{,}3$. Какое событие более вероятно: $\xi_1 \le 8$ или $\xi_2 \le 8$?

7.11. Случайные величины ξ и η распределены по экспоненциальному закону с параметрами 2 и 4 соответственно. Какое событие более вероятно: $0 \le \xi \le 3$ или $0 \le \eta \le 3$?

7.12. Случайные величины ξ распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти условную вероятность: $P\{\xi < 2a / \xi > a\}$, если $a = 0{,}5$.

7.13. Количество заявок от геологических партий на использование специальной аппаратуры представляет собой случайную величину, распределенную по закону Пуассона. В среднем за месяц поступает 24 заявки. Найти вероятность событий:

A – за месяц будет более 24 заявок;

B – в течение 5 суток аппаратура будет простаивать;

C – на протяжении 10 суток поступит не менее 7 заявок.

7.14. Число отказов за год на участке магистрального трубопровода подчинено закону Пуассона с параметром a = 0,8 (1/год). Найти среднее время безотказной работы участка. а) Через какой промежуток времени вероятность появления отказа превысит 0,5? б) Найти вероятность того, что в течение трех лет будет не менее двух отказов.

7.15. Эксплуатируются 5 скважин, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,1. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти?

7.16. Среди 12 одинаковых конденсаторов есть 2 перегоревших. Конденсаторы по очереди вставляются в цепь, пока не будут выявлены оба перегоревших. Какова вероятность, что понадобится ровно 7 испытаний?

7.17. Бросается монета до первого появления "решки". Случайная величина ξ равна количеству бросаний. Найти закон распределения случайной величины ξ и вероятность события $\{\xi < 3\}$.

7.18. Бросается игральная кость до первого появления шестерки. Случайная величина ξ равна количеству бросаний. Найти закон распределения случайной величины ξ и вероятность события $\{\xi < 6\}$.

7.19. На пути движения автомобиля 6 светофоров, на каждом из которых горит с вероятностью 0,5 зеленый свет, и с такой же вероятностью – красный. Найти закон распределения случайной величины ξ – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

7.20. Какова максимально возможная вероятность достижения двух успехов в серии из 3 испытаний Бернулли?

7.21. (Гамма – распределение). Время безотказной работы конденсаторов хорошо описывается случайной величиной ξ с плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$$

где $\Gamma(p)=\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ – гамма-функция, для натуральных значений p удовлетворяющая равенству $\Gamma(p)=(p-1)!$). (Для натуральных p гамма-распределение носит также название **распределения Эрланга**).

а) доказать, что при $p=1$ гамма-распределение совпадает с экспоненциальным;

б) найти функцию распределения случайной величины ξ;

в) для значений параметров $p=3$, $\lambda=0{,}5$ 1/год определить вероятность безотказной работы конденсатора в течение 3 лет;

г) доказать, что $M\xi=\dfrac{p}{\lambda}$, $D\xi=\dfrac{p}{\lambda^2}$.

7.22. (Логарифмически нормальное распределение). Плотность вероятности случайной величины ξ задана функцией

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge 0 \end{cases}$$

а) Построить график плотности вероятности логарифмически нормального распределения;

б) Найти функцию распределения случайной величины ξ и построить ее график;

в) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ;

г) Найти вероятности событий: $A=\{0<\xi<2\}$, $B=\{1<\xi\}$.

8. Системы случайных величин

Совокупность двух и более случайных величин называется системой случайных величин, или случайным вектором. Функция распределения пары случайных величин ξ, η (координат случайного вектора) определяется формулой

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}.$$

Функция распределения системы n случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определяется формулой

$$F(x_1, x_2 ... x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}.$$

Функция распределения пары случайных величин обладает следующими **свойствами**:

1. $F(x,y)$ не убывает по каждому из своих аргументов.
2. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0.$
3. $F(+\infty, +\infty) = 1.$
4. $F(x, +\infty) = F_\xi(x), \quad F(+\infty, y) = F_\eta(y),$

где $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ – функции распределения величин ξ и η соответственно.

Закон распределения пары случайных величин дискретного типа может быть задан матрицей

ξ \ η	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – возможные значения величины ξ; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – возможные значения величины η. В ячейках таблицы расположены вероятности событий

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

Вероятности p_{ij} удовлетворяют **условиям**:

1. $p_{ij} \geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$
3. $p\{\eta = y_j\} = p_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$
4. $p\{\xi = x_i\} = p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

Если величины ξ, η – непрерывного типа, то закон их совместного распределения может быть задан плотностью распределения вероятностей:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{x \leq \xi < x + \Delta x,\ y \leq \eta < y + \Delta y\}}{\Delta x\, \Delta y}.$$

Плотность и функция распределения двумерной случайной величины связаны соотношениями:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}, \qquad F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy.$$

Плотность вероятности пары случайных величин обладает **свойствами**:

1. $f(x,y) \geq 0.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$
3. $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx,$

   где $f_\xi(x), f_\eta(y)$ – плотности случайных величин ξ и η.

Вероятность попадания случайной точки в некоторую область D выражается через плотность вероятности $f(x,y)$:

$$P\{(\xi,\eta) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Условные плотности распределения, т.е. плотности вероятности одной из случайных величин при условии, что другая принимает постоянное значение, определяется формулами:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)},\quad f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}.$$

Случайные величины ξ, η называются ***независимыми***, если их функция распределения равна произведению функций распределения компонент ξ и η:

$$F(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$$

Для непрерывных <u>независимых</u> случайных величин ξ, η условные и безусловные плотности вероятностей совпадают: $f(x/y)=f_\xi(x)$ и $f(y/x)=f_\eta(y)$, а двумерная плотность равна произведению плотностей компонент:

$$f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$$

Начальные моменты пары случайных величин ξ, η определяются формулой

$$\nu_{ks}=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_i^k y_j^s p_{ij} & (\textbf{\textit{для дискретных величин}})\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)\,dx\,dy & (\textbf{\textit{для непрерывных величин}})\end{cases}$$

