Лекция 7

Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются определенные интегралы, для которых не выполнено хотя бы одно из условий существования определенного (***собственного***) интеграла:

1)либо подынтегральная функция является не ограниченной в какой-либо точке отрезка $[a;b]$,

2)либо отрезок интегрирования содержит бесконечный предел интегрирования.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ не ограничена в некоторой окрестности точки c отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Если пределы в правой части равенства существуют и конечны, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

При $c = a$ или $c = b$ определение (1) сходимости упрощается до вычисления одного предела.

Признак сравнения: Если $|f(x)| \le g(x)$ при $x \in [a;b]$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ тоже сходится. Если $|f(x)| \ge g(x)$ при $x \in [a;b]$ и $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ тоже расходится.

<u>Пример</u>:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} -\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left. \dfrac{1}{(p-1)(x-a)^{p-1}} \right|_{a+\varepsilon}^{b}, \text{ при } p > 1 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left. \dfrac{(x-a)^{1-p}}{(1-p)} \right|_{a+\varepsilon}^{b}, \text{ при } p < 1 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \ln|x-a| \Big|_{a+\varepsilon}^{b}, \text{ при } p = 1 \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{1}{(p-1)(\varepsilon)^{p-1}}-\dfrac{1}{(p-1)(b-a)^{p-1}}, \text{ при } p>1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)}-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{(\varepsilon)^{1-p}}{(1-p)}, \text{ при } p<1 \\ \left|\ln|b-a|-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln|\varepsilon|, \text{ при } p=1\right. \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} +\infty\,(\text{расходится}) \text{ при } p\ge 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{(1-p)}(\text{сходится}) \text{ при } p<1 \end{cases}.$$

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a\le x<\infty$, тогда полагают

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx. \qquad (2)$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае он называется ***расходящимся***.

Пример:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^0 xe^{-x^2}dx+\lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^B xe^{-x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^0 e^{-x^2}d(-x^2)-\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^B e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}e^{-x^2}\Big|_A^0-$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}e^{-x^2}\Big|_0^B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}e^{-A^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}e^{-B^2}=0.$$

Таким образом, указанный интеграл сходится и равен нулю.

Задачи для самостоятельного решения.

Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

1. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$	2. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}dx$	3. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$
4. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x}$	5. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{x^3}dx$	6. $\int\limits_3^{+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}dx$
7. $\int\limits_0^2\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	8. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$	9. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$
10. $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\ln x}$	11. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$	12. $\int\limits_0^1\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

Иногда не требуется знать точное значение интеграла, а нужно знать лишь числа, между которыми находится его величина. Для этой цели используется свойство ***оценки значения определенного интеграла:***

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

где m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а M – наибольшее её значение на этом отрезке; $(b-a)$ - длина отрезка.

Пример:

Оценить интеграл $\int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$, не вычисляя его.

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\sqrt{3+x^3}$ на отрезке $[1;3]$. Вычислим её производную, получим, что

$$f'(x)=\frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}}>0 \text{ на } [1;3].$$

Из неравенства следует, что сама функция на данном отрезке монотонно возрастает. Следовательно, свое наибольшее и наименьшее значение она принимает на концах отрезка $[1;3]$, т.е. $m=f(1)=\sqrt{4}=2$; $M=f(3)=\sqrt{30}$

Поэтому, $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3} \le 2\sqrt{30}$.

Напомним, что средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число:

$$f_{ср.}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример:

Определить среднее значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;1]$.

$$f_{ср.}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Выяснить, какой из интегралов больше:

1. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ *или* $\int_0^1 xdx$	2. $\int_0^1 x^2\sin^2 xdx$ *или* $\int_0^1 x\sin^2 xdx$	3. $\int_1^2 e^{x^2}dx$ *или* $\int_1^2 e^x dx$

Найти среднее значение функции на отрезке:

4. $f(x)=\sqrt{4+x}$ $x\in[0;5]$	5. $f(x)=\cos^2 x$ $x\in[0;\pi]$	6. $f(x)=\frac{1}{x^2+4x}$ $x\in[1;3]$

