

Пять лекций по неопределенному интегралу

Лекция №1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Первообразная и ее свойства.

Действие, обратное дифференцированию, называется интегрированием.

$$f(x) \underset{\text{интегр.}}{\overset{\text{дифферен.}}{\rightleftharpoons}} f'(x).$$

Пример: x^2 – первообразная $2x$, $\cos x$ – первообразная $(-\sin x)$.

Утверждение: Дифференцируемые функции $F(x)$ и $\Phi(x)$, являющиеся первообразными функции $f(x)$, отличаются на константу.

Доказательство:

Проверим, что $\Phi(x) - F(x) = C$, где $C = \text{const}$. По условию $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$, следовательно, $\Phi'(x) - F'(x) = 0$. Или $(\Phi(x) - F(x))' = 0$. А так как нулю равна только производная константы, поэтому $\Phi(x) - F(x) = C$. Что и требовалось доказать.

Определение: Семейство всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ по переменной x .

Неопределенный интеграл обозначается так: $\int f(x) dx = F(x) + C$ (1)

Здесь d - знак дифференциала, x - переменная интегрирования, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

На координатной плоскости OXY соотношение (1) позволяет построить множество интегральных кривых $y = F(x) + C$ функции $f(x)$.

Пример: $f(x) = 2x$, $\int 2x dx = x^2 + C$.

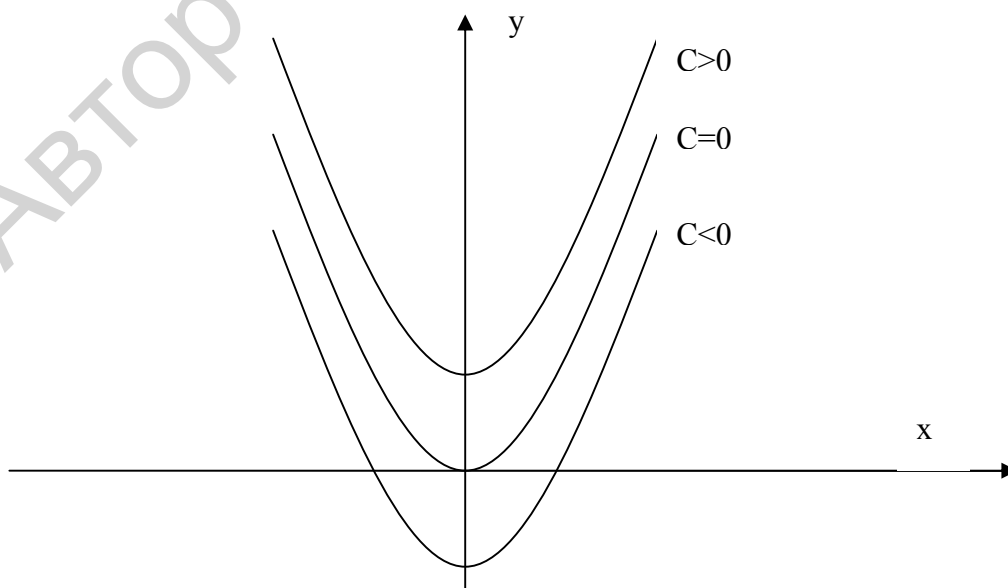


Рис.1.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	9. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$
a) $\alpha = 0: \int du = u + C$	10. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
б) $\alpha = 1: \int u du = \frac{u^2}{2} + C$	11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
в) $\alpha = 2: \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$	12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
г) $\alpha = -\frac{1}{2}: \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
д) $\alpha = -2: \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 + b} \right + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	17. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$	18. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	19. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$
7. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	20. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$
8. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	

Правила интегрирования.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx.$$

2. Интеграл от суммы или разности двух или нескольких функций равен сумме или разности интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) - g(x) + \varphi(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx + \int \varphi(x) dx.$$