При этом $\nu_{10}=M\xi,\quad \nu_{01}=M\eta.$

Аналогично определяются ***центральные моменты*** пары случайных величин ξ и η:

$$\mu_{ks}=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j (x_i-M\xi)^k(y_j-M\eta)^s p_{ij} & (\textbf{\textit{для дискретных величин}})\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^k(y-M\eta)^s f(x,y)dxdy & (\textbf{\textit{для непрерывных величин}})\end{cases}$$

При этом $\mu_{20}=\sigma_\xi^2=D\xi,\quad \mu_{02}=\sigma_\eta^2=D\eta.$

Второй смешанный центральный момент μ_{11} называется ***корреляционным моментом***, (или ***ковариацией***) случайных величин ξ и η:

$$K_{\xi\eta} = \mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mu_{11} = M\left[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right] = M\left(\xi\cdot\eta\right) - M\xi\cdot M\eta$$

Вместо корреляционного момента часто используют безразмерную величину

$$r = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta},$$

называемую ***коэффициентом корреляции***.

Замечание. Если две случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: если две случайные величины ***некоррелированы***, т.е. их коэффициент корреляции равен нулю, то из этого еще не следует их независимость.

Пусть ξ, η – произвольные случайные величины, μ_{11} – их корреляционный момент, C – детерминированная (постоянная) величина. Тогда математическое ожидание и дисперсия обладают следующими ***свойствами***:

1. $M(C) = C$;
2. $M(C\xi) = C\cdot M\xi$;
3. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$;
4. $M(\xi\cdot\eta) = M\xi \cdot M\eta + \mu_{11}$;
5. $D\xi \geq 0$
6. $D(C) = 0$;
7. $D(C\xi) = C^2\cdot D\xi$;
8. $D(\xi \pm\eta) = D\xi + D\eta \pm 2\mu_{11}$.

В частном случае некоррелированных случайных величин ξ и η равенства 4 и 8 упрощаются и принимают вид

$$M(\xi\eta) = M\xi\cdot M\eta, \qquad D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$$

Коэффициент корреляции r случайных величин ξ, η удовлетворяет неравенствам

$$-1 \leq r \leq 1$$

Абсолютная величина коэффициента корреляции равна 1 тогда и только тогда, если ξ и η связаны линейной функциональной зависимостью

$$\eta = a\xi + b,$$

где a и b – детерминированные величины, причем $r = +1$ при $a > 0$ и $r = -1$ при $a < 0$. Коэффициент корреляции характеризует меру линейной зависимости между случайными величинами.

Основными числовыми характеристиками **системы *n* случайных величин** $\xi_1, \ldots, \xi_n$ служат математические ожидания $M\xi_i$, дисперсии $D\xi_i = \sigma_i^2$ и корреляционные моменты каждой пары величин (ξ_i, ξ_j):

$$k_{ij} = M[(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)].$$

Матрица, составленная из корреляционных моментов, называется ***корреляционной* (*ковариационной*) *матрицей***:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты корреляции $r_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ образуют ***нормированную корреляционную матрицу***:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Корреляционная матрица K и нормированная корреляционная матрица R симметричны относительно своих главных диагоналей.

Двумерное нормальное распределение.

Система двух случайных величин непрерывного типа с плотностью

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-r^2}}\,e^{-G(x,y)},$$

где

$$G(x,y)=\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2}-\frac{2r(x-a_\xi)(y-a_\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}+\frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma_\eta^2}\right]$$

называется распределенной по ***нормальному закону***. Нормальное распределение на плоскости зависит от 5 параметров a_ξ, a_η, σ_ξ, σ_η, r, причем a_ξ и a_η являются математическими ожиданиями случайных величин ξ и η, σ_ξ^2 и σ_η^2 – их дисперсиями, а r – коэффициентом корреляции.

ПРИМЕР 1. Закон распределения системы случайных величин (ξ, η) задан таблицей

x_i \ y_i	0	1	2	3
–1	0,02	0,06	0,08	0,04
0	0,03	0,12	0,2	0,15
1	0,05	0,02	0,22	0,01

Найти: а) закон распределения случайной величины η; б) $M\eta$ и $D\eta$; в) условный закон распределения величины η при условии, что ξ приняла значение равное 0; г) являются ли величины ξ и η независимыми?

Решение.

а) найдем вероятности событий

$$P\{\eta=0\}=P\{\eta=0;\xi=-1\}+P\{\eta=0;\xi=0\}+P\{\eta=0;\xi=1\}=$$
$$=0,02+0,03+0,05=0,1$$
$$P\{\eta=1\}=P\{\eta=1;\xi=-1\}+P\{\eta=1;\xi=0\}+P\{\eta=1;\xi=1\}=$$
$$=0,06+0,12+0,02=0,2$$

$$P\{\eta=2\}=P\{\eta=2;\xi=-1\}+P\{\eta=2;\xi=0\}+P\{\eta=2;\xi=-1\}=$$
$$=0,08+0,20+0,22=0,5$$
$$P\{\eta=3\}=P\{\eta=3;\xi=-1\}+P\{\eta=3;\xi=0\}+P\{\eta=3;\xi=1\}=$$
$$=0,04+0,15+0,01=0,2$$

Теперь может быть записан закон распределения случайной величины η:

y_j	0	1	2	3
p_j	0,1	0,2	0,5	0,2

(Легко проверить, что $\sum\limits_j p_j=1$).