Оценить интегралы, не вычисляя их:

7. $\int_0^1 \sqrt{9+x^2}\,dx$	8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+1}$	9. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$
10. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{8-3\cos x}$	11. $\int_0^{\pi/4} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$	12. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{25-x^2}}$

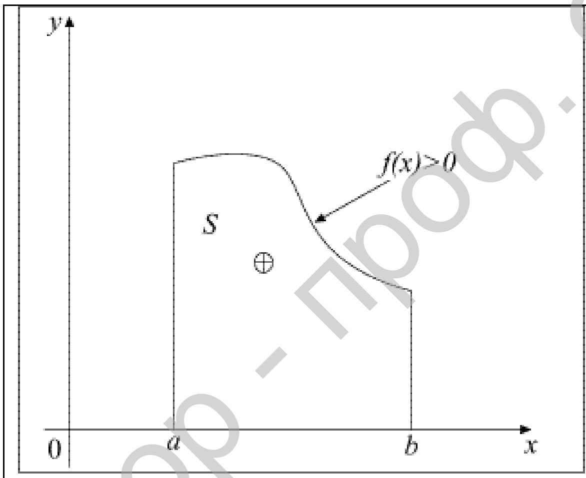
Некоторые приложения определенного и несобственного интеграла

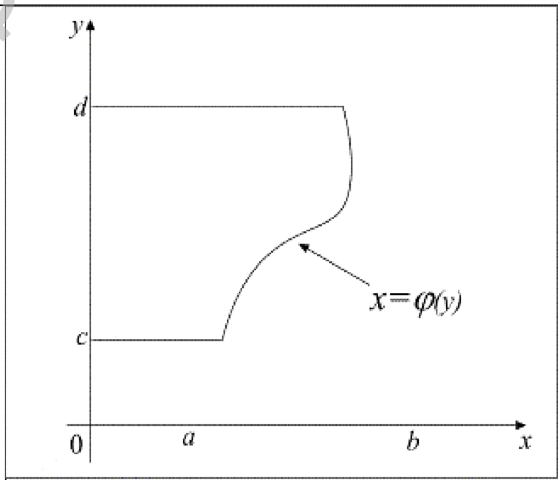
I. Вычисление *площадей плоских фигур*.

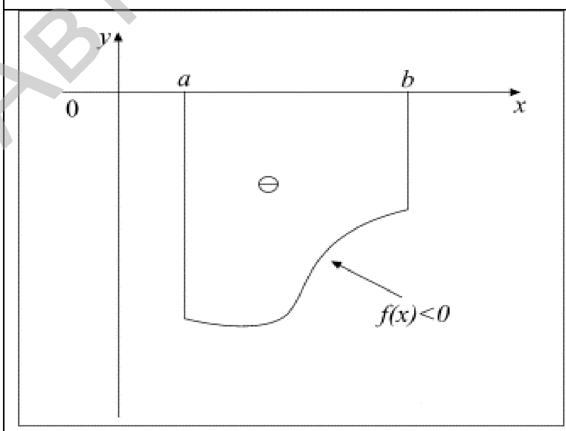
(A) В декартовых координатах.

Если заданная непрерывная функция *f(x)* знакопостоянна, на некотором отрезке $[a;b]$, то за основную фигуру, площадь которой определяется одним интегралом, принимается криволинейная трапеция с основанием $[a;b]$ на оси ОХ или с основанием $[c;d]$ на оси ОУ.

$$S=\int_a^b ydx=\int_a^b f(x)dx,\quad f(x)\geq 0. \qquad S=\int_c^d xdy=\int_c^d \varphi(y)dy,\ \varphi(y)\geq 0.$$