Пример: $\int \left(x^3 - \sqrt{x} + \frac{2}{x^4} - 3 \sin x + 5 \right) dx = \int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{-4} dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int dx =$
 $= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{x^3} + 3 \cos x + 5x + C.$

3. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, тогда

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Пример: $\int \cos x dx = \sin x + C$, следовательно $\int \cos(5x - 2) dx = \frac{1}{5} \sin(5x - 2) + C$;

а) если $a = 1$, то $\int f(x + b) dx = F(x + b) + C$;

б) если $b = 0$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

Примеры: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow \int \frac{dx}{x+4} = \ln|x+4| + C$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C \Rightarrow \int \frac{dx}{3x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3}x + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла по переменной интегрирования равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. Интеграл от дифференциала функции $f(x)$ равен сумме этой функции и константы: $\int d(f(x)) = f(x)$.

Интегрирование с помощью внесения одной из подынтегральных функций под знак дифференциала.

Таблицу неопределенных интегралов можно бесконечно расширить, если переменную u заменить на любую дифференцируемую функцию переменной x .

Примеры:

1. $\int \cos u du = \sin u + C$; $u = x^2$; $du = d(x^2) = (x^2)' dx = 2x dx$

$$\int 2x \cos x^2 dx = \int \cos x^2 (2x dx) = \int \cos x^2 d(x^2) = \sin x^2 + C$$

2. $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$

3. $\int \frac{6x-5}{x^2+4} dx = \int \frac{3 \cdot 2x dx}{x^2+4} - \int \frac{5 dx}{x^2+4} = 3 \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - 5 \int \frac{dx}{x^2+4} = 3 \ln|x^2+4| - \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$

Лекция №2. Интегрирование по частям.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, тогда на этом отрезке справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

Доказательство:

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$\int d(uv) = \int vdu + \int u dv$$

$$uv = \int vdu + \int u dv \Rightarrow \int u dv = uv - \int vdu.$$

Некоторые случаи применения формулы интегрирования по частям.

1-й случай: $\int P_n(x) \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \\ a^x, e^x \end{cases} dx$, где $P_n(x)$ - многочлен n -й степени от x .

В интегралах этого типа в качестве функции $u(x)$ всегда выбирается многочлен $P_n(x)$, а тригонометрические или показательные функции вносятся под знак дифференциала.

Пример 1:

$$\int (2x-3) \cos 5x dx = \int (2x-3) d \frac{\sin 5x}{5} = \left| \begin{array}{l} u = 2x-3 \\ v = \frac{\sin 5x}{5} \\ du = 2dx \end{array} \right| = (2x-3) \frac{\sin 5x}{5} -$$

$$- \int \frac{\sin 5x}{5} 2dx = \frac{(2x-3) \sin 5x}{5} + \frac{2 \cos 5x}{25} + C.$$

Пример 2:

$$\int (x^2 + 4x - 1) e^x dx = \int (x^2 + 4x - 1) de^x = \left| \begin{array}{l} u = (x^2 + 4x - 1) \\ v = e^x \\ du = (2x + 4) dx \end{array} \right| = (x^2 + 4x - 1) e^x - \int e^x (2x + 4) dx =$$

$$= (x^2 + 4x - 1) e^x - \int (2x + 4) de^x = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 4 \\ v = e^x \\ du = 2dx \end{array} \right| = (x^2 + 4x - 1) e^x - (2x + 4) e^x + \int e^x 2dx =$$

$$= e^x (x^2 + 2x - 3) + C.$$

2-й случай: $\int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \arctg bx, \operatorname{arccotg} bx \\ \arcsin bx, \arccos bx \\ \log_a x, \ln x \end{array} \right\} dx$. В интегралах такого вида в качестве функции

$u(x)$ всегда выбирается обратная тригонометрическая или логарифмическая функции, а многочлен $P_n(x)$ вносится под знак дифференциала.