б) Математическое ожидание случайной величины η:

$$M\eta=\sum_j y_j p_j=0\cdot 0,1+1\cdot 0,2+2\cdot 0,5+3\cdot 0,2=1,8$$

Дисперсия случайной величины η:

$$D\eta=\sum_j y_j^2 p_j-(M\eta)^2=0\cdot 0,1+1\cdot 0,2+4\cdot 0,5+9\cdot 0,2-1,8^2=0,76$$

в) Условные вероятности находятся из теоремы умножения формуле Байеса:

$$P\{\eta=y_j/\xi=x_i\}=\frac{P\{\eta=y_j,\xi=x_i\}}{P\{\xi=x_i\}}.$$

Поскольку $P\{\xi=0\}=0,03+0,12+0,20+0,15=0,5$, получаем

$$P\{\eta=0/\xi=0\}=\frac{0,03}{0,5}=0.06; \qquad P\{\eta=1/\xi=0\}=\frac{0,12}{0,5}=0,24;$$

$$P\{\eta=2/\xi=0\}=\frac{0,20}{0,5}=0,4; \qquad P\{\eta=3/\xi=0\}=\frac{0,15}{0,5}=0,3$$

Таким образом, условный закон распределения η при условии, что случайная величина ξ приняла значение x_i=0, имеет вид

y_j / {ξ = 0}	0	1	2	3
q_j	0,06	0,24	0,4	0,3

(Как и следовало ожидать, $\sum\limits_j P\{\eta=j/\xi=0\}=1$).

г) Безусловный закон распределения случайной величины η и условный закон распределения этой же случайной величины при условии, что $\xi=0$, не совпадают. Следовательно, случайные величины ξ и η зависимы.

ПРИМЕР 2. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана функцией

$$f(x,y)=\begin{cases}3(x+y), & (\xi,\eta)\in D\\ 0, & (\xi,\eta)\notin D\end{cases},$$

где область D заштрихована на рис.1.

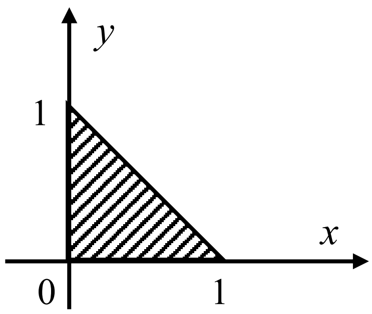


Рис. 1. К примеру 1.

Найти:

а) плотности распределения случайных величин ξ и η;

б) $M\xi$ и $D\xi$;

в) условную плотность случайной величины η;

г) ковариацию случайных величин ξ и η;

д) коэффициент корреляции;

е) выяснить, зависимы ли величины ξ и η.

Решение.

а) плотности распределения случайных величин ξ и η:

$$f_\xi(x)=\int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy=3\int\limits_0^{1-x}(x+y)dy=3\left(xy+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right)=\frac{3}{2}(1-x^2)$$

$$f_\eta(y)=\int\limits_0^{1-y} f(x,y)dx=3\int\limits_0^{1-y}(x+y)dx=3\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{1-y}+xy\Bigg|_0^{1-y}\right)=\frac{3}{2}(1-y^2)$$

б) Математическое ожидание и дисперсия ξ:

$$M\xi = \int_0^1 x f_\xi(x)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{3}{8};$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)dx - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320}$$

в) Математическое ожидание и дисперсия η:

$$M\eta = \int_0^1 y f_\eta(y)dy = \frac{3}{2}\int_0^1 y(1-y^2)dy = \frac{3}{8}$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = \frac{3}{2}\int_0^1 y^2(1-y^2)dy - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320}$$

в) условная плотность вероятности случайной величины η:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{3(x+y)}{\frac{3}{2}(1-x^2)} = 2\frac{x+y}{1-x^2}$$

г) ковариация случайных величин ξ и η:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x-M\xi)(y-M\eta)f(x,y)dy =$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x-\frac{3}{8})(y-\frac{3}{8})(x+y)dy = -\frac{13}{120}$$

д) коэффициент корреляции

$$r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}} = \frac{-13/320}{\sqrt{19/320\cdot 19/320}} = -\frac{13}{19}$$

е) безусловная плотность $f_\eta(y) = \frac{3}{2}(1-y^2)$ случайной величины η не совпадает с условной плотностью $f(y/x) = 2\frac{x+y}{1-x^2}$, следовательно, случайные величины ξ и η зависимы. Этот вывод можно было сделать сразу, исходя из того факта, что условная плотность $f(y/x)$ оказалась зависящей от переменной x. Кроме того, коэффициент корреляции случайных величин ξ и η оказался отличным от нуля, что также свидетельствует о том, что эти случайные величин зависимы.

Задачи к разделу 8.

8.1. Закон распределения системы случайных величин (ξ, η) задан таблицей

x_i \ y_i	– 1	0	1
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,1
2	0,05	0,15	0,1
3	0,04	0,07	0,09

Найти: а) законы распределения случайных величин ξ и η; б) условный закон распределения η при условии, что $\xi = 0$; б) вероятность события $\{\xi < 2, \eta < 1\}$; в) вероятность события $\{\xi > 1\}$ при условии, что $\eta \geq 0$; г) выяснить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми. Коррелированы ли они?

8.2. Закон распределения системы случайных величин (ξ, η) задан таблицей

x_i \ y_i	– 1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Найти: а) законы распределения случайных величин ξ и η; б) условный закон распределения ξ при условии, что $\eta = 1$; в) вероятность события $\{\xi = 1, \eta \geq 0\}$; г) условную вероятность $P\{\xi > 0 / \eta \geq 0\}$; д) выяснить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми; е) коррелированны ли величины ξ и η ?

8.3. Два студента после окончания занятий в институте заходят в кафе попить пива. Каждый при этом выпивает от одной до трех кружек. Законы распределения количества кружек пива, выпиваемых товарищами, представлены в таблицах:

Студент А	1	2	3
p	0,1	0,3	0,6

Студент Б	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Розничная цена каждой кружки пива составляет 30 рублей, при этом закупочная цена равна 15 рублям, а издержки при продаже составляют 3 рубля. Найти закон распределения прибыли, полученной продавцом пива от посещения этих двух студентов.

8.4. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) представлен таблицей

$x_i \backslash y_i$	0	1	2	3
– 1	0,02	0,03	0,01	0,09
0	0,04	0,2	0,15	0,1
1	0,05	0,1	0,18	0,03

Найти: а) законы распределения случайных величин ξ и η; б) условный закон распределения величины ξ при условии, что η = 2; в) условный закон распределения η при условии, что ξ = 0; г) вероятность события {ξ = 1, η ≥ 0}; д) вероятность $P\{\eta > \xi\}$; е) условную вероятность $P\{\eta > 0 / \xi < 1\}$; ж) зависимы ли случайные величины ξ и η; е) коррелированны ли величины ξ и η?