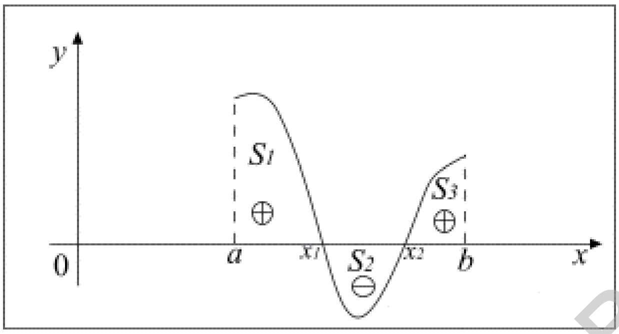




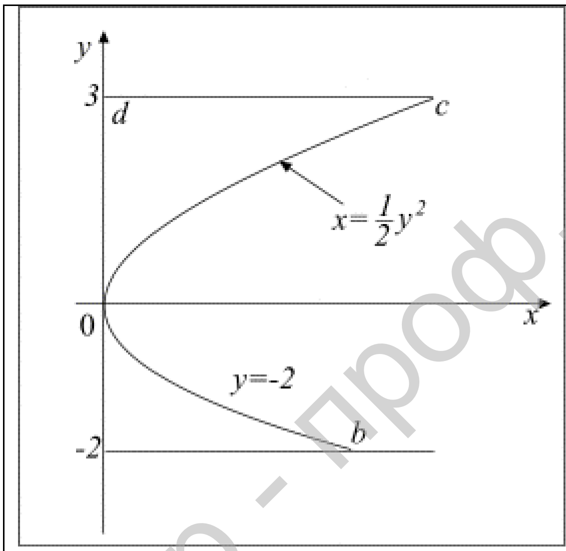
Если *f(x)≤0*, то $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx$.

Если заданная непрерывная функция знакопеременна на отрезке интегрирования $[a;b]$,становясь поочередно то положительной, то отрицательной, то

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx+\int_{x_2}^{b} f(x)dx.$$

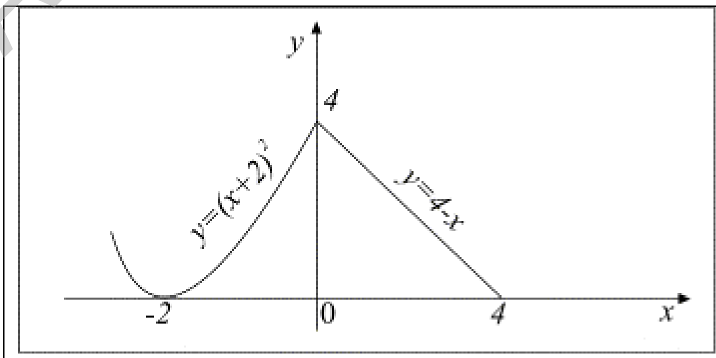


Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-2; y=3; x=\dfrac{y^2}{2}$ и осью ординат.



$$S=\int_{-2}^{3}\frac{1}{2}y^2dy=\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3}=\frac{1}{6}(27-(-8))=\frac{35}{6}.$$

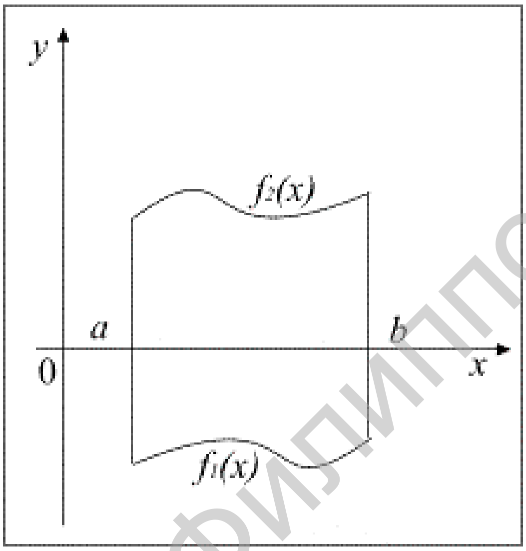
Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченную осью OX и линиями $y=(x+2)^2$; $y=4-x$.



$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{4}(4-x)dx=10\frac{2}{3}.$$

Если на отрезке $[a;b]$ заданы две непрерывные функции $y=f_1(x)$ *и* $y=f_2(x)$ и при всех x из этого отрезка выполняется неравенство $f_1(x)\le f_2(x)$, то площадь фигуры ограниченной графиками этих функций и прямыми $x=a$ и $x=b$ определяется по формуле

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx\,.$$



<u>Пример</u>: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2;\ y^3=x^2$.