Пример 3:

$$\int \ln x (x^3 - 5x) dx = \int \ln x d \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} \right) = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \ln x \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} \right) -$$

$$\int \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} \right) \frac{dx}{x} = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} - \frac{5x}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} \right) \ln x - \frac{x^4}{16} + \frac{5x^2}{4} + C.$$

Пример 4:

$$\int x \arctg x dx = \int \arctg x d \frac{x^2}{2} = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \\ v = \frac{x^2}{2} \\ du = \frac{dx}{x^2 + 1} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

3-й случай: $\int \left\{ \begin{matrix} a^x \\ e^x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos bx \\ \sin bx \end{matrix} \right\} dx$. После применения формулы интегрирования по частям два раза, данные интегралы сводятся к решению линейного алгебраического уравнения.

Пример 5:

$$I = \int \cos x e^x dx = \int \cos x d e^x = \left. \begin{matrix} u = \cos x \\ v = e^x \\ du = -\sin x dx \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x +$$

$$+ \int \sin x d e^x = \left. \begin{matrix} u = \sin x \\ v = e^x \\ du = \cos x dx \end{matrix} \right| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + 2C = e^x (\cos x + \sin x) + 2C - I$$

$$I = e^x (\cos x + \sin x) + 2C - I$$

$$2I = e^x (\cos x + \sin x) + 2C$$

$$I = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2} + C.$$

Лекция №3. Метод подстановки (замены переменной).

Теорема: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[\alpha; \beta]$ и существует обратная к ней функция $t = \kappa(x)$, тогда справедлива формула: $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Пример 1:

$$\int x^2 (5x^3 + 3)^8 dx = \left. \begin{matrix} t = 5x^3 + 3 \\ dt = 15x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{dt}{15} \end{matrix} \right| = \int t^8 \frac{dt}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{t^9}{9} + C = \frac{(5x^3 + 3)^9}{135} + C.$$

Пример 2:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{matrix} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \end{matrix} \right| = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.

Рассмотрим интегралы двух видов:

$$I_1 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx \text{ и } I_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Чтобы вычислить указанные интегралы, следует применить подстановку $t = x + \frac{b}{2a}$, приводящую интегралы такого вида к известным табличным интегралам.

Пример 1: $\int \frac{4x-5}{x^2-2x+3} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{4(t+1)-5}{(t+1)^2-2(t+1)+3} dt = \int \frac{4t-1}{t^2+2} dt =$

$$= \int \frac{4tdt}{t^2+2} - \int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{2dt^2}{t^2+2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = 2 \ln|t^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= 2 \ln|x^2-2x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 2:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t+2+2}{\sqrt{4(t+2)-(t+2)^2}} dt = \int \frac{t+4}{\sqrt{4-t^2}} dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} + 4 \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} + 4 \arcsin \frac{t}{2} + C = -\sqrt{4-t^2} + 4 \arcsin \frac{t}{2} + C =$$

$$= -\sqrt{2x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$$

Рациональные дроби многочленов. Простейшие рациональные дроби.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

Рациональной дробью многочленов называют отношение двух многочленов целых степеней.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Если $n \geq m$, то дробь называют неправильной, если $n < m$, то дробь называют правильной.

Примеры:

$$\frac{x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 4} \text{ - правильная дробь, } \frac{x+3}{x^5 + 2x^3 + 6} \text{ - неправильная дробь.}$$

Теорема: Всякую неправильную рациональную дробь многочленов можно единственным образом представить в виде суммы многочлена степени $n - m$ и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)} \quad (n \geq m), \quad (k < m).$$

Пример:

$$P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 7x - 1, \quad Q_2(x) = x^2 - x + 8$$

$$x^3 + 5x^2 + 7x - 1 \big| x^2 - x + 8$$

$$\underline{x^3 - x^2 + 8x} \quad x + 6$$

$$6x^2 - x - 1$$

$$R_1(x) = x + 6, \quad T_1(x) = 5x - 49$$

$$\underline{6x^2 - 6x + 48}$$

$$5x - 49$$

Тогда получим: $\frac{x^3 + 5x^2 + 7x - 1}{x^2 - x + 8} = x + 6 + \frac{5x - 49}{x^2 - x + 8}.$

Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Следующие правильные рациональные дроби называются *простейшими*:

1-го типа: $\frac{A}{x-a}, A \neq 0, a \in R;$

2-го типа: $\frac{A}{(x-a)^k}, A \neq 0, a \in R, k \geq 2;$

3-го типа: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, A^2+B^2 \neq 0, D=p^2-4q < 0;$

4-го типа: $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2.$

И они интегрируются:

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ (см. интегрирование выражений содержащих квадратный трехчлен).

4. Интеграл от простейшей дроби четвертого типа берется с помощью двукратного применения формулы интегрирования по частям.

Лекция 4. Разложение правильной рациональной дроби многочленов на простейшие и последующее интегрирование.

Утверждение: Всякий многочлен степени m можно единственным образом представить в виде произведения множителей четырех типов:

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)(x^2+gx+r)^n.$$

Множители вида $(x-a)$ будем называть простыми, вида $(x-b)^k$ - кратными степени k , множители вида (x^2+px+q) - не имеющими действительных корней, и $(x^2+gx+r)^n$ - не имеющими действительных корней степени n .

Пример:

$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ - многочлен четвертой степени содержит множители первого и третьего типов,

$x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$ - многочлен третьей степени содержит только множители второго типа.

Рассмотрим разложение правильной рациональной дроби многочленов $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} (n < m)$ на

простейшие дроби. В зависимости от вида многочлена, записанного в знаменателе, получим следующие случаи:

1-й случай: знаменатель дроби раскладывается только на простые множители. Тогда правильная дробь многочленов может быть представлена в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d}.$$

Здесь $A, B, \dots, D$ - неопределенные коэффициенты, которые находятся в процессе решения задачи. Для их нахождения существует несколько способов.

Рассмотрим первый способ нахождения неопределенных коэффициентов:

а) приводим правую часть выражения с неопределенными коэффициентами к общему знаменателю:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A(x-b)\dots(x-d) + B(x-a)\dots(x-d) + \dots + D(x-a)(x-b)\dots}{(x-a)(x-b)\dots(x-d)};$$

б) у полученных дробей в левой и правой частях равенства знаменатели равны, следовательно и числители должны быть равны:

$$P_n(x) = A(x-b)\dots(x-d) + B(x-a)\dots(x-d) + \dots + D(x-a)(x-b)\dots;$$

в) подставляя в обе части равенства вместо x значения корней, т.е. $a, b, \dots, d$, последовательно найдем коэффициенты $A, B, \dots, D$.

Пример:

$$а) \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 + 4x^2 - 5x} = \frac{3x^2 + x - 1}{x(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x-1)(x+5) + Bx(x+5) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+5)}$$

$$б) 3x^2 + x - 1 = A(x-1)(x+5) + Bx(x+5) + Cx(x-1)$$

$$x = 0: -1 = -5A \Rightarrow A = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$в) x = 1: 3 = 6B \Rightarrow B = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$x = -5: 69 = 30C \Rightarrow C = 2,3$$

Итак, если требуется вычислить интеграл от рассмотренной дроби, то:

$$\int \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 + 4x^2 - 5x} dx = \int \frac{0,2}{x} dx + \int \frac{0,5}{x-1} dx + \int \frac{2,3}{x+5} dx = 0,2 \ln|x| + 0,5 \ln|x-1| + 2,3 \ln|x+5| + C.$$

2-ой случай: среди корней знаменателя имеются кратные

$Q_m(x) = (x-a)^v (x-b)^w \dots (x-d)$, здесь a - корень кратности v ; b - корень кратности w ; d - простой корень.