8.5. Случайные величины ξ и η независимы и распределены по нормальному закону: $\xi \in N(0;1)$, $\eta \in N(0;1)$. Найти вероятность того, что случайная точка попадет в кольцо $\left\{(x, y) : 2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3\right\}$.

8.6. Двумерная случайная величина (ξ, η) в области D имеет плотность распределения $f(x, y) = Axy$. Область D – треугольник, изображенный на рис. 1. Найти: а) величину A; б) математические ожидания Mξ и Mη; в) дисперсии Dξ и Dη; г) ковариацию cov (ξ, η); д) коэффициент корреляции r (ξ, η).

8.7. Дважды бросается монета. Пусть ξ – количество выпавших «решек», η – количество выпавших «орлов». Найти: а) закон распределения системы случайных величин (ξ, η); б) законы распределения случайных величин ξ и η; в) условный закон распределения ξ при условии, что η = 1. Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

8.8. Дважды бросается игральная кость. Пусть ξ – количество выпавших очков при первом бросании, η – сумма выпавших очков в двух бросаниях. Найти:
а) закон распределения системы случайных величин (ξ, η); б) законы распределения случайных величин ξ и η; в) условный закон распределения η при условии, что $\xi = 3$; г) вероятность события $\{1 \le \xi < 4, \eta \le 10\}$. Являются ли случайные величины ξ и η зависимыми?

8.9. Из коробки, в которой находится 4 красных, 2 синих и 3 зеленых ручек, наудачу извлекли 3 ручки. Введены случайные величины: ξ – число красных и η – число синих ручек среди извлеченных. Найти: а) закон распределения системы (ξ, η); б) законы распределения случайных величин ξ и η в отдельности; в) условный закон распределения ξ при условии, что $\eta = 1$; г) вероятность события $\{\xi < 3, \eta = 2\}$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

8.10. 10 студентов сдавали письменный экзамен по математике, причем 4 получили оценку «отлично», 3 – «хорошо», а остальные – «удовлетворительно». Случайным образом отобрано 4 работы. Пусть ξ – число отличных, а η – число хороших работ среди отобранных. Найти: а) закон распределения системы случайных величин (ξ, η); б) законы распределения случайных величин ξ и η; в) условный закон распределения ξ при условии, что $\eta = 2$; г) вероятность события $\{\xi \ge 2, \eta \le 2\}$. Являются ли случайные величины ξ и η зависимыми?

8.11. Система случайных величин равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 2$, $y = 0$, $y = x$. Найти: а) плотность вероятности $f(x, y)$ системы величин (ξ, η); б) функцию распределения $F(x, y)$; в) плотности вероятности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ величин ξ и η; г) функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ величин ξ и η; д) вероятность того, что случайная точка окажется удаленной от начала координат не более, чем на 2. Доказать, что случайные величины ξ и η зависимы.

8.12. Система случайных величин (ξ, η) равномерно распределена в квадрате с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$. Найти: а) плотность вероятности $f(x, y)$ системы; б) функцию распределения системы; в) плотности вероятности величин ξ и η в отдельности; г) вероятность $P\{\xi \le 0,\ \eta \le 0\}$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

8.13. Система случайных величин (ξ, η) равномерно распределена в круге радиуса R с центром в начале координат. Найти: а) плотность вероятности системы; б) плотности вероятности величин ξ и η; в) $P\{|\xi| \le R/2,\ 0 \le \eta \le R/3\}$. Зависимы или нет случайные величины ξ и η?

8.14. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с параметрами $a_1 = 3$, $a_2 = -2$ и $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 4$. Найти: а) совместную плотность вероятности $f(x, y)$; в) плотности вероятности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ величин ξ и η; г) функцию распределения системы (ξ, η); г) вероятность попадания точки (ξ, η) в прямоугольник $1 \le \xi \le 5,\ -6 \le \eta \le 2$.

8.15. Показать, что случайные величины ξ и η с плотностью вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-y), & \text{при} \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

независимы.

8.16. Плотность вероятности двумерного случайного вектора (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda(xy + y^2), & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти значение постоянной λ и вероятность $P\{x + y < 2\}$.

8.17. Случайный вектор (ξ,η) распределен в квадрате $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ с плотностью $f(x,y) = 3xy(2-y)$.

1) Будут ли случайные величины ξ и η независимы? Коррелированы ли они?

2) Найти вероятности событий: а) $\xi > \eta$; б) $\eta - \xi > 0{,}5$; в) $\eta > 0{,}5$.

3) Найти вероятность того, что конец вектора (ξ,η) удален от начала координат не более чем на 1.

8.18. Случайный вектор (ξ,η) распределен равномерно в круге $x^2 + y^2 < R^2$. Найти плотность вероятности и функцию распределения величин ξ и η. Будут ли случайные величины ξ и η независимыми? Коррелированными?

8.19. Случайные величины ξ и η распределены на плоскости нормально, причем $M\xi = 20$, $M\eta = -24$, а их корреляционная матрица имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 81 & -33 \\ -33 & 121 \end{pmatrix}$$

Определить плотность распределения случайного вектора (ξ, η).

8.20. Случайный вектор (ξ, η) распределен на плоскости нормально, причем $M\xi = M\eta = 0$, $\sigma_\xi = \sigma_\eta = 1/\sqrt{2}$, $\mu_{11}=0$. Найти вероятности событий: а) $\xi > 0$; б) $\xi \le \eta$; в) конец вектора (ξ, η) принадлежит кругу $x^2 + y^2 < R^2$; г) конец вектора (ξ, η) принадлежит квадрату $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

8.21. Компрессорная станция (КС) состоит из блока технических устройств (ТУ) и блока насосно-силовых агрегатов (НА). Время безотказной работы КС распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}003$ 1/ч. Считая, что отказы в блоках возникают независимо друг от друга, определить среднее время безотказной работы блока НА, если среднее время безотказной работы блока ТУ составляет 1000 ч.