Решая совместно эти уравнения, находим пределы интегрирования $x_1=-1;\ x_2=1$. Поэтому искомая площадь будет:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-x^{\frac{2}{3}}\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{32}{15}\,.$$

(Б) <u>В параметрических координатах</u>.

Если кривая задана уравнениями в ***параметрической форме*** $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрерывные функции параметра $t\in[\alpha;\beta]$; α и β - известные числа или их легко найти после построения, то площадь криволинейной трапеции определяется по формуле:

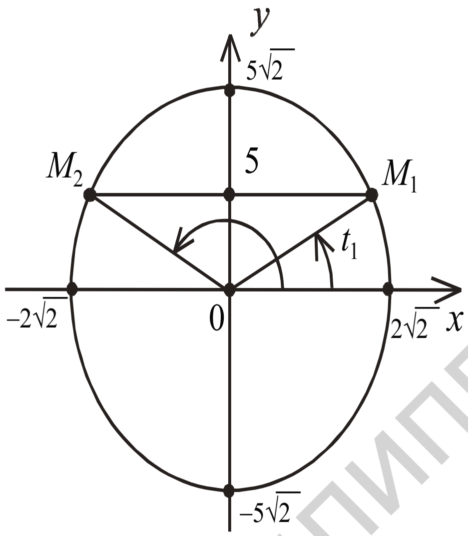
$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt\,.$$

<u>Пример</u>: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos t\\ y=5\sqrt{2}\sin t\\ y=5\quad (y\ge 5)\end{cases}$.

Это эллипс, вытянутый вдоль оси OY и прямая $y=5$. Проводя прямую $y=5$, отсекаем от него часть, расположенную выше этой прямой:

$\begin{cases} y=5 \\ y=5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$;$\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, t_1=\dfrac{\pi}{4}$ и, в силу симметрии, $t_2=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

Следовательно, имеем $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$; $\beta=\dfrac{\pi}{4}$.



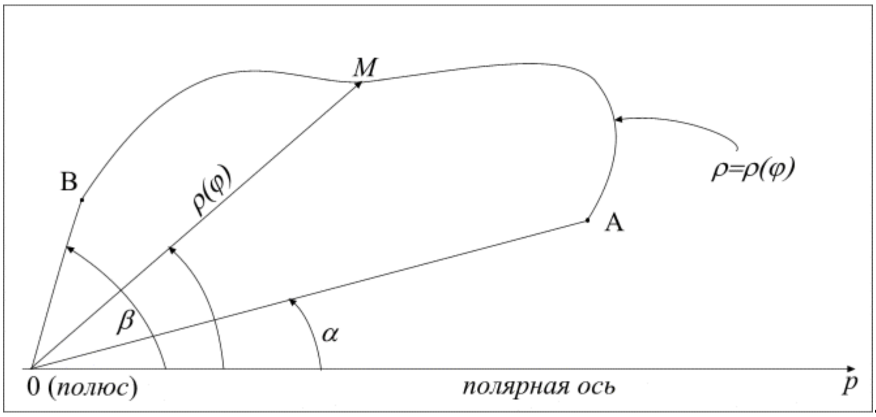
$$S=-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(5\sqrt{2}\sin t-5)2\sqrt{2}\sin t dt=-20\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t dt+10\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin t=$$

$$=-20\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-10\sqrt{2}\cos t\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=-20\cdot\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-10\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4})=$$

$$=-10(-\frac{\pi}{2}-1)-20=5(\pi+2)-20=5(\pi-2).$$

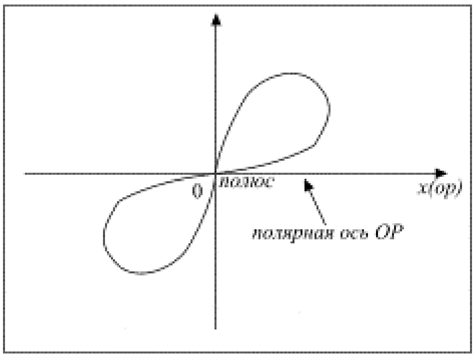
(В) <u>В полярных координатах</u>.