Тогда правильная рациональная дробь раскладывается на сумму простейших дробей 1-го и 2-го типов.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_v}{(x-a)^v} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_w}{(x-b)^w} + \dots + \frac{D}{x-d}.$$

Пример:

$$\frac{x-5}{x(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(x-1)^2}$$

а)

$$\frac{x-5}{x(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A(x+1)^2(x-1)^2 + B_1x(x+1)(x-1)^2 + B_2x(x-1)^2 + C_1x(x-1)(x+1)^2 + C_2x(x+1)^2}{x(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$б) x-5 = A(x+1)^2(x-1)^2 + B_1x(x+1)(x-1)^2 + B_2x(x-1)^2 + C_1x(x-1)(x+1)^2 + C_2x(x+1)^2$$

$$x = 0: -5 = A \Rightarrow A = -5$$

$$в) x = -1: -6 = -4B_2 \Rightarrow B_2 = 1,5$$

$$x = 1: -4 = 4C_2 \Rightarrow C_2 = -1$$

Для нахождения оставшихся неопределенных коэффициентов можно решить систему линейных уравнений, подставив вместо x любые два числа:

$$\begin{cases} x = 2: -3 = 9A + 6B_1 + 2B_2 + 18C_1 + 18C_2 \\ x = -2: -7 = 9A + 18B_1 - 18B_2 + 6C_1 - 2C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -45 + 6B_1 + 3 + 18C_1 - 18 \\ -7 = -45 + 18B_1 - 27 + 6C_1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6B_1 + 18C_1 = 57 \\ 18B_1 + 6C_1 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B_1 + 6C_1 = 19 \\ 3B_1 + C_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = -\frac{1}{16} \\ C_1 = \frac{49}{48} \end{cases}.$$

Теперь неопределенный интеграл от рассмотренной рациональной дроби равен:

$$\int \frac{x-5}{x(x+1)^2(x-1)^2} dx = -5 \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{16} \int \frac{dx}{x+1} + 1,5 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{49}{48} \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= -5 \ln|x| - \frac{1}{16} \ln|x+1| - \frac{1,5}{x+1} + \frac{49}{48} \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$$

Замечание: И в первом и во втором случаях количество простейших дробей и неопределенных коэффициентов совпадает со степенью многочлена, записанного в знаменателе.

3-й случай: среди корней знаменателя имеются комплексно-сопряженные.

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^w(x^2+px+q), \text{ где } D = p^2 - 4q < 0.$$

Тогда правильная рациональная дробь раскладывается на простейшие дроби трех типов.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_w}{(x-b)^w} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q}$$

Замечание: Количество неопределенных коэффициентов совпадает со степенью многочлена, записанного в знаменателе, а количество простейших дробей меньше.

Пример:

$$\frac{3x^2+x+6}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}. \text{ В знаменателе второй дроби } D = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\text{а) } \frac{3x^2+x+6}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A(x^2+2x+2) + x(Bx+C)}{x(x^2+2x+2)}$$

$$\text{б) } 3x^2+x+6 = A(x^2+2x+2) + x(Bx+C)$$

Рассмотрим второй способ нахождения неопределенных коэффициентов:

Его суть состоит в том, что мы приравниваем неопределенные коэффициенты многочлена в левой части равенства и определенные числовые коэффициенты многочлена в правой части равенства при одинаковых степенях x .

Раскроем скобки в правой части равенства и приведем подобные члены при одинаковых степенях x .

$$3x^2+x+6 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 2A$$

$$\text{в) } \begin{cases} \text{при } x^2 \\ \text{при } x^1 \\ \text{при } x^0 \end{cases} \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+C=1 \\ 2A=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=0 \\ C=-5 \end{cases}$$

Теперь рассмотрим неопределенный интеграл от этой дроби:

$$\int \frac{3x^2+x+6}{x(x^2+2x+2)} dx = \int \frac{3dx}{x} - \int \frac{5dx}{x^2+2x+2} = 3 \ln|x| - 5 \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = 3 \ln|x| - 5 \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

1-й случай: Под знаком неопределенного интеграла встречается функция, содержащая только один корень степени k из дробно-линейного выражения:

$$\int R\left(x; \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx. \text{ Тогда заменяем иррациональное выражение на новую переменную:}$$

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \text{ выражаем исходную переменную } x \text{ через новую переменную } x = f(t) \text{ и}$$

находим $dx = f'(t)dt$. После чего получаем неопределенный интеграл от рациональной функции: $\int R_1(t)dt$.