8.22. Забойное и пластовое давления нефтяной скважины представляют собой случайный вектор (ξ, η), имеющий нормальное распределение с параметрами $M\xi = 1{,}5 \cdot 10^7$ Па, $M\eta = 1{,}3 \cdot 10^7$ Па, $\sigma_\xi = 2{,}5 \cdot 10^6$ Па, $\sigma_\eta = 3 \cdot 10^6$ Па, $r = 0{,}93$. Найти вероятность, что при измерении забойное давление окажется в пределах $(1{,}25 \div 1{,}75) \cdot 10^7$ Па, а пластовое – в пределах $(1{,}0 \div 1{,}6) \cdot 10^7$ Па.

8.23. Обратное и прямое напряжение пробоя полупроводникового диода можно рассматривать как случайный вектор $(\xi; \eta)$, имеющий нормальное распределение с параметрами: $a_\xi = 100$ В, $a_\eta = 0{,}78$ В, $\sigma_\xi = 5$ В, $\sigma_\eta = 0{,}07$ В, $r = 0{,}5$. Диоды, имеющие обратное напряжение пробоя $\xi > 105$ В или прямое напряжение пробоя $\eta < 0{,}64$ В, бракуются. Определить вероятность того, что выбранный случайным образом диод будет забракован.

8.24. Решить предыдущую задачу в предположении, что обратное и прямое напряжения пробоя являются независимыми случайными величинами.

9. Функции случайных величин

Часто в теории вероятностей одна случайная величина представляет собой некоторую известную функцию другой случайной величины. Возникает вопрос о том, как связаны между собой характеристики таких случайных величин (ряд и функция распределения, математическое ожидание, дисперсия, …).

Пусть ξ – дискретная случайная величина с рядом распределения

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

а случайная величина η связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = \varphi(\xi)$. Тогда, если все величины $\varphi(x_i)$ различны, то закон распределения η имеет вид

y_i	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

В случае совпадения нескольких значений $\varphi(x_i)$ соответствующие столбцы таблицы заменяются одним столбцом с вероятностью, равной сумме вероятностей объединяемых столбцов.

Если ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то плотность распределения случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$, где $\varphi(x)$ – монотонная функция, находят по формуле

$$g(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\left|\left(\varphi^{-1}(y)\right)'\right|$$

где $x = \varphi^{-1}(y)$ – функция, обратная для функции $y = \varphi(x)$.

Функция распределения случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$, если $\varphi(\xi)$ – монотонно <u>возрастающая</u> функция, равна

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f(x)dx$$

Если же $\varphi(x)$ – монотонно <u>убывающая</u> функция, то

$$F(y)=\int\limits_{\varphi^{-1}(y)}^{\infty} f(x)dx.$$

Математическое ожидание случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ равно

$$m_\eta = M\left[\varphi(\xi)\right] = \begin{cases} \sum\limits_i \varphi(x_i)p_i & \textbf{(\textit{для дискретных величин})} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx & \textbf{(\textit{для непрерывных величин})} \end{cases}$$

Математическое ожидание функции $\varphi(\xi;\ \eta)$ двух <u>дискретных</u> случайных величин $(\xi;\ \eta)$ находится по формуле:

$$M\left[\varphi(\xi;\eta)\right] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_i)p_{ij}\ ,$$

где суммирование проводится по всем возможным значениям величин ξ и η.

Математическое ожидание функции $\eta = \varphi(\xi;\ \eta)$ двух <u>непрерывных</u> случайных величин с плотностью $f(x;\ y)$ находится с помощью двойного интеграла:

$$M\left[\varphi(\xi;\eta)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x;y)dxdy.$$

Для дисперсии функции случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ справедливы аналогичные формулы:

$$D[\eta] = \begin{cases} \sum\limits_i \left[\varphi(x_i) - m_\eta\right]^2 p_i & \textbf{(\textit{для дискретных величин})} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x) - m_\eta\right]^2 f(x)dx & \textbf{(\textit{для непрерывных величин})} \end{cases}$$

Пусть система двух случайных величин (ξ, η) имеет плотность вероятности $f(x, y)$. Тогда плотность вероятности $f(z)$ случайной величины $\zeta = \xi + \eta$ находится по формуле

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx\,.$$

Если величины ξ и η независимы, то $f(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$ и для плотности $f(z)$ имеем

$$f(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)f_\eta(z-x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y)f_\xi(z-y)dy$$

Закон распределения суммы независимых случайных величин называется ***композицией*** законов распределения.

ПРИМЕР 1. Случайная величина ξ задана рядом распределения

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,25	0,05	0,35	0,15	0,2

Найти: а) ряд распределения случайной величины $\eta = \xi^2 + 1$; б) математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$.

Решение.

а) Случайная величина η принимает значения: 1, 2 и 5. Соответствующие вероятности равны:

$$P\{\eta=1\}=P\{\xi=0\}=0,35$$

$$P\{\eta=2\}=P\{\xi=-1\}+P\{\xi=1\}=0,05+0,15=0,2$$

$$P\{\eta=5\}=P\{\xi=-2\}+P\{\xi=2\}=0,25+0,2=0,45$$

Ряд распределения случайной величины η имеет вид:

y_j	1	2	5
p_j	0,35	0,2	0,45

(Как обычно, проверяем выполнение равенства $\sum\limits_{j=1}^{3} p_j = 1$)