Если непрерывная кривая задана в ***полярных координатах*** уравнением $\rho=f(\varphi)$, то площадь сектора AOB, ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB: $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выражается интегралом: $S=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi$.



<u>Пример</u>: Вычислить площадь фигуры, заданной кривой в полярных координатах $\rho = \sin 2\varphi$.

Эта кривая представляет собой двух лепестковую розу, и ее можно разбить на 4



одинаковые части. Поэтому вычислим площадь $\frac{1}{4}$ всей фигуры.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\sin\pi}{16} = \frac{\pi}{16}.$$

Окончательно имеем $S = 4S_1 = \frac{\pi}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить площади фигур, ограниченных данными кривыми:

1. $y = -x^2; x + y + 2 = 0$	2. $y = 3 - 2x - x^2; y = 0$	3. $y = \frac{16}{x^2}; y = 17 - x^2$
4. $y^2 = 4x^3; y = 2x^2$	5. $y = \ln x; x = e; y = 0$	6. $y = 0,25x^2; y = 3x - 0,5x^2$
7. $\begin{cases} x = 4\cos t + 3\sin t \\ y = 3\cos t - 4\sin t \end{cases}$	8. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$	9. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$
10. $r = a(1-\cos\varphi)$	11. $r^2 = 16\cos 2\varphi$	12. $r = a\sin 3\varphi$

II. Вычисление *длины дуги плоских фигур*.

(А) <u>**В декартовых координатах**</u>

Если уравнение кривой задано в виде функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, и она имеет непрерывную производную на $(a;b)$, то ***длина дуги*** этой кривой, заключенной между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Пример: Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, заключенную между точками с абсциссами $x=1$ и $x=2$.

Найдем $y'=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$.

Вычислим выражение $1+[y']^2=1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2=1+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$. Тогда

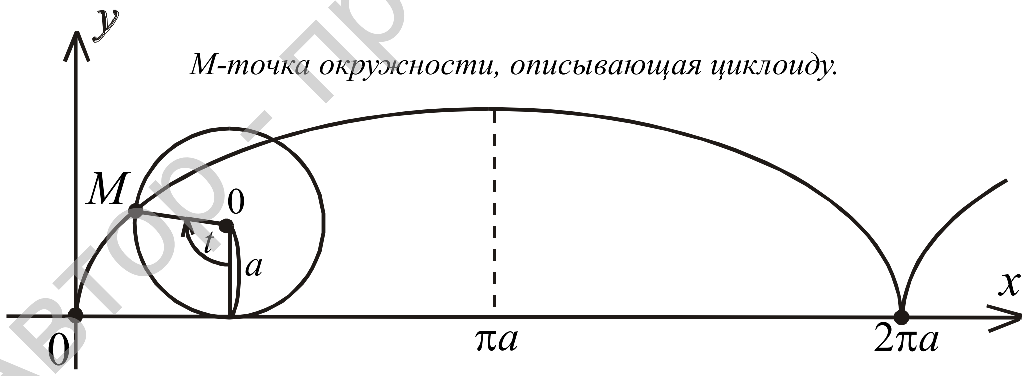
$$l=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^2\left|\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right|dx=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{4}-\frac{\ln 2}{2}.$$

(Б) **В параметрических координатах**

Если кривая задана уравнениями в ***параметрической форме*** $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, причем производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, то длина дуги кривой, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=\alpha$ и $t_2=\beta$ вычисляется по формуле:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Пример: Вычислить длину дуги одной арки циклоиды: $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.



Величина центрального угла t между диаметрами ОМ изменится от значения $t=0$ (когда эти диаметры совпадали) до значения $t=2\pi$ (точка М окружности совершила полный оборот). Длина одной арки циклоиды находится при этом следующим образом.