Пример:

$$\int \frac{\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+3} \\ x = t^2 - 3 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{2+t} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t+2} dt = 2 \int \frac{t^2 - 4 + 4}{t+2} dt =$$
$$= 2 \int \left(t - 2 + \frac{4}{t+2} \right) dt = t^2 - 4t + 8 \ln|t+2| + C = x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 8 \ln|\sqrt{x+3} + 2| + C$$

2-й случай: Под знаком неопределенного интеграла встречается функция, содержащая несколько корней разных степеней $k_1; k_2$ из дробно-линейного выражения.

$\int R \left(x; \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$. Тогда новая переменная t вводится следующим образом:

$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $m = \text{ноч} \{k_1; k_2\}$ (ноч – наименьшее общее кратное).

Пример:

$$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}+1} dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1 = t^6 \\ x = \frac{t^6+1}{2} \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} 3t^5 dt = 3 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt =$$
$$= 3 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 3 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctg t \right) + C =$$
$$= 3 \left(\frac{(\sqrt[6]{2x-1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[6]{2x-1})^5}{5} + \frac{(\sqrt[6]{2x-1})^3}{3} - \sqrt[6]{2x-1} + \arctg \sqrt[6]{2x-1} \right) + C$$

Лекция №5. Интегрирование тригонометрических выражений.

Первый тип интегралов. Если подынтегральное выражение содержит тригонометрические функции $\sin ax; \cos ax$ в некоторых целых степенях, т.е.

$\int \cos^m ax \cdot \sin^n ax dx$, где m и n – целые числа. Тогда в зависимости от того, какими числами являются степени тригонометрических функций, будем рассматривать следующие случаи. Хотя

1-й случай: Хотя бы одна из степеней является положительным нечетным числом. Пусть для определенности m – нечетное число, тогда $m = 2k + 1$ и можно представить в виде произведения $\cos^m ax = \cos^{2k} ax \cdot \cos ax$. Далее функцию $\cos ax$ можно внести под знак дифференциала $\cos ax dx = d \left(\frac{\sin ax}{a} \right)$, а выражение в четной степени записать:

$\cos^{2k} ax = (1 - \sin^2 ax)^k$, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством $(\cos^2 ax + \sin^2 ax = 1)$. После этих преобразований, обозначив одну из тригонометрических функций новой переменной, получим интеграл, содержащий степенную функцию, что приводит к табличному интегрированию.

Пример:

$$\int \cos^4 3x \sin^3 3x dx = \int \cos^4 3x \sin^2 3x \sin 3x dx = \int \cos^4 3x \sin^2 3x d \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) =$$
$$= -\frac{1}{3} \int \cos^4 3x (1 - \cos^2 3x) d \cos 3x = \left| \cos 3x = u \right| = \frac{1}{3} \int u^4 (u^2 - 1) du =$$

$$\frac{1}{3} \int (u^6 - u^4) du = \frac{1}{3} \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} \right) + C = \frac{\cos^7 3x}{21} - \frac{\cos^5 3x}{15} + C.$$

2-й случай: Обе степени m и n являются положительными четными числами. В этом случае применяют совершенно другой подход. К тригонометрическим функциям в четных степенях применяют формулы понижения степени. При этомкратно увеличивается аргумент функции, что, однако не влияет на возможность интегрирования. Приведем эти формулы:

$$\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax)$$

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax).$$

$$\sin ax \cdot \cos ax = \frac{\sin 2ax}{2}$$

Пример: $\int \cos^4 5x \sin^2 5x dx = \int \cos^2 5x (\cos^2 5x \sin^2 5x) dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x) \left(\frac{1}{2} \sin 10x \right)^2 dx =$
 $\frac{1}{8} \int (\sin^2 10x + \sin^2 10x \cos 10x) dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 20x) dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 10x d\left(\frac{\sin 10x}{10}\right) =$
 $= \frac{x}{16} - \frac{\sin 20x}{320} + \frac{\sin^3 10x}{240} + C.$

