

Определенный интеграл – лекция №6

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть функция $f(x) \geq 0$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – произвольное разбиение этого отрезка на n частей, $\max_i \Delta x_i$ – шаг разбиения.

Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

где $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1, 2, \dots, n$, называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Геометрически S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников.

$$m_i = \min_{[x_{i-1}; x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{[x_{i-1}; x_i]} f(x), \quad m_i \leq f(x) \leq M_i,$$

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad \bar{S}_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}_n \leq S \leq \bar{S}_n - \text{нижняя и верхняя суммы Дарбу.}$$

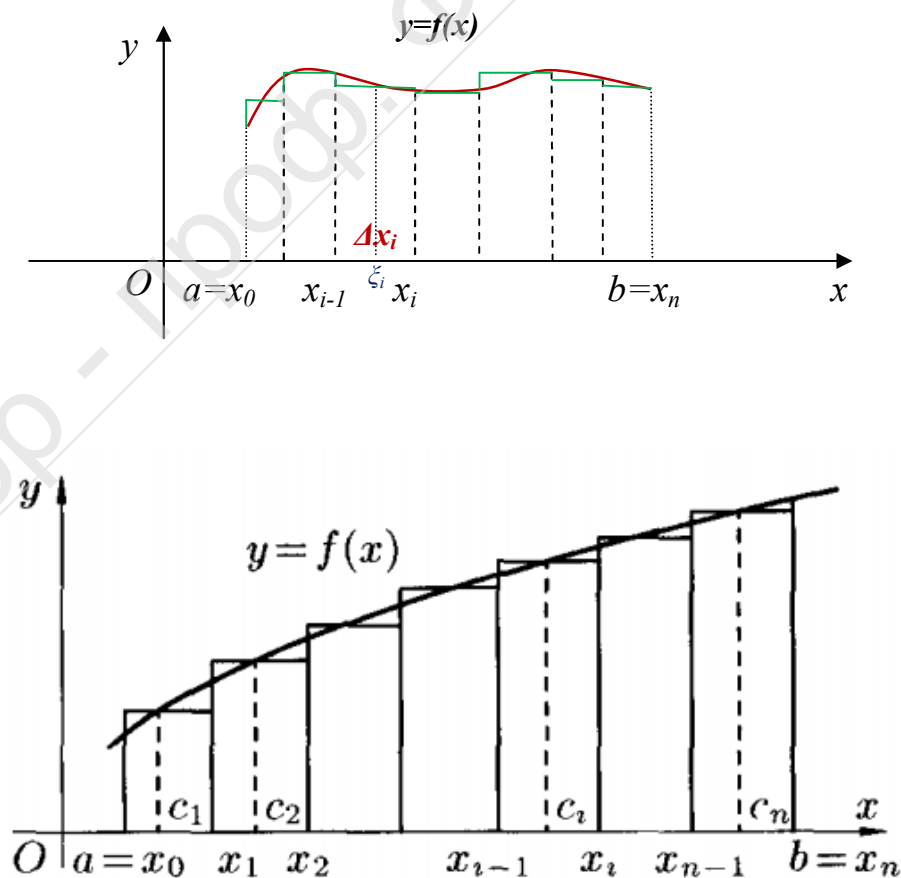


Рис.1.

Определение. Предел интегральной суммы (1), не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек ξ_i , при условии, что шаг разбиения (наибольшая из разностей Δx_i) стремится к нулю, называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ в пределах интегрирования от a до b :

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что при неотрицательной подынтегральной функции $f(x)$, его значение численно равно площади криволинейной трапеции, заключенной между графиком функции $f(x)$, осью OX и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

Основные свойства определенного интеграла

- 1) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$
- 2) $\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx,$
- 3) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$
- 4) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$ при любом положении точки c относительно a и b .
- 5) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ и $b > a$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx,$
- 6) $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$

7) **Теорема о среднем значении определенного интеграла**

Определение. Средним интегральным значением непрерывной функции $f(x)$ на отрезке

$[a; b]$ называется выражение $\hat{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$

Теорема: Пусть $f(x) \in C[a; b]$, тогда $\exists c \in [a; b]: f(c) = \hat{f}.$

Доказательство:

Пусть $m_i = \min_{[x_{i-1}; x_i]} f(x), M_i = \max_{[x_{i-1}; x_i]} f(x), m = \min_i m_i, M = \max_i M_i,$

тогда $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$

$$m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i. \quad (2)$$

Переходим к пределу в (2) при $n \rightarrow \infty$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

$$m \leq \hat{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M \Rightarrow \exists c \in [a; b]: f(c) = \hat{f}.$$

Геометрический смысл: Теорема о среднем утверждает, что для непрерывной на отрезке функции существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник со сторонами $(b-a)$ и $\hat{f}$.