Вычислим: $x_t'=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2}$, $y_t'=a\sin t=2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$;

$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$. Но, так как, $\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, $0<t<2\pi$, а $\sin\frac{t}{2}$ в 1-ой и 2-ой четвертях положителен, т.е. $\sin\frac{t}{2}\geq 0$ и $\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}$, поэтому

$$l=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a.$$

(В) **В полярных координатах**

В случае задания линии уравнением $\rho=f(\varphi)$ в ***полярной системе координат*** длина кривой, ограниченной полярными радиусами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ находится по формуле:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[f(\varphi)\right]^2+\left[f'(\varphi)\right]^2}d\varphi.$$

Пример: Вычислить длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Ее график симметричен относительно полярной оси, следовательно, можно найти длину верхней половины кривой от точки, лежащей на луче $\varphi=0$ до точки на луче $\varphi=\pi$ и затем удвоить результат. Так как $\rho'=-a\sin\varphi$ и $0\leq\varphi\leq\pi$, то

$$\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}=a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}=a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2a\cos\frac{\varphi}{2}$$

Следовательно, длина кардиоиды равна $l=2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=8a$.

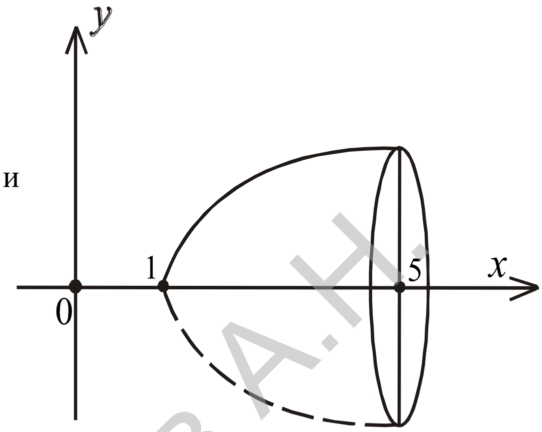
Задачи для самостоятельного решения.

Найти длину дуги кривой, заданной следующими условиями:

1. $y=\ln(\sin x);\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{2}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$, между точками пересечения с осью OX.
3. $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой x=4	4. $y=\frac{x^2}{2};0\leq x\leq 1$
5. $\begin{cases}x=\frac{t^3}{3}-t\\ y=t^2+2\end{cases};0\leq t\leq 3$	6. $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases};0\leq t\leq\ln\pi$
7. $r=a\sin\varphi$	8. $r=5\cos^3\frac{\varphi}{3};0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

III. Вычисление ***объемов тел вращения***.

Объем тела вращения находится по формулам:



$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx ,$$

если криволинейная трапеция вращается вокруг оси OX и

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy ,$$

если криволинейная трапеция

вращается вокруг оси OY.

Пример: Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = f(x) = \sqrt{x-1}, x = 5; y = 0$.

Построим сначала фигуру, исходя из условия задачи. Из чертежа ясно, что это криволинейный треугольник, поэтому

$$V_x = \pi \int_1^5 y^2 dx = \pi \int_1^5 (x-1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg|_1^5 = \pi \left(\frac{25}{2} - 5 \right) - \pi \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 8\pi .$$

Задачи для самостоятельного решения:

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = \dfrac{64}{x^2+16}; x^2 = 8y$	2. $y^2 = x; x^2 = y$	3. $y = \dfrac{x^2}{2}; y = \dfrac{x^3}{8}$

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями:

4. $y = x^3; x = 0; y = 8$	5. $y = e^x, x = 0, y = 0$	6. $y^2 = 4ax, x = a$

Задания типового расчета по теме «Определенный интеграл»

1. Вычислить заданные интегралы, среди которых есть несобственные.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми в декартовой системе координат (предварительно построить эту фигуру).
3. Построить указанную фигуру в полярной системе координат, определить пределы интегрирования и вычислить ее площадь.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрическом виде.
5. Вычислить длины дуг кривых, заданных в декартовой системе координат.
6. Вычислить длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат или в параметрическом виде.
7. Вычислить среднее значение функции или интеграла или оценить интеграл неравенством.
8. Построить плоскую фигуру в декартовой системе координат и затем построить соответствующую фигуру вращения, вычислить ее площадь.
9. Решить физическую задачу.