б) $M\eta = 1\cdot 0,35 + 2\cdot 0,2 + 5\cdot 0,45 = 3$,

$$D\eta = M\eta^2-(M\eta)^2 = 1\cdot 0,35+4\cdot 0,2+25\cdot 0,45-3^2 = 3,4$$

Заметим, что математическое ожидание $M\eta$ можно было вычислить, и не находя ряда распределения η:

$$M\eta = M\left[\xi^2+1\right]=\sum_i (x_i^2+1)p_i =$$

$$=(4+1)\,0,25+(1+1)\,0,05+(0+1)\,0,35+(1+1)\,0,15+(4+1)\,0,2 = 3$$

ПРИМЕР 2. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [0;1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. В этом примере $y = \varphi(x) = x^2, \quad y \in [0;1]$, откуда $x = \sqrt{y}$ Учитывая, что $f_\xi(x) = 1$, получим

$$F(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = P\{0 < \xi < \sqrt{y}\} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} f_\xi(x)dx = \int_0^{\sqrt{y}} dx = \sqrt{y}, \qquad (0 < y \le 1)$$

Следовательно, функция распределения $F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \sqrt{y}, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$

Плотность распределения случайной величины η будет равна

$$f_\eta(y) = F'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$$

ПРИМЕР 3. Составить композицию нормального закона распределения случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$ и равномерного закона случайной величины η с плотностью $f_\eta(y) = \dfrac{1}{2}, \; y \in [-1;1]$, т.е. найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$, при условии что величины ξ и η независимы.

Решение. Применим формулу композиции законов распределения

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y) f_\xi(z-y)dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} dy,$$

Произведем в интеграле замену переменной: $z - y = u$, тогда $du = -dy$. Тогда получим плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$:

$$f(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z+1}^{z-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2}\left[\Phi(z+1) - \Phi(z-1)\right]$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

По условию задачи случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение: $\xi \in N\,(0;1)$, а случайная величина η имеет равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$, т.е.

$$M\eta = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0; \qquad D\eta = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

Тогда, с учетом независимости случайных величин ξ и η, получаем выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины η:

$$M\zeta = M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta = 0,$$

$$D\zeta = D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Задачи к разделу 9.

9.1. Дискретная случайная величина характеризуется рядом распределения

x_i	– 5	– 3	0	3	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

Найти закон распределения случайной величины $\eta = 1 - \xi$.

9.2. На вход устройства поступают сигналы, величина ξ которых является случайной и задана рядом распределения

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	[redacted]	0,1	0,2	0,2

(Клякса в таблице по вине типографии – туда можно обратиться с претензией!) Амплитуда сигнала на выходе устройства равна $\eta = (\xi^3 - 9\xi^2 + 23\xi - 15)^2$. Составить ряд распределения случайной величины η.

9.3. Случайная величина ξ имеет закон распределения

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,05	0,4	0,25	0,2	0,1

Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \xi^2 + 3\xi + 1$.

9.4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-\pi/4,\ \pi/4]$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$: а) $\eta = 2\xi$; б) $\eta = \xi^3$; в) $\eta = \xi\cdot|\xi|$; г) $\eta = e^{\xi}$.

9.4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [0,1]. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi^2$.

9.5. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Найти плотность вероятности величины $\eta = k\xi$.

9.6. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0)$$

Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \sqrt{\xi}$.

9.7. Задана плотность вероятности случайной величины ξ. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}5, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \qquad \eta = |\xi| + 1$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0{,}5 \\ 1, & 0{,}5 \le x \le 1{,}5 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \qquad \eta = \xi^2 - 1$$

$$3)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \qquad \eta = \sin\xi$$

4) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 1/x, & 1\le x\le e \\ 0, & x>1 \end{cases}$ $\qquad \eta=\ln\xi$

5) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$ $\qquad \eta=\xi\,|\xi\,|$

9.8. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [– 1, 1]. Найти: а) $M(2\xi+3)$; б) $M(\xi^2+1)$.

9.9. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $[0;\pi]$. Найти плотность распределения и математическое ожидание случайной величины $\eta=\cos\xi$.

9.10. Объемный расход газа Q на компрессорных станциях магистральных газопроводов зависит от давления P и выражается формулой $Q=\dfrac{C}{P}$, где C – коэффициент пропорциональности. Считается, что P – случайная величина, имеющая на интервале $[P_1;\ P_2]$ равномерное распределение. Найти среднее значение расхода газа Q.

9.11. Случайная величина $\xi\in N(0;1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^2$.

9.12. Закон распределения системы случайных величин (ξ, η) задан таблицей

x_i \ y_i	– 2	– 1	0	1
– 1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,1

Найти закон распределения случайной величины $\zeta=\varphi(\xi;\eta)$: а) $\zeta=\xi+\eta$; б) $\zeta=\xi\cdot\eta$; в) $\zeta=2\xi-3\eta$; г) $\zeta=|\xi|-\eta$.

9.13. Заданы независимые случайные величины ξ и η:

x_i	– 1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

y_j	0	1	2	3
p_j	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти закон распределения случайных величин ζ: а) $\zeta = \xi + \eta$; б) $\zeta = \xi \cdot \eta$; в) $\zeta = 2\xi + 3\eta$; г) $\zeta = \xi^2 + \eta^2$.

9.14. Найти математическое ожидание случайной величины ζ, если заданы математические ожидания $M\xi = 3$ и $M\eta = 1$ случайных величин ξ и η: а) $\zeta = 2\xi - 3\eta$; б) $\zeta = \xi + 2\eta - 1$.

9.15. Независимые случайные величины ξ и η имеют математические ожидания $M\xi = 2$, $M\eta = -3$ и дисперсии $D\xi = 1$, $D\eta = 2$. Найти математическое ожидание случайной величины $\zeta = 3\xi^2\eta + 2\eta^2 + 1$.

9.16. С переменного сопротивления R снимается напряжение $U = I \cdot R$, где I и R – независимые случайные величины с характеристиками $M(I) = 2$ А и $M(R) = 30$ Ом. Найти математическое ожидание случайной величины U.

9.17. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке [0, 2]. Найти закон распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

9.18. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

9.19. Найти плотность вероятности суммы независимых случайных величин ξ и η, если ξ равномерно распределена на отрезке [0, 1], а η имеет показательное распределение с плотностью

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ e^{-y}, & y > 0 \end{cases}$$

9.20. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение: $\xi \in N(0;1)$, $\eta \in N(0;1)$.