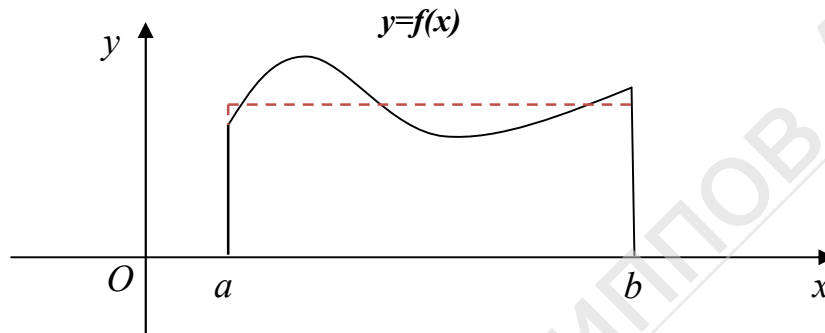


Рис.2

8) Производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу

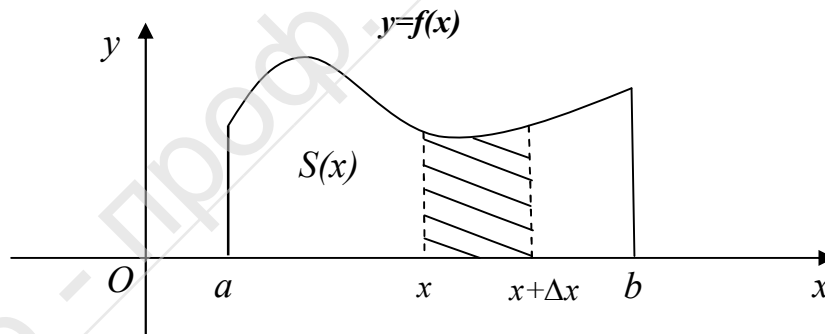


Рис.3

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (S(x))' = \left(\int_a^x f(t) dt \right)',$$

$$(S(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(c)}{\Delta x} = f(x),$$

$$c \in [x; x + \Delta x].$$

Производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной в этом пределе.

9) Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, тогда $F(x) = S(x) + C$ и $F(a) = S(a) + C = 0 + C = C$,

$$F(b) = S(b) + C = \int_a^b f(x) dx + C = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow$$

$$\left[\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right].$$

Определенный интеграл равен разности значений любой первообразной подынтегральной функции, взятой в верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Таким образом, вычисляют определенные интегралы с помощью доказанной нами **формулы Ньютона-Лейбница**:

если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример: $\int_{-2}^1 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{4 \cdot 1^3}{3} - \frac{4 \cdot (-2)^3}{3} = 12.$

Пример: $\int_1^3 (x^2 + 3x - 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x \right) \Big|_{x=1}^{x=3} = \left(9 + \frac{27}{2} - 15 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 5 \right) = 10\frac{2}{3}.$

Замена переменной в определенном интеграле

В определенном интеграле можно делать **замену переменной**. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, так что $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Пример: $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int_1^2 t \cdot 2t dt = 2 \int_1^2 t^2 dt = \frac{2 \cdot t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

К определенному интегралу можно применить формулу **интегрирования по частям**. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

Пример:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d \cos 2x = -\frac{x \cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2} dx = -\frac{\pi \cos \frac{\pi}{2}}{8} + \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{4}.$$

Пример:

$$\int_1^e \ln x dx = (x \cdot \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x d \ln x = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^9 \sqrt{x^3} dx$	2. $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}} dx$	3. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx$
4. $\int_1^2 (3x^2 - \frac{1}{x^2}) dx$	5. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$	6. $\int_0^1 \frac{6x dx}{x^4 + 1}$
7. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$	8. $\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$	9. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \pi) \cos \frac{x}{2} dx$	11. $\int_{-1}^1 x \arctg x dx$	12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$