3-й случай: Оба числа m и n одинаково четные или нечетные и хотя бы одно отрицательное. Тогда по известным из школьного курса тригонометрическим формулам переходим от функций $\sin x$; $\cos x$ к их выражениям через функцию $\operatorname{tg} x$. Введя новую переменную $t = \operatorname{tg} x$, получим формулы для замены в подынтегральном выражении:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}; \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Пример: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} dt = \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(t^2 + 1)^2} dt = \int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} dt - \int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{t}{1 + t^2} + \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$

Иногда, если подумать, можно найти другой способ проинтегрировать функцию, зачастую более простой. Решим тот же пример способом внесения функции под знак дифференциала:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Если числа m и n не одинаковой четности, то такая замена не приведет к интегралу, который не сложно решить. В этом случае надо подходить к решению творчески и искать различные способы решения.

Пример: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} d(-\cos x) = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x} d(\cos x) =$
 $= \int \frac{u^2 - 1}{u^4} du = \int \frac{du}{u^2} - \int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

Второй тип интегралов. Если подынтегральное выражение содержит тригонометрические функции $\sin ax$; $\cos bx$. Тогда применяем другие тригонометрические формулы, позволяющие от произведения функций перейти к сумме или разности:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$$

Пример:

$$\int \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) dx = \frac{1}{2} \int \left(\sin\left(6x + \frac{\pi}{24}\right) + \sin\frac{5\pi}{24} \right) dx = -\frac{\cos\left(6x + \frac{\pi}{24}\right)}{12} + \frac{x}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{24} + C$$

Третий тип интегралов. Если подынтегральное выражение содержит рациональную функцию от тригонометрической функции $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$. То есть интегралы вида:

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx. \text{ В этом случае удобна замена: } t = \operatorname{tg} x; dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример: $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} dt = \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + C.$$

Второй способ:

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} d(-\cos x) = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^3 x} d \cos x = \ln|\cos x| + \frac{1}{2 \cos^2 x} + C.$$

Хотя первообразные в каждом решении получились на вид разные, но легко показать, используя тригонометрические формулы, что они отличаются лишь на константу.

$$-\frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| = -\frac{1}{2} \ln|\cos^{-2} x| = 2 \frac{1}{2} \ln|\cos x| = \ln|\cos x|, \text{ а}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2}.$$

Четвертый тип интегралов. Если подынтегральное выражение содержит рациональную функцию от тригонометрических функций $\sin x; \cos x$, т.е. $\int R(\sin x; \cos x) dx$, применяется универсальная тригонометрическая подстановка.

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; x = 2 \operatorname{arctg} t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Обычно такая подстановка удобна для интегралов вида: $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$

Пример:

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 2} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{2dt}{8t + 3 - 3t^2 + 2 + 2t^2} = \int \frac{2dt}{-t^2 + 8t + 5} =$$

$$-2 \int \frac{dt}{t^2 - 8t - 5} = -2 \int \frac{dt}{(t-4)^2 - 21} = -\frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{t-4-\sqrt{21}}{t-4+\sqrt{21}} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 - \sqrt{21}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 + \sqrt{21}} \right| + C.$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{1 - \sin x} &= -\int \frac{(\sin x - 1) + 1}{\sin x - 1} dx = -\int dx - \int \frac{dx}{\sin x - 1} \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -x + \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \\ &= -x + 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -x - \frac{2}{t-1} + C = -x - \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + C. \end{aligned}$$

Автор - проф. Филиппов А.Н.