9.21. Найти закон распределения произведения двух независимых случайных величин ξ и η, если ξ равномерно распределена на отрезке [0, 1], а η равномерно распределена на отрезке [0, 2].

9.22. Пусть ξ и η – независимые случайные величины, причем $M\xi = 0$, $M\eta = 2$. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами $\zeta = 2\xi + 3\eta$ и $\omega = \xi - 2\eta$.

9.23. Случайные величины ξ и η имеют математические ожидания $M\xi = -1$, $M\eta = 3$. Корреляционный момент этих величин равен $K_{\xi\eta} = 6$. Найти математическое ожидание случайной величины $\zeta = 3\xi\eta + 4$.

9.24. Каждая из двух независимых случайных величин ξ и η распределена по **закону Коши**:

$$f_\xi(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}; \qquad f_\eta(y) = \frac{4}{\pi(1+y^2)}$$

Найти: 1) Математическое ожидание и дисперсию каждой из величин ξ и η; 2) Закон распределения, математическое ожидание и дисперсию суммы этих величин.

9.25. При изучении физических свойств коллекторов нефти и газа коэффициент проницаемости можно считать случайной величиной ξ, натуральный логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами $a = 1{,}35$ и $\sigma^2 = 0{,}02$. Найти плотность вероятности случайной величины ξ.

9.26. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, имеют одинаковое математическое ожидание m и одинаковые дисперсии σ^2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

10. Закон больших чисел и предельные теоремы

Распределение суммы большого числа независимых случайных величин при определенных условиях оказывается практически совпадающим с нормальным распределением. Ряд теорем устанавливает общие закономерности в предельном поведении суммы таких величин и позволяет значительно упростить решение многих важных задач в приложениях теории вероятностей.

Неравенство Чебышёва.

Если ξ – случайная величина с математическим ожиданием $M\xi$ и дисперсией $D\xi$, то для любого положительного числа ε имеет место неравенство:

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

называемое ***неравенством Чебышёва***.

Теорема Чебышёва (Закон больших чисел).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания и дисперсии. Тогда для любого положительного числа ε имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Если все математические ожидания равны, т.е. $M\xi_i = \mu$, ($i = 1, \ldots, n$), то теорема Чебышёва принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

(Закон больших чисел утверждает, что среднее арифметическое большого числа случайных величин имеет малое рассеяние относительно среднего арифметического их математических ожиданий).

Теорема Бернулли.

Если в n независимых испытаниях вероятность появления события A постоянна и равна p, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

где $\dfrac{m}{n}$ – относительная частота появления события A в n опытах.

Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие конечные математические ожидания и дисперсии. Если эти случайные величины сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание своей суммы, а n достаточно велико, тогда закон распределения суммы $\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ приближенно можно считать нормальным, т.е.

$$P\{\eta<x\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}}\,dt,$$

где $\mu_\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}M\xi_i,\quad \sigma_\eta=\sqrt{D\eta}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}D\xi_i}$.

Вероятность того, что случайная величина η попадет в интервал (α, β) выражается в этом случае формулой

$$P\{c<\eta<d\}\approx\Phi\left(\frac{d-\mu_\eta}{\sigma_\eta}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu_\eta}{\sigma_\eta}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа.

Замечание. На утверждении центральной предельной теоремы основаны локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа, применение которых обсуждалось ранее в разделе 5.

ПРИМЕР 1. Пусть $p = 0{,}2$ – вероятность выхода электронного блока из строя за время испытания. Проведено испытание 1000 блоков. Оценить вероятность того, что число блоков, вышедших при этом из строя, отклоняется по абсолютной величине от своего математического ожидания не более чем на 50.

Решение. Пусть $\xi = m$ – число блоков, не прошедших испытание, $n =$ $= 1000$. Тогда $M\xi = np = 1000 \cdot 0{,}2 = 200$, $D\xi = npq = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2) = 160$.

а) Используем сначала неравенство Чебышёва при $\varepsilon = 50$:

$$P\left\{\left|\xi - M\xi\right| < 50\right\} = P\left\{\left|m - 200\right| < 50\right\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{160}{(50)^2} = 0{,}936$$

б) Неравенство Чебышёва даёт грубую оценку. Поскольку в данном примере n велико, то более точно оценить искомую вероятность можно с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа

$$P\left\{\left|m - np\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \frac{\varepsilon}{n}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{160}}\right) = 2\Phi(3{,}95) = 0{,}999922$$

(Здесь вместо таблицы функции Лапласа для увеличения точности вычислений была использована компьютерная система *Mathematica*).

Задачи к разделу 10.

10.1. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi = 1$ и дисперсию $D\xi = 0{,}04$. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность неравенства $0{,}6 < \xi < 1{,}4$.

10.2. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что частота появления герба при 200 бросаниях монеты отклонится от вероятности не более чем на 0,1. Сравнить результат с вероятностью, полученной с помощью теоремы Муавра – Лапласа.

10.3. Вероятность события A в каждом из n испытаний равна $p = 1/3$. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что частота этого события отклонится от его вероятности по абсолютной величине менее чем на 0,01 в случае: а) $n = 9000$ испытаний, б) $n = 75000$ испытаний. Сравнить полученные оценки с результатами, основанными на использовании теоремы Муавра – Лапласа.

10.4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $p = 1/3$. Найти наименьшее число n выстрелов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99 частота попаданий отклонялась по абсолютной величине от вероятности не более чем на 0,01. Задачу решить двумя способами: а) на основе неравенства Чебышёва, б) с помощью интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

10.5. Монета подброшена 100 раз. В каких границах с вероятностью 0,997 будет находиться число выпавших «орлов»?

10.6. Проводятся n независимых испытаний с вероятностью p успеха в каждом. Найти границы, в которых с вероятностью α будет находиться отклонение частоты успеха от числа p: а) $p=0{,}3$; $n=500$; $\alpha=0{,}93$; б) $p=0{,}2$; $n=1000$; $\alpha=0{,}96$.

10.7. Оценить вероятность того, что частота успехов в $n=500$ независимых опытах отклонится по абсолютной величине от вероятности успеха в одном опыте не более чем на 0,1.

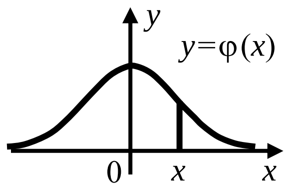
10.8. При разработке нового расходомера фиксируется количество отказов (за время T). Сколько надо произвести испытаний, чтобы вероятность отклонения среднего арифметического числа отказов от математического ожидания более чем на 1 была бы меньше величины 0,3, если дисперсия числа отказов равна 4.

10.9. Среднее значение коэффициента гидравлического сопротивления для участка магистрального газопровода равно $\lambda = 0{,}015$. Сколько нужно провести измерений этого коэффициента, чтобы с вероятностью, не превышающей 0,99, можно было утверждать, что среднее арифметическое значение этих измерений отличается от λ по абсолютной величине меньше чем на 0,002? Известно, что среднее квадратическое отклонение каждого измерения не превосходит 0,001.

10.10. На магистральном трубопроводе установлено 500 однотипных измерительных приборов, каждый из которых за определенное время T может независимо от остальных выйти из строя. Оценить снизу вероятность того, что число приборов, вышедших за время T из строя, отличается от своего математического ожидания меньше, чем на 25.

Приложение

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.



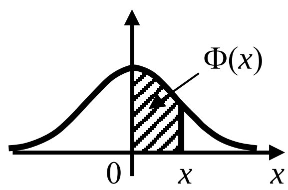
x	$\varphi(x)$
0,0	0,3989
0,05	0,3984
0,10	0,3970
0,15	0,3945
0,20	0,3910
0,25	0,3867
0,30	0,3814
0,35	0,3752
0,40	0,3683
0,45	0,3605
0,50	0,3521
0,55	0,3429
0,60	0,3332
0,65	0,3230
0,70	0,3123
0,75	0,3011
0,80	0,2897
0,85	0,2780
0,90	0,2661
0,95	0,2541

x	$\varphi(x)$
1,00	0,2420
1,05	0,2299
1,10	0,2179
1,15	0,2059
1,20	0,1942
1,25	0,1826
1,30	0,1714
1,35	0,1604
1,40	0,1497
1,45	0,1394
1,50	0,1295
1,55	0,1200
1,60	0,1109
1,65	0,1023
1,70	0,0940
1,75	0,0863
1,80	0,0790
1,85	0,0721
1,90	0,0656
1,95	0,0596

x	$\varphi(x)$
2,00	0,0540
2,05	0,0488
2,10	0,0440
2,15	0,0396
2,20	0,0355
2,25	0,0317
2,30	0,0283
2,35	0,0252
2,40	0,0224
2,45	0,0198
2,50	0,0175
2,55	0,0154
2,60	0,0136
2,65	0,0119
2,70	0,0104
2,75	0,0091
2,80	0,0079
2,85	0,0069
2,90	0,0060
2,95	0,0051

x	$\varphi(x)$
3,00	0,0044
3,05	0,0038
3,10	0,0033
3,15	0,0028
3,20	0,0024
3,25	0,0020
3,30	0,0017
3,35	0,0015
3,40	0,0012
3,45	0,0010
3,50	0,0009
3,55	0,0007
3,60	0,0006
3,65	0,0005
3,70	0,0004
3,75	0,0004
3,80	0,0003
3,85	0,0002
3,90	0,0002
3,95	0,0002

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.



x	$\Phi(x)$
0,0	0,0
0,05	0,0199
0,10	0,0398
0,15	0,0596
0,20	0,0793
0,25	0,0987
0,30	0,1179
0,35	0,1368
0,40	0,1554
0,45	0,1736
0,50	0,1915
0,55	0,2088
0,60	0,2257
0,65	0,2422
0,70	0,2580
0,75	0,2734
0,80	0,2881
0,85	0,3023
0,90	0,3159
0,95	0,3289

x	$\Phi(x)$
1,00	0.3413
1,05	0.3531
1,10	0.3643
1,15	0.3749
1,20	0.3849
1,25	0.3944
1,30	0.4032
1,35	0.4115
1,40	0.4192
1,45	0.4265
1,50	0.4332
1,55	0.4394
1,60	0.4452
1,65	0.4505
1,70	0.4554
1,75	0.4599
1,80	0.4641
1,85	0.4678
1,90	0.4713
1,95	0.4744

x	$\Phi(x)$
2,00	0.4772
2,05	0.4798
2,10	0.4821
2,15	0.4842
2,20	0.4861
2,25	0.4878
2,30	0.4893
2,35	0.4906
2,40	0.4918
2,45	0.4929
2,50	0.4938
2,55	0.4946
2,60	0.4953
2,65	0.4960
2,70	0.4965
2,75	0.4970
2,80	0.4974
2,85	0.4978
2,90	0.4981
2,95	0.4984

x	$\Phi(x)$
3,00	0.49865
3,05	0.49886
3,10	0.49903
3,15	0.49918
3,20	0.49931
3,25	0.49942
3,30	0.49952
3,35	0.49960
3,40	0.49966
3,45	0.49972
3,50	0.49977
3,55	0.49981
3,60	0.49984
3,65	0.49987
3,70	0.49989
3,75	0.49991
3,80	0.49993
3,85	0.49994
3,90	0.49995
3,95	0.49996

Литература.

1. Писаревский Б.М., Сухарев М.Г., Фастовец Н.О. Задачи и упражнения по применеию теории вероятностей в нефтегазовой промышленности. – М.: МИНХиГП, 1981. – 51 с.
2. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 1986. – 80 с.
3. Андрухаев Х.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: «Просвещение», 1985. – 160 с.
4. Верченко Ю.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: МИЭМ, 1974. – 136 с.
5. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А.В. Ефимова). Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1984. – 428 с.
6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: «Юнити», 2000. – 544 с.